

Н. Х. Арутюнян, А. Б. Мовчан, С. А. Назаров

### ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ИНТЕРПРЕТАЦИЯХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛЕХНИЦКОГО

1. **Постановка задачи.** В [1] показано, что возможна не одна корректная математическая постановка задачи Лехницкого [2, 3] о деформации упругого полупространства с цилиндрической шахтой под действием собственного веса. (Отметим еще работу [4], где рассматривается аналогичная задача для случая наклонной шахты.) Выбор тех или иных условий на бесконечности должен соответствовать физической реальности. Поскольку бесконечное полупространство является идеализацией большого, но конечного упругого тела, следует воспользоваться асимптотическим анализом конкретных механических задач. В данной работе изучается деформация конечных тел с тонкими длинными шахтами при действии массовых сил. Это, во-первых, а) гравитирующий шар (рис. 1) и, во-вторых, толстая весомая плита, основание которой б) лежит на гладкой жесткой поверхности, в) сцеплено с абсолютно жестким полупространством или г) не имеет опоры (рис. 2).

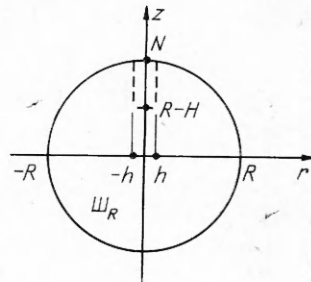


Рис. 1

В [2, 3] указано следующее решение обсуждаемой задачи в бесконечной области (рис. 3):

$$(1.1) \quad u_r^{(1)}(\mathbf{x}) = \nu h^2 \gamma z [2(1-\nu)\mu r]^{-1}, \quad u_z^{(1)}(\mathbf{x}) = (1-2\nu)\gamma z^2 [4(1-\nu)\mu]^{-1} + \nu \gamma h^2 [2(1-\nu)\mu]^{-1} \ln(rh^{-1});$$

$$(1.2) \quad \sigma_{rr}(\mathbf{u}^{(1)}; \mathbf{x}) = \frac{\nu \gamma z}{1-\nu} \left(1 - \frac{h^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi}(\mathbf{u}^{(1)}; \mathbf{x}) = \frac{\nu \gamma z}{1-\nu} \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right), \\ \sigma_{zz}(\mathbf{u}^{(1)}; \mathbf{x}) = \gamma z, \quad \sigma_{rz}(\mathbf{u}^{(1)}; \mathbf{x}) = 0.$$

Другое решение, найденное в [1]:

$$(1.3) \quad u_r^{(2)} = -\nu [2(1+\nu)\mu]^{-1} \gamma z r, \quad u_z^{(2)} = \gamma [4(1+\nu)\mu]^{-1} (z^2 + \nu r^2);$$

$$(1.4) \quad \sigma_{zz}(\mathbf{u}^{(2)}; \mathbf{x}) = \gamma z, \quad \sigma_{rr}(\mathbf{u}^{(2)}; \mathbf{x}) = \sigma_{\varphi\varphi}(\mathbf{u}^{(2)}; \mathbf{x}) = \sigma_{rz}(\mathbf{u}^{(2)}; \mathbf{x}) = 0.$$

Оба решения обладают очевидными несовершенствами. Компонента  $u_r^{(2)}$  поля (1.3) имеет значительный рост при  $r \rightarrow \infty$ . Этого недостатка лишено решение (1.1), однако в (1.2) напряжения  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}$  не убывают при  $r \rightarrow \infty$ , а при  $|z| > 2\gamma^{-1}\mu(\nu^{-1}+1)$  наблюдается взаимное проникновение стенок шахты (т. е.  $u_r < -h$  при  $r = h$ ). Подчеркнем, что в формулах (1.3), (1.4) с увеличением глубины деформация приводит к росту сечения шахты. Перечисленные несоответствия означают, что область применения решения задачи о бесконечном теле ограничена. Поэтому далее решения всех задач сравниваются лишь вблизи выходного отверстия шахты.

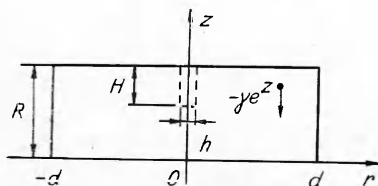


Рис. 2

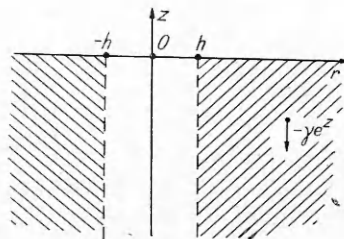


Рис. 3

Асимптотика решения задачи о шахте в конечном теле определяется решением Лехницкого только в ситуации «в». В остальных трех задачах главный член асимптотического решения — следующие поля смещений и напряжений:

$$(1.5) \quad u_r = \sigma_\infty (2\mu)^{-1} [(1 - \nu)(1 + \nu)^{-1} r + h^2 r^{-1}],$$

$$u_z = -\sigma_\infty \nu z \mu^{-1} (1 + \nu)^{-1}, \quad u_\varphi = 0;$$

$$(1.6) \quad \sigma_{rr} = \sigma_\infty (1 - h^2 r^{-2}), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_\infty (1 + h^2 r^{-2})$$

(см. формулы (2.4), (3.8), (5.7)). Они отвечают осесимметричному растяжению (сжатию при  $\sigma_\infty < 0$ ) полупространства с цилиндрической шахтой. Таким образом, корректный переход к задаче Лехницкого при неограниченном расширении области невозможен в случаях «а», «б», «г».

Само присутствие решения (1.5), (1.6) в представлении напряженно-деформированного состояния вблизи выходного отверстия шахты не является неожиданным; заслуживает внимания то обстоятельство, что относительный вклад полей (1.5), (1.6) в асимптотическое решение растет с увеличением радиуса  $R$  шара или радиуса  $d$  и толщины  $R$  плиты. Впрочем, тот факт, что напряжения в горизонтальных плоскостях преобладающие, хорошо известен в механике горных пород [5, 6]; скважины и шахты проектируются не на основе формул Лехницкого, а с учетом «коэффициентов боковых напряжений и распора».

В п. 3 проверен следующий факт: если к боковой поверхности плиты с шахтой, лежащей на гладкой поверхности, приложена сжимающая нагрузка интенсивности  $p$ , то при определенном значении  $p$  главный член (1.5), (1.6) асимптотики исчезает. Младший член асимптотического решения совпадает с решением Лехницкого (1.1), (1.2). Однако в задачах «а» и «г» такого совпадения нет. В случае гравитирующего шара это обстоятельство связано с кривизной поверхности (возникающие из-за нее поправочные слагаемые к решению (1.5), (1.6) имеют тот же порядок, что и присутствующие в младшем члене асимптотики поля (1.1), (1.2)). Для плиты, нижнее основание которой не имеет опоры (задача «г»), в качестве младшего асимптотического члена выступает линейная комбинация решений (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4) задачи Лехницкого.

Вопрос о постановках задач теории упругости для неограниченных тел затрагивался во многих исследованиях (см. [7, 8] и др.). Особые трудности возникают в тех задачах, которым отвечают бесконечные интегралы энергии; в такой ситуации перестают быть верными привычные утверждения о существовании и единственности решений, а неосторожное обращение с дополнительными условиями на бесконечности приводит к ошибочным выводам и возникновению различного рода парадоксов [8, примеры в § 7 гл. 3]. Рассмотренная здесь задача Лехницкого относится именно к этому типу задач.

Проведенный в настоящей работе асимптотический анализ позволяет заключить, что формулы Лехницкого пригодны лишь в некоторых из большого числа возможных интерпретаций задачи в бесконечной области как предела задач для больших, но ограниченных упругих тел. Непосредственный предельный переход к бесконечной области в других задачах либо некорректен, либо приводит к решениям, отличающимся от найденного Лехницким.

**2. Гравитирующий шар с шахтой.** Пусть  $\mathbb{M}_R$  — шар радиуса  $R$  с центром  $O$ , заполненный упругим материалом с постоянными Ламэ  $\lambda$  и  $\mu$ ;  $g$  и  $\gamma$  — величина ускорения свободного падения и удельный вес материала на поверхности. Обозначим через  $\mathbb{C}_h$  цилиндр  $\{x : r < h\}$  с малым радиусом  $h$ ; здесь  $(r, \varphi, z)$  — цилиндрические координаты. Положим  $\Omega = \mathbb{M}_R \setminus \bar{G}$ ,  $G = \{x \in \mathbb{C}_h : z > R - H\}$  ( $H$  — глубина шахты). Будем считать, что  $R \gg H \gg h$ . Рассмотрим задачу о деформации тела  $\Omega$  под действием гравитационного поля

$$(2.1) \quad \mathbf{L}(\partial/\partial x)\mathbf{u}(x) + \mathbf{F}(x) = \mathbf{0}, \quad x \in \Omega; \quad \sigma^{(n)}(\mathbf{u}; x) = \mathbf{0}, \quad x \in \partial\Omega,$$

где  $\mathbf{L}$  — оператор системы Ламэ;  $\mathbf{u}$  — вектор смещений;  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  — тензор напряжений;  $\mathbf{n}$  — вектор единичной внешней нормали;  $\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ;  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -g\rho R^{-1}\mathbf{e}^\rho$ ;  $\mathbf{e}^\rho$  — орт;  $(\rho, \theta, \varphi)$  — сферические координаты. Задачу (2.1) следует интерпретировать как задачу в области с сингулярно возмущенной границей. Согласно [9], вдали от шахты  $G$  поле  $\mathbf{u}$  в главном описывается решением  $\mathbf{v}$  задачи о сплошном гравитирующем шаре, которое имеет вид [10]

$$(2.2) \quad u_\rho = [10(\lambda + 2\mu)R]^{-1}\gamma\rho[\rho^2 - R^2(6\mu + 5\lambda)(2\mu + 3\lambda)^{-1}];$$

$$(2.3) \quad \sigma_{\rho\rho} = -\gamma[10(\lambda + 2\mu)R]^{-1}(6\mu + 5\lambda)(R^2 - \rho^2),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\gamma[10(\lambda + 2\mu)R]^{-1}[(6\mu + 5\lambda)(R^2 - \rho^2) + 4\mu\rho^2].$$

Здесь и далее компоненты полей, равные нулю, не указываются. Вектор  $\mathbf{v}$  оставляет невязку в краевых условиях на  $\partial G \cap \partial\Omega$  из (2.1). Поэтому [9] вблизи  $\partial G$  возникают пограничные слои: двумерный для средней части шахты и два трехмерных для ее торца и выходного отверстия. Преследуя цель сравнения решения задачи (2.1) с решением Лехницкого, ограничимся изучением последнего погранслоя.

Введем «растянутые» безразмерные координаты  $\xi = h^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{N})$ , где  $\mathbf{x}$  — декартовы координаты,  $\mathbf{N} = (0, 0, R)$  — северный полюс сферы  $\partial\mathcal{M}_R$ . Учитывая соотношения размеров  $R, H$  и  $h$ , заключаем, что в координатах  $\xi$  (после формального перехода к  $h = 0$ ) область  $\bar{\Omega}$  трансформируется в полупространство  $R_-^3 = \{\xi : \xi_3 < 0\}$  с бесконечной шахтой  $\Pi_1$ . Согласно (2.3), невязка поля  $\mathbf{v}$  в краевом условии на боковой поверхности  $G$  в главном задается формулой

$$(2.4) \quad \sigma_{rr}(\mathbf{v}; \mathbf{x}) = -[5(\lambda + 2\mu)]^{-1}2\mu\gamma R(1 + O(hR^{-1}|\xi|)).$$

Следовательно, старший член пограничного слоя  $hw^0(\xi)$  есть решение упругой задачи в  $R_-^3 \setminus \Pi_1$  при условии, что на боковой поверхности задано постоянное нормальное напряжение

$$(2.5) \quad w^0(\xi) = -[5(\lambda + 2\mu)]^{-1}\gamma R X^{(0)};$$

$$(2.6) \quad X_r^{(0)}(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1/2}, \quad X_0^{(0)} = X_z^{(0)} = 0.$$

**3. Круговая плита с шахтой на гладком жестком основании.** Пусть  $\Pi = \{\mathbf{x} \in \Pi_d : 0 < z < R\}$ ,  $\Omega = \Pi \bar{G}$  ( $G$  — множество из п. 2,  $d$  — радиус плиты,  $R$  — ее толщина,  $d \gg R \gg H \gg h$ ). Рассмотрим задачу о деформации тела  $\bar{\Omega}$  под действием собственного веса  $\gamma e^3$  и обжимающих радиальных усилий  $p$ , приложенных к боковой поверхности  $S$  плиты  $\Pi$ . Плита лежит на абсолютно жестком гладком основании, а верхняя ее часть свободна от напряжений. Вектор смещений  $\mathbf{u}$  удовлетворяет уравнениям

$$(3.1) \quad \mathbf{L}(\partial/\partial\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \gamma e^{(3)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Omega;$$

$$(3.2) \quad \boldsymbol{\sigma}^{(3)}(\mathbf{u}; \mathbf{y}, R) = \mathbf{0}, \quad h < |\mathbf{y}| < d;$$

$$(3.3) \quad u_3(\mathbf{y}, 0) = 0, \quad \sigma_{j3}(\mathbf{u}; \mathbf{y}, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \quad |\mathbf{y}| < d;$$

$$(3.4) \quad \boldsymbol{\sigma}^{(r)}(\mathbf{u}; \mathbf{y}, z) = -pe^{(r)}, \quad |\mathbf{y}| = d, \quad z \in (0, R);$$

$$(3.5) \quad \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial G \cap \Omega.$$

Здесь  $\mathbf{y} = (x_1, x_2)$ . Частное решение  $\mathbf{v}^0$  задачи о весомом слое ( $v_r^0 = v_\varphi^0 = 0$ ,  $v_z^0(x) = (1/2)\gamma(2\mu + \lambda)^{-1}z(z - 2R)$ ) устраняет неоднородность в уравнениях равновесия (3.1), удовлетворяет (3.2), (3.3), но оставляет невязки в краевых условиях (3.4), (3.5). Используя малость отношения  $R \setminus d$ , учтем условия на боковой поверхности плиты при помощи решения  $\bar{\Psi} = (\Psi_r, 0)$  задачи об осесимметричном обобщенном плосконапряженном состоянии в круге  $\{\mathbf{y} : |\mathbf{y}| < d\}$  с краевым условием

$$(3.6) \quad 2\mu \frac{\partial \Psi_r}{\partial r} + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \left( \frac{\partial \Psi_r}{\partial r} + r^{-1}\Psi_r \right) = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} R\bar{v} - p \quad \text{при } r = d.$$

Ясно, что  $\Psi_r = [4\mu(2\mu + 3\lambda)]^{-1}(\lambda R\gamma - 2(2\mu + \lambda)p)r$ . Компоненты трехмерного вектора смещений  $\mathbf{v}^1$  вне окрестности боковой поверхности  $S$

плиты восстанавливаются при помощи равенств

$$(3.7) \quad v_r^1 = \Psi_r, \quad v_\phi^1 = 0, \quad v_z^1 = -vz(1-v)^{-1}(\partial\Psi_r/\partial r + r^{-1}\Psi_r).$$

Поясним формулы (3.6), (3.7). Соотношения (3.7) обычны для плоско-напряженного состояния плиты толщиной  $2R$ . Переход от уравнений (3.1)–(3.3) к задаче о деформации плиты  $\{x \in U_d: |z| < R\}$  осуществляется за счет продолжения в  $R^{-3}$  компонент  $u_r, u_\phi$  по четности,  $u_z$  по нечетности. Равенство (3.6) означает, что невязка суммы  $v^0 + v^1$  в краевом условии (3.4) на образующей цилиндрической поверхности  $S$  имеет нулевой главный вектор. Известно, что у края плиты возникает двумерный пограничный слой, который экспоненциально затухает в глубь плиты благодаря упомянутой самоуравновешенности. Таким образом,  $v^0 + v^1$  вблизи  $G$  дает приближение с точностью  $O(Rd^{-1})$  к решению задачи о сплошной плите  $\Pi$ .

Как и в п. 2, вблизи  $G$  возникают пограничные слои; они компенсируют невязку поля  $v^0 + v^1$  в условиях (3.5). Главный член пограничного слоя, связанный с выходным отверстием шахты, имеет вид  $hw^0(\xi)$ , где  $\xi = h^{-1}(x - N)$  — «растянутые» переменные,

$$(3.8) \quad w^{(0)}(\xi) = (\lambda R\gamma - 2(2\mu + \lambda)p)[4\mu(2\mu + \lambda)]^{-1}X^{(0)}(\xi),$$

$X^{(0)}$  — вектор (2.6). Указанное решение компенсирует погрешность  $(1/2) \cdot (2\mu + \lambda)^{-1}(\lambda R\gamma - 2(2\mu + \lambda)p)$  в краевом условии  $\sigma_{rr} = 0$  на боковой поверхности шахты. Если

$$(3.9) \quad \lambda R\gamma - 2(2\mu + \lambda)p = 0,$$

то  $w^0 = 0$  и следует вычислить второй член пограничного слоя  $h^2w^1(\xi)$ , который определяется формулами

$$(3.10) \quad w^1(\xi) = v(1-v)^{-1}X^{(1)}(\xi);$$

$$(3.11) \quad X_r^{(1)} = \xi_3\gamma[2\mu(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}]^{-1}, \quad X_z^{(1)} = -\gamma(4\mu)^{-1}\ln(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad X_\phi^{(1)} = 0.$$

Решение (3.10) компенсирует невязку, оставленную полем  $v^0$  в краевом условии  $\sigma_{rr} = 0$  на  $\partial G$ . Нетрудно видеть, что вблизи выходного отверстия шахты сумма  $v^0 + h^2w^1$  с точностью до жесткого смещения в направлении оси  $Oz$  совпадает в главном с решением Лехницкого. Если условие (3.9) не выполняется, то такого совпадения нет.

**4. Круговая плита с шахтой, жестко защемленная на нижнем основании.** Сохраним обозначения из п. 3 и рассмотрим задачу о деформации плиты с шахтой при условии полного сцепления нижнего основания с абсолютно жестким полупространством  $R^{-3}$ . Математическая постановка задачи сводится к системе (3.1) с краевыми условиями (3.2), (3.4), (3.5) и

$$(4.1) \quad u(y, 0) = 0, \quad |y| < d.$$

Схема исследования этой задачи мало отличается от использованной в п. 3. Возникающие упрощения связаны с отсутствием члена  $v^1$  в решении гладкого типа. В самом деле, поле  $v^0$  оставляет невязку в краевом условии (3.4), которая компенсируется двумерным пограничным слоем около  $S$ . Этот погранслой является решением плоской задачи о деформации полуполосы, одна из сторон которой жестко закреплена в силу (4.1). Следовательно, он экспоненциально убывает, а поля (3.7) и пограничного слоя  $hw^0(\xi)$  нет. Окончательно получаем, что трехмерный пограничный слой имеет вид  $h^2w^1(\xi)$ , где  $w^1$  — вектор (3.10). Как и в п. 3, сумма  $v^0 + h^2w^1$  в главном дает решение Лехницкого.

**5. Шахта в круговой плите, не имеющей опоры.** Рассмотрим ту же задачу, что и в пп. 3, 4, но будем считать, что нижнее основание свободно от напряжений (плита «висит» над полостью), а боковая поверхность жестко закреплена

$$(5.1) \quad \sigma^{(3)}(u; y, 0) = 0, \quad |y| < d;$$

$$(5.2) \quad u(y, z) = 0, \quad |y| = d, \quad z \in (0, R)$$

(ср. с (3.3), (4.1) и (3.4)). В качестве главного члена асимптотики решения задачи (3.1), (3.2), (5.1), (5.2), (3.5) возьмем решение  $v^0$  задачи об изгибе пластины

$$(5.3) \quad v_j^0(x) = -R\zeta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_j^2}(y) + R^3 \left[ -\frac{\zeta^2}{6} \frac{v-2}{1-v} + \zeta \frac{v-6}{24(1-v)} \right] \Delta_y \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(y),$$

$$j = 1, 2;$$

$$(5.4) \quad v_i^0(x) = \psi(y) + R^2 \frac{v}{1-v} \left( \frac{\zeta^2}{2} - \frac{1}{24} \right) \Delta_y \psi(y).$$

Здесь  $\zeta = R^{-1}z - 1/2$  — координата внутреннего пограничного слоя в тонкой цилиндрической области (отношение  $\bar{R}/\bar{d}$  — малая величина), функция

$$(5.5) \quad \psi(y) = -(32\mu)^{-1} 3\gamma(1-v)(dR^{-1})^4(1-(rd^{-1})^2)^2$$

является решением задачи теории изгиба пластин Кирхгофа

$$(5.6) \quad \Delta_y^2 \psi(r) = -6\gamma(1-v)\mu^{-1}R^{-4}, \quad |r| < d, \quad \psi(d) = 0, \quad \partial\psi/\partial r(d) = 0.$$

Отметим, что краевые условия в задаче (5.6) получаются, как и в пп. 3, 4, при рассмотрении задачи о двумерном пограничном слое.

Поле (5.3), (5.4) оставляет невязку в уравнении (3.5). Согласно (5.5), с точностью до младших членов эта погрешность задается соотношениями  $\sigma_{rr} = (3/8)\gamma(1+v)d^2R^{-4}(R - 2\xi_3h)$ ,  $h\xi_3 = (1/2)R - \zeta R$ ,  $h\xi_1 = y_2$ ,  $h\xi_2 = y_1$  и компенсируется при помощи пограничного слоя  $hw^{(0)}(\xi) + h^2w^{(1)}(\xi)$ , где

$$(5.7) \quad w^{(0)}(\xi) = (3/16)\gamma\mu^{-1}(1+v)d^2R^{-3}X^{(0)}(\xi);$$

$$(5.8) \quad w^{(1)}(\xi) = (3/4)(1+v)d^2R^{-3}X^{(1)}(\xi).$$

Как и в задаче п. 3, при нарушении условия (3.9) вблизи выходного отверстия шахты решение задачи (3.1), (3.2), (5.1), (5.2) в главном определяется полем, отвечающим сжатию полупространства с шахтой (см. (5.7) и ср. с (3.8)). Второй член пограничного слоя, в отличие от п. 3, не соответствует решению Лехницкого. Он связан со следующей линейной комбинацией решений (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4), обсуждавшихся в [1]:

$$(5.9) \quad (3/4)d^2(1-v^2)(vR^4)^{-1} \{u^{(2)}(\xi) - u^{(1)}(\xi)\}.$$

Отметим, что, согласно (1.1), (1.3), выражение (5.9) не имеет особенности при  $v \rightarrow 0$ . Поле (5.9) с точностью до множителя совпадает с указанным в [1] решением  $U$  однородной задачи в полупространстве с вертикальной шахтой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х., Мовчан А. Б., Назаров С. А. О корректных постановках задач Лехницкого // ПММ.— 1986.— Т. 50, № 2.
2. Лехницкий С. Г. Симметричная деформация и кручение тела вращения с анизотропией частного вида // ПММ.— 1940.— Т. 4, № 3.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела.— М.: Наука, 1977.
4. Геоджаев В. О. Неоднозначность решения задачи о равновесии упругого тяжелого полупространства с цилиндрической полостью // Изв. АН АрмССР. Сер. Механика.— 1987.— № 3.
5. Турчанинов И. А., Иофис М. А., Каспарьян Э. В. Основы механики горных пород.— Л.: Недра, 1977.
6. Гелескул М. Н., Хорин В. Н., Киселев Е. С., Бушуев Н. П. Справочник по креплению горных выработок.— М.: Недра, 1976.
7. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения.— М.: Наука, 1974.
8. Паргон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости.— М.: Наука, 1981.
9. Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области.— Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1981.
10. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д. О растущем гравитирующем вязкоупругом шаре при конечных деформациях // Изв. АН СССР. МТТ.— 1984.— № 4.

г. Москва,  
г. Ленинград

Поступила 19/1 1988 г.,  
в окончательном варианте — 24/V 1988 г.