ПМТФ, № 1, 1961

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА, ВЫЗВАННОЕ ВРАЩЕНИЕМ ДИСКА

В. П. Шидловский

(Москва)

Задача о ламинарном пограничном слое, возникающем на неограниченном диске при равномерном вращении последнего в газе, была решена в работе [1]. Эта задача соответствует предельному случаю

$$K = \frac{c_p T_\infty}{\nu_\infty \omega} \to \infty$$

и ее точное решение было получено при помощи преобразования Дородницына. Целью настоящей работы является построение метода, позволяющего определить движение газа под влиянием равномерного вращения неограниченного диска при любых конечных числах K. Эта задача связана с решением полной системы уравнений Навье — Стокса для пространственного движения вязкой сжимаемой среды, причем будет показано, что в общем случае граничные условия на поверхности диска должны формулироваться с учетом эффектов разреженного газа, т. е. скольжения и скачка температуры.

1. Пользуясь цилиндрической системой координат, обозначим через u_r, u_θ и u_z соответственно радиальную, окружную и осевую составляющие скорости; пусть μ — коэффициент вязкости, λ — коэффициент теплопроводности, ν — кинематический коэффициент вязкости, T — температура, ρ — плотность, p — давление, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении и ω — угловая скорость диска; необходимо знать также безразмерные параметры $\sigma = \mu c_p / \lambda$ (число Прандтля) и $\varkappa$ (отношение теплоемкостей). Введение безразмерных переменных осуществляется при помощи формул

$$r = \frac{\sqrt{c_p T_\infty}}{\omega} \bar{r}, \quad z = \sqrt{\frac{\nu_\infty}{\omega}} \bar{z}, \quad u_r = \omega r F, \quad u_\theta = \omega r G, \quad u_z = \sqrt{\nu_\infty \omega} N$$

$$\mu = \mu_\infty Q^n, \quad T = T_\infty Q, \quad \rho = \rho_\infty D, \quad p = \rho_\infty c_p T_\infty P$$

Исходными уравнениями являются записанные в цилиндрических координатах уравнения Навье — Стокса, которые следует дополнить уравнениями неразрывности, энергии и состояния. Закон зависимости вязкости от температуры берется в простейшей форме

$$\mu / \mu_\infty = T / T_\infty \quad \text{или} \quad n = 1$$

Упомянутые уравнения имеют вид (черточки над безразмерными r и z опущены)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r^2 DF)}{\partial r} + \frac{\partial (DN)}{\partial z} = 0 \tag{1.1}$$

$$D\left[F \frac{\partial (rF)}{\partial r} + N \frac{\partial F}{\partial z} - G^2\right] =$$
$$= -\frac{\partial P}{r \partial r} + \frac{2}{3K} \frac{\partial}{r \partial r} \left\{Q\left[3 \frac{\partial (rF)}{\partial r} - \frac{\partial (r^2 F)}{r \partial r} - \frac{\partial N}{\partial z}\right]\right\} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[Q\left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial N}{r \partial r}\right)\right] + \frac{1}{K} \frac{2Q}{r^2}\left[\frac{\partial (rF)}{\partial r} - F\right]$$

$$D\left[F\frac{\partial(rG)}{\partial r}+N\frac{\partial G}{\partial z}+FG\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left(Q\frac{\partial G}{\partial z}\right)+\frac{1}{K}\frac{\partial}{r\partial r}\left\{Q\left[\frac{\partial(rG)}{\partial r}-G\right]\right\}+$$
$$+\frac{1}{K}\frac{2Q}{r^2}\left[\frac{\partial(rG)}{\partial r}-G\right]$$

$$\frac{1}{K}D\left(rF\frac{\partial N}{\partial r}+N\frac{\partial N}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial z}\left\{Q\left[2\frac{\partial N}{\partial z}-\frac{\partial(r^2F)}{r\partial r}\right]\right\}+$$
$$+\frac{1}{K}\frac{\partial}{r\partial r}\left\{Qr\left[\frac{\partial(rF)}{\partial z}+\frac{1}{K}\frac{\partial N}{\partial r}\right]\right\}$$

$$D\left(rF\frac{\partial Q}{\partial r}+N\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-\left(rF\frac{\partial P}{\partial r}+N\frac{\partial P}{\partial z}\right)=\frac{1}{K\sigma}\frac{\partial}{r\partial r}\left(rQ\frac{\partial Q}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial z}\left(Q\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+$$
$$+Q\left\{\frac{2}{K}\left[\left(\frac{\partial(rF)}{\partial r}\right)^2+F^2+\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2\right]+r^2\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2+\left(r\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{1}{K}\frac{\partial N}{\partial r}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{K}\left[\frac{\partial(rG)}{\partial r}-G\right]^2\right\}-\frac{2Q}{3K}\left[\frac{\partial(rF)}{\partial r}+F+\frac{\partial N}{\partial z}\right]^2$$

$$P=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}DQ$$

В дальнейшем вводятся переменные Дородницына

$$\eta=r,\qquad \zeta=\int_0^z D\,dz$$

а вместо функций D и N будет удобнее использовать

$$V=\frac{1}{D},\qquad H=\frac{N}{V}+\eta\zeta'F,\qquad \zeta'=\frac{\partial\zeta}{\partial r}=-\frac{\partial z/\partial\eta}{\partial z/\partial\zeta}=-\frac{1}{V}\int_0^{\zeta}\frac{\partial V}{\partial\eta}\,d\zeta$$

Основная идея развиваемого метода заключается в том, чтобы представить искомые функции в виде рядов по степеням параметра

$$\varepsilon=l_\infty\sqrt{\frac{\omega T_W}{\nu_\infty T_\infty}}\tag{1.2}$$

где l_∞ — коэффициент скольжения газа о стенку вдали от диска, T_W — температура поверхности диска (считаемая постоянной). Так как $l_\infty\approx\nu_\infty/\sqrt{c_pT_\infty}$, и предполагая, что отношение T_W/T_∞ имеет порядок единицы, нетрудно получить

$$1/K=\beta\varepsilon^2,\qquad \beta=\nu_\infty{}^2/(l_\infty{}^2c_pT_W)$$

причем β представляет собой заданный постоянный коэффициент порядка единицы. Такой выбор рядов имеет два преимущества: во-первых, главные члены этих рядов будут совпадать с решением для пограничного слоя; во-вторых, параметр ε будет входить в граничные условия на поверхности диска, записанные с учетом скольжения и скачка температуры.

Следует подчеркнуть, что применительно к данной задаче уточнение решения для пограничного слоя, т. е. переход от уравнений Прандтля к уравнениям Навье — Стокса, должно проводиться параллельно с принятием во внимание эффектов разреженного газа, а именно: скольжения и скачка температуры. По-видимому, это обстоятельтсво связано с тем, что и влияние вязкости, и влияние разреженности характеризуются здесь одним и тем же безразмерным критерием — числом K.

Граничные условия на поверхности диска в размерных величинах

$$u_\theta-r\omega=l_s\frac{\partial u_\theta}{\partial z},\quad u_r=l_s\frac{\partial u_r}{\partial z},\quad T_s-T_W=al_s\frac{\partial T}{\partial z},\quad u_z=0\quad \text{при } z=0$$

Здесь T_s и l_s — температура газа и коэффициент скольжения вблизи поверхности, a — заданный постоянный множитель, причем $l_s = l_\infty \sqrt{T_\infty / T_s} \nu_s / \nu_\infty$. Переходя к введенным переменным, получим

$$G - 1 = \varepsilon \sqrt{\frac{Q_s}{Q_W}} \frac{\partial G}{\partial \zeta}, \qquad F = \varepsilon \sqrt{\frac{Q_s}{Q_W}} \frac{\partial F}{\partial \zeta}, \qquad H = 0 \tag{1.3}$$

$$Q_s - Q_W = a\varepsilon \sqrt{\frac{Q_s}{Q_W}} \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \qquad \text{при } \zeta = 0$$

С точностью до членов порядка ε можно предполагать, что

$$Q_s = Q_W + \varepsilon Q_1(0) + \ldots$$

так что

$$\sqrt{Q_s / Q_W} = 1 + (1/2)\, \varepsilon Q_1(0) / Q_W + \ldots$$

Исходя из структуры уравнений и вида граничных условий, можно искать решение в форме степенных рядов следующего вида:

$$F(\zeta, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \sum_{k=0}^{p} \eta^{2k} F_{mk}(\zeta) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{m}{2} & (\text{при } m \text{ четном}) \\ p = \dfrac{m-1}{2} & (\text{при } m \text{ нечетном}) \end{cases} \tag{1.4}$$

$$Q(\zeta, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \sum_{k=0}^{t} \eta^{2k} Q_{mk}(\zeta) \qquad \begin{cases} t = \dfrac{m+2}{2} & (\text{при } m \text{ четном}) \\ t = \dfrac{m+1}{2} & (\text{при } m \text{ нечетном}) \end{cases} \tag{1.5}$$

Аналогичное (1.4) представление имеет место для G, H, P и аналогичное (1.5) для функции V.

Подставляя эти ряды в исходные уравнения, для коэффициентов рядов получим обыкновенные линейные дифференциальные уравнения, число которых возрастает с увеличением индекса m. Ограничимся рассмотрением членов с $m = 0, 1, 2$.

Уравнения нулевого приближения были рассмотрены в работе [1]. Приведем здесь эти уравнения, нужные для последующего использования, и учтем, что фигурирующие в них функции следует считать известными. Вместо $F_{00}(\zeta)$ будем писать $F_0(\zeta)$ и т. д. Штрихами обозначаются производные по ζ.

$$\begin{gathered} 2F_0 + H_0' = 0, \quad F_0'' - H_0 F_0' - F_0^2 + G_0^2 = 0, \quad G_0'' - H_0 G_0' - 2F_0 G_0 = 0 \\ E_0'' - \sigma H_0 E_0' = 0, \quad S_0'' - \sigma H_0 S_0' + \sigma H_0' S_0 = -\sigma (F_0'^2 + G_0'^2) \end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь предполагается, что $Q_{00} \equiv (Q_W - 1) E_0 + 1$, $Q_{01} \equiv S_0$ и выполняются следующие граничные условия:

$$\begin{gathered} F_0(0) = 0, \quad F_0(\infty) = 0, \quad G_0(0) = 1, \quad G_0(\infty) = 0, \quad H_0(0) = 0 \\ E_0(0) = 1, \quad E_0(\infty) = 0, \quad S_0(0) = 0, \quad S_0(\infty) = 0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

Кроме того, получается, что

$$P_0 = (\varkappa - 1)/\varkappa, \qquad V_0 = Q_0 = (Q_W - 1) E_0 + 1 + \eta^2 S_0.$$

2. Переходя к уравнениям первого приближения, их можно записать в таком виде:

$$\begin{gathered} 2F_1 + H_1' = 0, \qquad F_1'' - H_0 F_1' - 2F_0 F_1 - F_0' H_1 + 2G_0 G_1 = 0 \\ G_1'' - H_0 G_1' - 2F_0 G_1 - 2G_0 F_1 - G_0' H_1 = 0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$Q_{10}'' - \sigma H_0 Q_{10}' - \sigma (Q_W - 1) H_1 E_0' = 0 \tag{2.2}$$

$$Q_{11}'' - \sigma H_0 Q_{11}' + \sigma H_0' Q_{11} + \sigma H_1' S_0 = -2\sigma (F_0' F_1' + G_0' G_1') \tag{2.3}$$

Используя формулы (1.3), можно записать граничные условия для первого приближения

$$G_1(0) = G_0'(0), \qquad G_1(\infty) = 0, \qquad F_1(0) = F_0'(0)$$
$$F_1(\infty) = 0, \qquad H_1(0) = H_1(\infty) = 0, \qquad Q_{10}(\infty) = 0 \tag{2.4}$$
$$Q_{10}(0) = a(Q_W - 1)E_0'(0), \qquad Q_{11}(0) = aS_0'(0), \qquad Q_{11}(\infty) = 0$$

Нетрудно убедиться, что уравнения (2.1) и соответствующие им граничные условия удовлетворяются, если положить $F_1 \equiv F_0'$, $G_1 \equiv G_0'$, $H_1 \equiv H_0'$. Уравнение (2.2) решается при помощи подстановки

$$Q_{10} = (Q_W - 1)[E_0' + (a-1)E_1] \tag{2.5}$$

приводящей его к виду

$$E_1'' - \sigma H_0 E_1' = 0, \qquad E_1(0) = E_0'(0), \qquad E_1(\infty) = 0 \tag{2.6}$$

Аналогично этому в уравнении (2.3) следует сделать подстановку

$$Q_{11} = S_0' + (a-1)S_1 \tag{2.7}$$

в результате которой для определения S_1 получается уравнение

$$S_1'' - \sigma H_0 S_1' + \sigma H_0' S_1 = 0, \qquad S_1(0) = S_0'(0), \qquad S_1(\infty) = 0 \tag{2.8}$$

Решение уравнения (2.6) следует считать известным, так как очевидно, что $E_1(\zeta) = E_0'(0)E_0(\zeta)$. Уравнение (2.8) решается путем численного интегрирования, о чем будет подробнее сказано ниже. Используя условие постоянства давления и уравнение состояния, получим также

$$P_1 = 0, \qquad V_1 = Q_{10} + \eta^2 Q_{11}$$

3. Во втором приближении, т. е. при $m = 2$, в уравнениях приходится учитывать члены, не входившие в уравнения пограничного слоя. В частности, градиент давления по нормали к диску оказывается уже не равным нулю. Решение уравнений второго приближения как раз и целесообразно начать с определения давления. Уравнение количества движения в проекции на ось z дает

$$\frac{1}{\beta}P_{20}' = H_0'' - H_0'H + (Q_W - 1)\Big\{-\Big[\Big(2F_0 + \frac{1}{2}H_0^2\Big)E_0\Big]' - \frac{14}{3}F_0E_0' +$$
$$+ \Big(\frac{4}{3}\sigma - 1 + \frac{1}{2}\Big)H_0^2 E_0'\Big\} \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{\beta}P_{21}' = -4(F_0S_0)' + \frac{26}{3}F_0'S_0 + \Big(\frac{4}{3}\sigma - 1\Big)(H_0^2S_0)' + 6\Big(\frac{4}{3}\sigma - 1\Big)H_0F_0S_0 -$$
$$-\frac{4}{3}\sigma H_0(F_0'^2 + G_0'^2) - 2(F_0^2 + G_0^2)\int_0^\zeta S_0\,d\zeta \tag{3.2}$$

Как будет показано несколько ниже, на бесконечности должны удовлетворяться следующие условия:

$$P_{20}(\infty) = -\beta\frac{c^2}{2} \quad (c = -H_0(\infty) = 0.886), \quad P_{21}(\infty) = 0$$

Пользуясь этими условиями, можем полностью определить функции $P_{20}(\zeta)$ и $P_{21}(\zeta)$ и перейти к определению составляющих скорости во втором приближении. Предварительно введем обозначение

$$\int_0^\zeta S_0(\zeta)\,d\zeta = I_0(\zeta) \tag{3.3}$$

и сделаем подстановку

$$F_{20} = \frac{1}{2} F_0'' + \beta f_{20}, \qquad G_{20} = \frac{1}{2} G_0'' + \beta g_{20}, \qquad H_{20} = \frac{1}{2} H_0'' + \beta h_{20} \tag{3.4}$$

Итак, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$2f_{20} = h_{20}' = 0$$

$$f_{20}'' - H_0 f_{20}' - 2F_0 f_{20} + 2G_0 g_{20} - F_0' h_{20} = \tag{3.5}$$

$$= -\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} F_0' \left(\frac{1}{\beta} P_{20}'\right) - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} F_0'' \left(\frac{1}{\beta} P_{20}\right) + 2\left[(Q_W - 1) E_0 + 1\right] \left(\frac{1}{\beta} P_{21}\right) -$$

$$- 2\left(\frac{1}{\beta} P_{20}'\right) I_0 + 2\left[(Q_W - 1) E_0 + 1\right] \left(4F_0' I_0 - \frac{8}{3} S_0 F_0 - \frac{1}{3} H_0 S_0'\right) +$$

$$+ \frac{2}{3} (Q_W - 1) I_0 (H_0 E_0'' - 8F_0 E_0')$$

$$g_{20}'' - H_0 g_{20}' - 2F_0 g_{20} - 2G_0 f_{20} - G_0' h_{20} =$$

$$= -\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} G_0' \left(\frac{1}{\beta} P_{20}'\right) - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} G_0'' \left(\frac{1}{\beta} P_{20}\right) + 8\left[(Q_W - 1) E_0 + 1\right] G_0' I_0$$

$$4F_{21} + H_{21}' = 0$$

$$F_{21}'' - H_0 F_{21}' - 4F_0 F_{21} + 2G_0 G_{21} - F_0' H_{21} =$$

$$= -\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} F_0' P_{21}' - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} F_0'' P_{21} + 2S_0 P_{21} - 2I_0 P_{21}' +$$

$$+ {}^2/_3 \beta \left[I_0 (14F_0' S_0 - 6F_0 S_0' + H_0 S_0'' - 6F_0'' I_0) - S_0 (2F_0 S_0 + H_0 S_0')\right]$$

$$G_{21}'' - H_0 G_{21}' - 4F_0 G_{21} - 2G_0 F_{21} - G_0' H_{21} =$$

$$= -\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} G_0' P_{21}' - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} G_0'' P_{21} + 4\beta I_0 (S_0 G_0' - I_0 G_0'')$$

В соответствии с формулами (1.3) запишем граничные условия, которым должны удовлетворять искомые функции второго приближения

$$f_{20}(0) = \frac{1}{2\beta} F_0''(0) + \frac{a}{2\beta Q_W} (Q_W - 1) E_0'(0) F_0'(0)$$

$$g_{20}(0) = \frac{1}{2\beta} G_0''(0) + \frac{a}{2\beta Q_W} (Q_W - 1) E_0'(0) G_0'(0) \tag{3.6}$$

$$h_{20}(0) = -\frac{1}{2\beta} H_0''(0)$$

Уравнение энергии во втором приближении имеет вид

$$Q_{2k}'' - \sigma H_0 Q_{2k}' - 2k F_0 Q_{2k} = \Omega_{2k}(\zeta) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2) \tag{3.7}$$

Функции $\Omega_{2k}(\zeta)$ будут вполне определенными, если известны предыдущие приближения, а также решения уравнений (3.1), (3.2) и (3.5).

Граничные условия для Q_{2k} на поверхности диска будут

$$Q_{20}(0) = a(Q_W - 1)\left[E_0''(0) + (a - 1) E_1'(0)\right] + \frac{a^2}{2Q_W} (Q_W - 1)^2 E_0'^2(0)$$

$$Q_{21}(0) = a\left[S_0''(0) + (a - 1) S_1'(0)\right] + \frac{a^2 (Q_W - 1)}{Q_W} E_0'(0) \cdot S_0'(0) \tag{3.8}$$

$$Q_{22}(0) = \frac{a^2}{2Q_W} S_0'^2(0)$$

4. Рассмотрим граничные условия на бесконечном удалении от диска.

Прежде всего ясно, что по мере удаления от диска влияние вязкости будет ощущаться все меньше и станет пренебрежимо малым на бесконечности. Для сходимости процесса последовательных приближений необходимо выполнение дополнительного требования о том, чтобы при $z \to \infty$

система решаемых уравнений замыкалась независимо от последующих приближений. При учете этих требований из рассмотрения уравнений следует, что на бесконечности возможны только два типа движения газа: или равномерное поступательное, или винтовое с постоянной осевой составляющей скорости. Следовательно, вдали от диска можно использовать уравнение Бернулли, которое в размерной форме запишется так:

$$\frac{U^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p}{\rho} = C(r)$$

После перехода к безразмерным обозначениям и деления всех членов на $c_p T_\infty$ можно проанализировать поведение основных параметров на бесконечности. С точностью до первого приближения включительно это уравнение позволяет сделать лишь тот вывод, что осевое движение газа на бесконечности не влияет на его термодинамические параметры. Рассматривая второе приближение, получим

$$\frac{\beta c^2}{2} + Q_{20}(\infty) = 0 \qquad \text{или} \qquad Q_{20}(\infty) = -\frac{\beta c^2}{2}$$

Кроме того, на оси течения имеем

$$\frac{p(0, \infty)}{p_\infty} = \left[\frac{T(0, \infty)}{T_\infty}\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}$$

Откуда нетрудно получить, что $P_{20}(\infty) = Q_{20}(\infty) = (-{}^1/_2)\beta c^2$. На основании уравнений движения (3.5) легко видеть, что $P_{21}(\infty) = 0$. Таким же образом получается, что $G_{20}(\infty) = G_{21}(\infty) = 0$, а из уравнения энергии следуют условия $Q_{21}(\infty) = Q_{22}(\infty) = 0$. Наконец, при помощи уравнения состояния получим

$$V_{20}(\infty) = -\frac{1}{\varkappa - 1} Q_{20}(\infty) = \frac{\beta c^2}{2(\varkappa - 1)}, \quad V_{21}(\infty) = V_{22}(\infty) = 0$$

Предельные значения $H_{20}(\infty)$ и $H_{21}(\infty)$ получаются в процессе решения, а после их определения можно воспользоваться формулой выражения функции H и установить, как ведет себя на бесконечности безразмерная осевая скорость N

$$N_{20}(\infty) = -cV_{20}(\infty) + H_{20}(\infty), \quad N_{21} = H_{21}(\infty)$$

5. Для иллюстрации метода приводим результаты численного интегрирования полученных уравнений. Вычисления проводились для значений $\varkappa = c_p / c_v = 1.4$, $a = 1.6204$, $\beta = 0.1206 / Q_W$ и числа Прандтля $\sigma = 0.72$. Для выполнения условий на бесконечности были построены соответствующие асимптотические разложения, что позволило проводить численное интегрирование на конечном интервале. В силу линейности уравнений оказалось возможным выделить при интегрировании отдельные слагаемые, содержащие в качестве множителей различные комбинации безразмерной температуры поверхности диска Q_W. Не приводя во всех подробностях результаты расчетов, выпишем лишь предельные значения функций H_{20} и H_{21} на бесконечном удалении от диска

$$H_{20}(\infty) = 0.341 - 0.0239\,\frac{Q_W - 1}{Q_W} + 0.0116\,\frac{1}{Q_W}, \quad H_{21}(\infty) = \frac{0.0156}{Q_W} \tag{5.1}$$

Напряжение трения на поверхности диска с точностью до построенного приближения выражается в размерной форме как

$$\tau_{z\theta} = \left(\mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_W = \rho_\infty \sqrt{\nu_\infty \omega^3}\, r\, \{G_0'(0) + \varepsilon^2 \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}[P_{20}(0) + \eta^2 P_{21}(0)]\, G_0'(0) +$$

$$+ \varepsilon^2 [G_{20}'(0) + \eta^2 G_{21}'(0)]\} = \rho_\infty \sqrt{\nu_\infty \omega^3}\, r \left\{-0.616 + \frac{l_\infty{}^2 \omega}{\nu_\infty}\left[1.288\, Q_W + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 0.121 - 0.0297(Q_W - 1) - 0.0106\,\frac{\omega^2 r^2}{c_p T_\infty}\right]\right\} \tag{5.2}$$

Коэффициент момента сил трения для одной стороны диска радиусом r_0 будет выражаться формулой

$$C_M = -\frac{2}{\rho_\infty{}^2\omega^2\pi r_0{}^5}\int\limits_0^{r_0} 2\pi r^2\tau_{z\theta}dr = \frac{1}{\sqrt{R_\infty(r_0)}}\Big\{0.616 -$$

$$-\frac{l_\infty{}^2\omega}{\nu_\infty}[1.288\,Q_W + 0.121 - 0.0297\,(Q_W-1) - 0.00284\,M_\infty^2(r_0)]\Big\} \quad (5.3)$$

Здесь

$$R_\infty(r_0) = \omega r_0{}^2/\nu_\infty, \quad M_\infty(r_0) = \omega r_0/a_\infty$$

Вследствие весьма громоздкой формы уравнения энергии во втором приближении интегрирование этого уравнения не проводилось и характеристики теплопередачи даются поэтому лишь с точностью до первого приближения включительно. Удельный поток тепла за счет теплопроводности выразится теперь таким образом

$$q_z = \left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)_W = \lambda_\infty(T_W - T_\infty)\sqrt{\frac{\omega}{\nu_\infty}}\Big\{E_0'(0) + \frac{\omega^2r^2}{c_p(T_W-T_\infty)}S_0'(0) +$$

$$+ l_\infty\sqrt{\frac{\omega T_W}{\nu_\infty T_\infty}}\left[Q_{10}'(0) + \frac{\omega^2r^2}{c_p(T_W-T_\infty)}Q_{11}'(0)\right]\Big\} \quad (5.4)$$

Безразмерный коэффициент теплопередачи с одной стороны диска в этой постановке будет определяться формулой

$$C_E = -\frac{r_0}{\pi r_0{}^2\lambda_\infty|T_W - T_\infty|}\int\limits_0^{r_0} 2\pi r q_z dr = \quad (5.5)$$

$$= \operatorname{sign}(T_\infty - T_W)\,r_0\sqrt{\frac{\omega}{\nu_\infty}}\Big\{E_0'(0) + \frac{\varkappa-1}{2}M_\infty{}^2(r_0)\frac{S_0'(0)}{Q_W-1} +$$

$$+ l_\infty\sqrt{\frac{\omega T_W}{\nu_\infty T_\infty}}\left[Q_{10}'(0) + \frac{\varkappa-1}{2}M_\infty{}^2(r_0)\frac{Q_{11}'(0)}{Q_W-1}\right]\Big\} =$$

$$= \operatorname{sign}(T_W - T_\infty)\,r_0\sqrt{\frac{\omega}{\nu_\infty}}\Big\{0.329 - \frac{M_\infty{}^2(r_0)}{Q_W-1}0.0468 -$$

$$- l_\infty\sqrt{\frac{\omega}{\nu_\infty}}Q_W{}^{1/2}\left[0.0670 - \frac{M_\infty{}^2(r_0)}{Q_W-1}0.107\right]\Big\}$$

Интересно оценить, какое влияние на величину коэффициентов момента сил трения и теплоотдачи оказывает уточнение по сравнению с результатами теории пограничного слоя. В формулах (5.2) и (5.3) приближению пограничного слоя соответствуют первые слагаемые правых частей, а в формулах (5.4) и (5.5) — по два первых слагаемых. Как видно из формулы (5.3), следующие приближения дают некоторое уменьшение момента сил трения, если только исключить из рассмотрения специальные случаи $Q_W \gg 1$ и $M_\infty(r_0) \gg 1$. Уточнение выражения для коэффициента теплоотдачи зависит от комбинации $M_\infty^2(r_0)/(Q_W - 1)$; если эта величина мала, то коэффициент теплоотдачи меняется в том же направлении, что и коэффициент момента.

Поступила 24 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Шидловский В. П. Ламинарный пограничный слой на неограниченном диске, вращающемся в газе. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 1.