УДК 532.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕРМОВИБРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ В НАКЛОННОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ЧАСТОТАХ ВИБРАЦИИ

Б. Л. Смородин

Пермский государственный университет, 614600 Пермь

Исследована устойчивость течения неоднородно нагретой жидкости, возникающего в наклонном слое под действием силы тяжести и продольных вибраций конечной частоты. Методом Флоке проведен анализ линеаризованных уравнений конвекции в приближении Буссинеска. Изучена устойчивость течения по отношению к плоским, спиральным и пространственным возмущениям. Показано, что при конечных частотах имеются области параметрической неустойчивости, обусловленные плоскими возмущениями. В зависимости от амплитуды и частоты вибрации могут как стабилизировать неустойчивое основное состояние, так и дестабилизировать течение жидкости. В случае спиральных возмущений граница устойчивости не зависит от амплитуды и частоты вибраций.

Ключевые слова: термовибрационная конвекция, параметрическая неустойчивость, наклонный слой жидкости.

Введение. Исследованию термовибрационной конвекции посвящено большое число работ, обзор которых имеется в [1]. Интерес к этой проблеме оправдан как с практической, так и с теоретической точек зрения. Периодическое воздействие, в частности вибрации, оказывает сильное влияние на устойчивость жидкости в статических полях и может быть использовано для управления движением жидкости в различных технологических процессах, например при производстве высокочистых материалов на борту орбитальных станций. Во многих работах, посвященных изучению проблемы вибрационной конвекции, рассматривается случай малых амплитуд и высоких частот вибрации и используется эффективный метод осреднения [2]. В высокочастотном пределе в силу того, что период вибраций мал по сравнению с характерными гидродинамическим и тепловым временами системы, амплитуда и частота вибраций не являются независимыми параметрами, а резонансные эффекты отсутствуют.

Исследование термовибрационной конвекции при конечных частотах вибрации также представляет значительный интерес. Эксперименты, проведенные на борту орбитальных станций, свидетельствуют о существовании эффекта g — jitter, когда поле ускорений имеет постоянную и нестационарную компоненты [3]. Во многих случаях амплитуда и частота вибраций являются независимыми параметрами. При этом проявляются механизмы неустойчивости, связанные с параметрическим резонансом. Различные аспекты конвекции в первоначально покоящейся жидкости под действием вертикальных вибраций конечной частоты, представляющих собой модуляции поля силы тяжести, изучались в [4, 5]. Устойчивость термовибрационного течения, возникающего в горизонтальном слое жидкости под

Работа выполнена при финансовой поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития (US Civilian Research Development Foundation) (грант N PE-009-0) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-96407).

влиянием продольной вибрации произвольной частоты, по отношению к плоским возмущениям рассмотрена в [6] для условий невесомости и в [7] для статического поля силы тяжести. Исследованы предельные случаи низких и высоких частот вибрации, для конечных частот внешнего воздействия определены области параметрической неустойчивости.

Однако в поле силы тяжести пространственные возмущения термовибрационного течения, роль которых не обсуждалась в [7], могут быть более опасны, чем плоские. Конкуренция плоских и пространственных мод неустойчивости в случае стационарных конвективных течений рассматривалась в [8]. При отклонении слоя от горизонтали стратификация неоднородно нагретой жидкости порождает термогравитационное течение, которое может оказать существенное влияние на конвективную устойчивость в вибрационном поле. Взаимовлияние термогравитационного и вибрационного механизмов неустойчивости рассматривалось ранее для продольных вибраций вертикального слоя только в высокочастотном пределе [9].

В данной работе изучена конвективная устойчивость нестационарного течения однородной несжимаемой жидкости в плоском слое под действием продольных гармонических вибраций конечной частоты и амплитуды при произвольной ориентации слоя относительно направления силы тяжести. Для периодического неизотермического течения получен аналог преобразований Сквайра, позволяющих свести задачу устойчивости по отношению к трехмерным возмущениям к соответствующей двумерной задаче. Исследовано поведение плоских, спиральных и пространственных возмущений. Показано, что в статическом поле силы тяжести существует область параметров, в которой неустойчивость течения как в горизонтальном, так и в наклонном слоях связана со спиральными возмущениями.

1. Постановка задачи. Плоские возмущения. Рассмотрим плоский слой однородной жидкости, границы которого нагреты до различных температур ($T = \mp\Theta$) и составляют угол α_0 с вертикальным направлением. Весь слой находится в статическом поле силы тяжести $\boldsymbol{g}_0$ и подвержен линейным гармоническим вибрациям в направлении оси x, параллельной его границам. Координаты твердых плоскостей, ограничивающих слой: $z = \pm h$. Случай, когда вибрационные скорости много меньше акустических, аналогичен случаю модуляции гравитационного поля по закону $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_0 + b\Omega^2\boldsymbol{n}\sin(\Omega t)$, где $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)$ — единичный вектор вдоль оси вибраций; Ω — угловая частота; b — амплитуда смещения.

Используя в качестве масштаба расстояний величину h, времени — h^2/ν, скорости — ν/h, температуры — Θ, давления — $\rho\nu^2/h^2$ (ρ — плотность жидкости, ν — кинематическая вязкость), запишем уравнения конвекции в приближении Буссинеска в колеблющейся системе координат:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \Delta\boldsymbol{v} + \mathrm{Gr}_v\, T\boldsymbol{n}\sin(\omega t) + \mathrm{Gr}\, T\cdot\boldsymbol{m},$$
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{v}\nabla T = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\,\Delta T, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0, \qquad \boldsymbol{m} = (\cos\alpha_0, 0, \sin\alpha_0), \tag{1}$$
$$z = \pm 1: \qquad \boldsymbol{v} = 0, \quad T = \mp 1.$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ — скорость; p — давление; T — температура, отсчитываемая от некоторого среднего значения; $\mathrm{Gr} = g_0\beta_T\Theta h^3/\nu^2$ — число Грасгофа; $\mathrm{Gr}_v = b\Omega^2\beta_T\Theta h^3/\nu^2$ — вибрационный аналог числа Грасгофа; β_T — коэффициент теплового расширения; $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; χ — температуропроводность жидкости; $\omega = \Omega h^2/\nu$ — безразмерная частота вибрации.

Можно получить точное решение системы (1), в котором распределение температуры зависит только от поперечной координаты ($T_0 = T_0(z)$) и порождает периодическое плоскопараллельное течение с отличной от нуля продольной компонентой скорости $\boldsymbol{v}_0(v_0(z,t), 0, 0)$. Это решение удовлетворяет граничным условиям

$$z = \pm 1: \qquad v_0 = 0, \quad T_0 = \mp 1, \tag{2}$$

а также условию замкнутости потока

$$\int_{-1}^{1} v_0\,dz = 0. \tag{3}$$

Из (1)–(3) можно найти распределения скорости и температуры в основном состоянии:

$$v_0 = (\mathrm{Gr}/6)(z^3 - z)\cos\alpha_0 + \mathrm{Gr}_v\,V_0(\omega, z, t) = \mathrm{Gr}\,f_1(z)\cos\alpha_0 + \mathrm{Gr}_v\,f_2(\omega, z), \quad T_0 = -z. \tag{4}$$

Таким образом, в слое возникает комбинированное течение со скоростью v_0, имеющее две составляющие. Первая (термогравитационная) составляющая течения с кубическим профилем скорости устанавливается в слое даже в отсутствие вибраций. Интенсивность такого течения зависит от угла наклона слоя: она максимальна при вертикальной ориентации слоя ($\alpha_0 = 0$) и равна нулю при $\alpha_0 = 90°$. Профиль скорости второй (термовибрационной) составляющей течения зависит от частоты и амплитуды вибраций [6]:

$$\begin{gathered} V_0 = V_c(z,\omega)\cos(\omega t) + V_s(z,\omega)\sin(\omega t), \\ V_c = \frac{1}{\omega}\Big(z + \frac{\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta - \mathrm{ch}\,\beta\cos\alpha}{\cos 2æ - \mathrm{ch}\,2æ}\Big), \quad V_s = \frac{1}{\omega}\,\frac{\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta - \mathrm{sh}\,\beta\sin\alpha}{\cos 2æ - \mathrm{ch}\,2æ}, \\ \alpha = æ(1+z), \quad \beta = æ(1-z), \quad æ = \sqrt{\omega/2}. \end{gathered} \tag{5}$$

Рассмотрим малые плоские возмущения основного состояния (5) $\boldsymbol{v}'(v_x', 0, v_z')$ ($v_x' = v_x'(x,z,t)$, $v_z' = v_z'(x,z,t)$), $T'(x,z,t)$ и $p'(x,z,t)$. Подставляя возмущенные поля в исходную систему (1) и проводя линеаризацию около основного состояния, получим систему уравнений для возмущений. Введем функцию тока Ψ' для возмущений скорости

$$v_x' = -\frac{\partial\Psi'}{\partial z}, \qquad v_z' = \frac{\partial\Psi'}{\partial x} \tag{6}$$

и рассмотрим возмущения типа “нормальных” мод:

$$\Psi'(x,z,t) = \varphi(z,t)\exp(ikx), \qquad T'(x,z,t) = \theta(z,t)\exp(ikx). \tag{7}$$

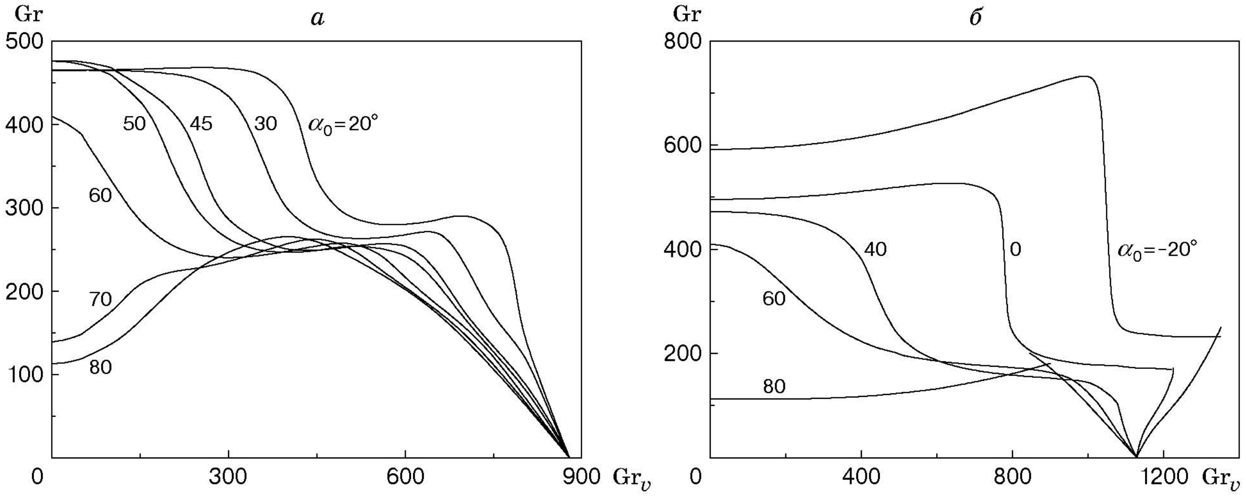
Здесь φ, θ — амплитуды; k — волновое число, характеризующее пространственную периодичность возмущений. Подставляя (6), (7) в уравнения возмущений и исключая давление обычным способом, получим систему амплитудных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t} + ik\hat{H}(v_0)\varphi = \Delta^2\varphi + \mathrm{Gr}(ik\theta\sin\alpha_0 - \theta'\cos\alpha_0) - \mathrm{Gr}_v\,\theta'\sin(\omega t), \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} - ik\varphi + ikv_0\theta = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\,\Delta\theta, \quad \Delta \equiv \frac{d^2}{dz^2} - k^2, \quad \hat{H}(v_0)\varphi \equiv v_0\Delta\varphi - \varphi v_0'', \\ z = \pm 1: \qquad \varphi = \varphi' = 0, \quad \theta = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по поперечной координате z.

Амплитудная задача (8) определяет поведение “нормальных” возмущений. В общем случае для нахождения границы устойчивости произвольных амплитуды и частоты вибраций используется теория Флоке [10], с помощью которой определяются условия существования периодических решений амплитудной задачи. Для аппроксимации возмущений функции тока и температуры используются наборы пространственных базисных функций с зависящими от времени коэффициентами:

$$\varphi = \sum_{m=0}^{M-1} a_m(t)\varphi_m, \qquad \theta = \sum_{m=0}^{M-1} b_m(t)\theta_m, \tag{9}$$



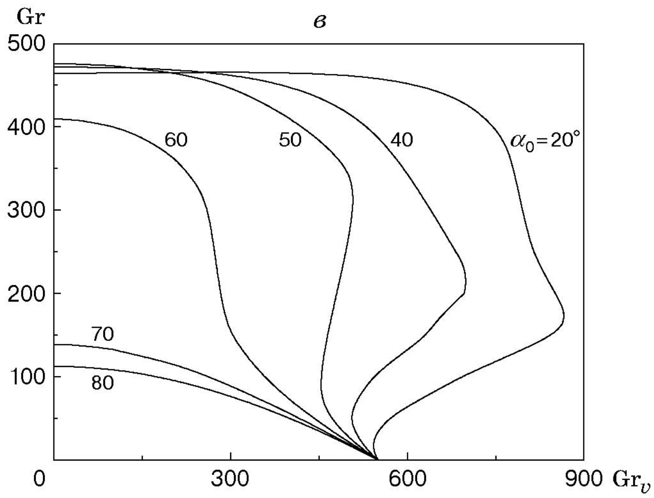


Рис. 1. Зависимость критического числа Грасгофа Gr от Gr_v при различных углах наклона слоя и значениях частоты:
а — $\omega = 2\pi$; *б* — $\omega = 4\pi$; *в* — $\omega = 6\pi$

где M — число базисных функций. В качестве базисных функций φ_m и θ_m использовались собственные функции задачи о затухающих возмущениях в неподвижном слое [8]. Подставляя разложения (9) в систему (8) и проводя ортогонализацию по методу Галеркина, получим набор обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $a_m(t)$, $b_m(t)$, который интегрируется методом Рунге — Кутты. При произвольных значениях параметров решение задачи о возмущениях может нарастать либо затухать. Границе устойчивости соответствуют периодические возмущения: субгармонические с периодом, в два раза превышающим период внешнего воздействия, либо синхронные, период которых совпадает с периодом вибраций.

Все расчеты проведены при числе Прандтля $\mathrm{Pr} = 1$, при котором термогравитационное течение в статическом поле силы тяжести неустойчиво по отношению к монотонной гидродинамической моде. Следовательно, без вибраций на границе устойчивости возмущения стационарны — отсутствует характерная частота нейтральных колебаний ω_0. Это приводит к тому, что при переменном внешнем воздействии с частотой ω не возникают квазипериодические (двухчастотные) возмущения. Для большинства найденных решений использовались 16 базисных функций ($M = 8$). В проверочных расчетах, проведенных с 20 базисными функциями ($M = 10$), пороги конвекции изменялись менее чем на 1 %.

Границы устойчивости на плоскости $(\mathrm{Gr}_v, \mathrm{Gr})$ в зависимости от угла наклона слоя α_0 при различных значениях частоты модуляции представлены на рис. 1. Области устойчивости ограничены кривыми $\mathrm{Gr} = f(\mathrm{Gr}_v)$ и осями координат. Отметим, что, как и в случае горизонтального слоя [7], в исследованной области параметров обнаружены только возмущения синхронного отклика. В зависимости от угла наклона слоя, а также от амплитуды и частоты вибраций взаимовлияние вибрационного и термогравитационного механизмов неустойчивости может приводить к стабилизации или дестабилизации основного состояния. Предельный случай $\mathrm{Gr} \to 0$ соответствует влиянию слабого термогравитационного течения на развитое вибрационное. Это влияние неоднозначно: при углах наклона слоя к вертикали, превышающих некоторое критическое значение $\alpha_*(\omega)$, порог вибрационной конвекции с ростом числа Грасгофа Gr понижается, а в случае $\alpha_0 < \alpha_{0*}(\omega)$ устойчивость вибрационного течения повышается. Предел $\mathrm{Gr}_v \to 0$ соответствует влиянию слабых вибраций на развитое термогравитационное течение. В зависимости от углов наклона слоя и частоты возможно подавление неустойчивости, например при $\alpha_0 = 70,\ 80^\circ$, $\omega = 2\pi$ (рис. 1,*а*), либо понижение порогов появления нарастающих возмущений.

В диапазоне $90^\circ < \alpha_0 < 50^\circ$ в случае сильных вибраций ($\mathrm{Gr}_v > \mathrm{Gr}_{v*}(\omega)$) положение границы устойчивости слабо меняется. Это происходит, когда интенсивность термогравитационной части основного течения значительно меньше интенсивности термовибрационной составляющей. Например, при $\omega = 2\pi$ (рис. 1,*а*) пороговое число Грасгофа $\mathrm{Gr}_{v*} \approx 250$. Рост частоты вибраций приводит к вытеснению области термовибрационного течения к границам слоя, что сужает диапазон амплитуд вибрации, при которых термогравитационное течение слабо влияет на термовибрационную составляющую. В пределе высоких частот вибрации имеет место взаимовлияние механизмов неустойчивости термогравитационного течения и стратифицированной жидкости в высокочастотном вибрационном поле.

При $\omega = 4\pi$ (рис. 1,*б*) граница устойчивости при некоторых углах наклона ($\alpha_0 = 80,\ 0,\ -20^\circ$) состоит из двух частей, в окрестности пересечения которых конкурируют возмущения с разными пространственными периодами. При достаточно высоких частотах ($\omega = 6\pi$) граница устойчивости $\mathrm{Gr}(\mathrm{Gr}_v)$ может иметь участок неоднозначности при $\alpha_0 = 20 \div 50^\circ$ (рис. 1,*в*), что связано с подавлением вибрационной неустойчивости достаточно сильным термогравитационным течением.

2. Пространственные возмущения. Рассматривая устойчивость термовибрационного течения в поле вибраций конечной частоты по отношению к пространственным возмущениям, необходимо использовать преобразования Сквайра, которые позволяют свести задачу об устойчивости плоскопараллельных течений по отношению к пространственным возмущениям к задаче о плоских возмущениях [8]. При известных пороговых характеристиках неустойчивости течений по отношению к плоским возмущениям формулы перехода позволяют пересчитать критические значения конвективной неустойчивости для пространственных мод и изучить конкуренцию различных типов возмущений.

Рассмотрим амплитудную задачу, характеризующую поведение нормальных пространственных возмущений в случае комбинированного термовибрационного и термогравитационного течения (4). Предполагается, что все возмущения периодически меняются в плоскости слоя (x, y), а скорость имеет три компоненты:

$$(v_x, v_y, v_z, T, p) \sim \exp(ik_x x + ik_y y).$$

Здесь k_x, k_y — компоненты волнового вектора. Амплитудные уравнения для пространственных возмущений, записанные в терминах скорости, и граничные условия к ним имеют вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + ik_x(\mathrm{Gr}\, f_1 \cos\alpha_0 + \mathrm{Gr}_v\, f_2(\omega))v_x + (\mathrm{Gr}\, f_1' \cos\alpha_0 + \mathrm{Gr}_v\, f_2'(\omega))v_z =$$
$$= -ik_x p + v_x'' - k^2 v_x + \mathrm{Gr}\,\theta\cos\alpha_0 + \mathrm{Gr}_v\,\theta\sin(\omega t),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + ik_x(\mathrm{Gr}\, f_1 \cos\alpha_0 + \mathrm{Gr}_v\, f_2(\omega))v_y = -ik_y p + v_y'' - k^2 v_y,$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial v_z}{\partial t} + ik_x(\mathrm{Gr}\, f_1 \cos\alpha_0 + \mathrm{Gr}_v\, f_2(\omega))v_z = -p' + v_z'' - k^2 v_z + \mathrm{Gr}\,\theta \sin\alpha_0, \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} - v_z + ik_x(\mathrm{Gr}\, f_1 \cos\alpha_0 + \mathrm{Gr}_v\, f_2(\omega))\theta = \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\theta'' - k^2\theta), \\
ik_x v_x + ik_y v_y + v_z' = 0, \qquad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \\
z = \pm 1: \qquad v_x = v_y = v_z = 0, \quad \theta = 0.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Краевая задача для плоских возмущений

$$(\bar v_x, \bar v_z, \bar T, \bar p) \sim \exp(i\bar k x)$$

может быть получена из (10), если положить $v_y = 0$, $k_y = 0$ (все неизвестные функции и параметры, соответствующие плоской задаче, будем отмечать чертой сверху).

Перепишем амплитудную задачу (10) для плоских возмущений в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \bar v_x}{\partial t} + i\bar k(\bar{\mathrm{Gr}} f_1 \cos\bar\alpha_0 + \bar{\mathrm{Gr}}_v f_2(\bar\omega))\bar v_x + (\bar{\mathrm{Gr}} f_1' \cos\bar\alpha_0 + \bar{\mathrm{Gr}}_v f_2'(\bar\omega))\bar v_z = \\
= -i\bar k\bar p + \bar v_x'' - \bar k^2 \bar v_x + \bar{\mathrm{Gr}}\bar\theta\cos\bar\alpha_0 + \bar{\mathrm{Gr}}_v\bar\theta\sin(\bar\omega t), \\
\frac{\partial \bar v_z}{\partial t} + i\bar k(\bar{\mathrm{Gr}} f_1 \cos\bar\alpha_0 + \bar{\mathrm{Gr}}_v f_2(\bar\omega))\bar v_z = -\bar p' + \bar v_z'' - \bar k^2 \bar v_z + \bar{\mathrm{Gr}}\bar\theta\sin\bar\alpha_0, \\
\frac{\partial \bar\theta}{\partial t} - \bar v_z + i\bar k(\bar{\mathrm{Gr}} f_1 \cos\bar\alpha_0 + \bar{\mathrm{Gr}}_v f_2(\bar\omega))\bar\theta = \frac{1}{\bar{\mathrm{Pr}}}(\bar\theta'' - \bar k^2\bar\theta), \qquad i\bar k_x \bar v_x + \bar v_z' = 0, \\
z = \pm 1: \qquad \bar v_x = \bar v_z = 0, \quad \bar\theta = 0.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Трехмерная задача (10) может быть сведена к двумерной (11) с помощью следующих преобразований:

$$
\begin{gathered}
v_z = \bar v_z, \quad k_x v_x + k_y v_y = \bar k \bar v_x, \quad p = \bar p, \quad \theta = \bar\theta, \quad \omega = \bar\omega, \\
\mathrm{Pr} = \bar{\mathrm{Pr}}, \quad k^2 = \bar k^2, \quad k_x\,\mathrm{Gr}_v = \bar k \bar{\mathrm{Gr}}_v, \quad k_x\,\mathrm{Gr}\cos\alpha_0 = \bar k\bar{\mathrm{Gr}}\cos\bar\alpha_0, \\
\mathrm{Gr}\sin\alpha_0 = \bar{\mathrm{Gr}}\sin\bar\alpha_0.
\end{gathered}
$$

Таким образом, при переходе к трехмерным возмущениям вибрационное и тепловое числа Грасгофа, частота модуляции, волновое число и угол наклона преобразуются по следующим формулам:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Gr}_v = \bar{\mathrm{Gr}}_v / a, \qquad \mathrm{Gr} = \bar{\mathrm{Gr}}\sqrt{\sin^2\bar\alpha_0 + \cos^2\bar\alpha_0 / a}, \\
\omega = \bar\omega, \quad k \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \bar k, \quad \operatorname{tg}\alpha_0 = a\operatorname{tg}\bar\alpha_0.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Параметр a характеризует пространственные возмущения:

$$a = k_x / \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k_x / \bar k.$$

В случае вертикальной ориентации слоя ($\alpha_0 = 0$) из (12) следует

$$\bar\alpha_0 = 0, \quad \mathrm{Gr} = \bar{\mathrm{Gr}}/a, \quad \mathrm{Gr}_v = \bar{\mathrm{Gr}}_v / a.$$

Поскольку параметр a меняется в интервале $(0, 1)$, то, как и в высокочастотном пределе [1], $\mathrm{Gr} > \bar{\mathrm{Gr}}$, $\mathrm{Gr}_v > \bar{\mathrm{Gr}}_v$, т. е. плоские возмущения более опасны, чем пространственные.

В случае горизонтальной ориентации слоя ($\alpha_0 = \pm 90^\circ$) основное течение имеет только термовибрационную составляющую и из (12) следует

$$\bar\alpha_0 = \pm 90^\circ, \quad \mathrm{Gr} = \bar{\mathrm{Gr}}, \quad \mathrm{Gr}_v = \bar{\mathrm{Gr}}_v / a.$$

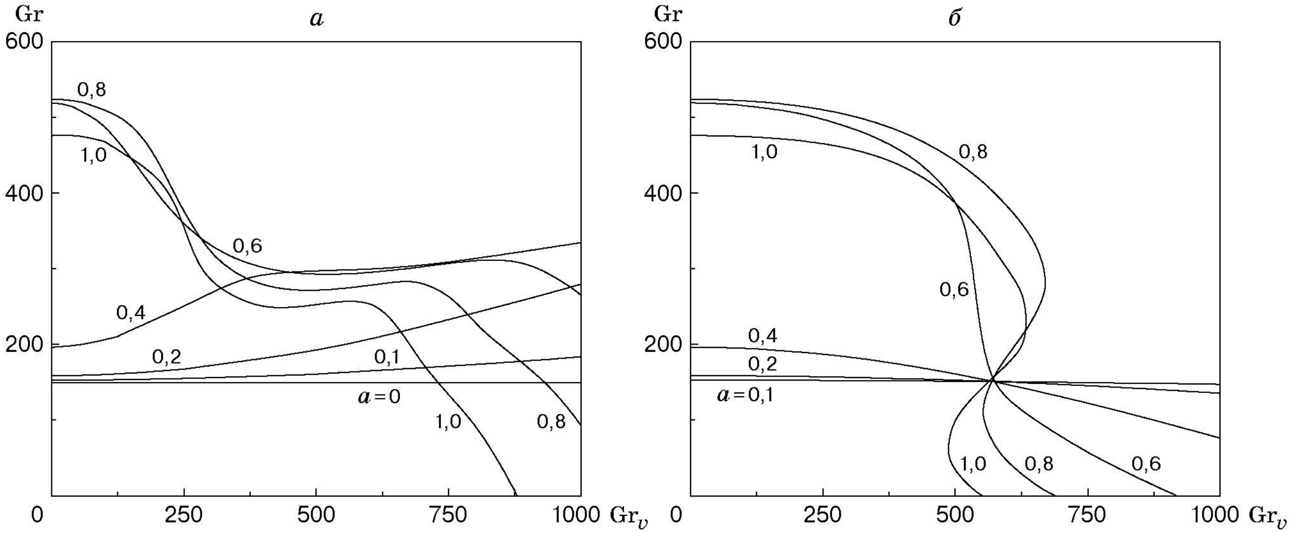


Рис. 2. Границы устойчивости при $\alpha_0 = 45°$:
а — $\omega = 2\pi$; *б* — $\omega = 6\pi$

Таким образом, в случае, когда вибрации дестабилизируют равновесие, граница устойчивости течения по отношению к трехмерным возмущениям заведомо лежит в области, где двумерные возмущения неустойчивы, причем в точке $\mathrm{Gr}_v = 0$ имеется вырождение. При этом плоские и трехмерные возмущения одинаково опасны. Если вибрации стабилизируют равновесие жидкости по отношению к плоским возмущениям, то возможна конкуренция плоских и пространственных мод.

На рис. 2 представлены границы устойчивости течения по отношению к пространственным возмущениям при различных значениях параметра a и $\alpha_0 = 45°$, $\omega = 2\pi$, 6π. Из рис. 2 следует, что при малых амплитудах вибрации ($\mathrm{Gr}_v \to 0$) уменьшение параметра a начиная с некоторого значения приводит к понижению порогов устойчивости Gr; наиболее опасными являются спиральные возмущения ($a = 0$, граница неустойчивости превращается в прямую, параллельную оси Gr_v). При малой интенсивности термогравитационного течения ($\mathrm{Gr} \to 0$) уменьшение параметра a приводит к росту критической амплитуды вибрации Gr_v, соответствующей порогу устойчивости, следовательно, наиболее опасны плоские возмущения ($a = 1$).

Сценарий эволюции границы устойчивости при переходе от плоских возмущений ($a = 1$) к спиральным ($a = 0$) зависит от частоты. При частоте $\omega = 2\pi$ (рис. 2,*а*) зависимость $\mathrm{Gr} = f(\mathrm{Gr}_v)$ для плоских возмущений имеет локальный максимум в области $\mathrm{Gr}_v \approx 600$. С уменьшением параметра a этот максимум сдвигается в область бо́льших значений Gr_v, а затем становится абсолютным и вытесняется на бесконечность. Для частоты $\omega = 6\pi$ (рис. 2,*б*) зависимость $\mathrm{Gr} = f(\mathrm{Gr}_v)$ при любых значениях a имеет только один максимум при $\mathrm{Gr}_v = 0$. При $a = 0{,}2$; $0{,}4$ зависимости $\mathrm{Gr} = f(\mathrm{Gr}_v)$ параболические; вибрации дестабилизируют равновесие относительно этих пространственных мод.

Граница устойчивости для спиральных возмущений ($a = 0$) может быть определена из (10) при $k_x = 0$:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = v_x'' - k_y^2 v_x + \mathrm{Gr}\,\theta\cos\alpha_0 + \mathrm{Gr}_v\,\theta\sin(\omega t),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = -ik_y p + v_y'' - k_y^2 v_y, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -p' + v_z'' - k_y^2 v_z + \mathrm{Gr}\,\theta\sin\alpha_0,$$

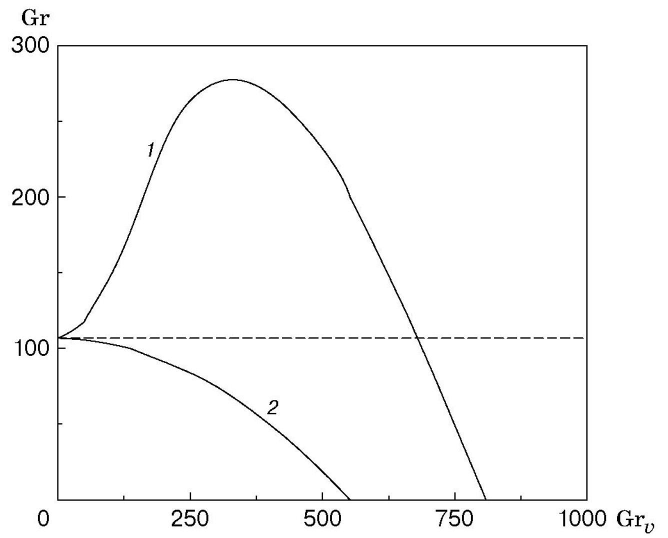


Рис. 3. Границы устойчивости для горизонтального слоя ($\alpha_0 = 90°$):
1 — $\omega = \pi$; *2* — $\omega = 8\pi$; штриховая линия — граница устойчивости по отношению к спиральной моде Gr_{sp}

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - v_z = \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\theta'' - k_y^2\theta), \quad ik_yv_y + v_z' = 0, \tag{13}$$

$$z = \pm 1: \qquad v_x = v_y = v_z = 0, \quad \theta = 0.$$

Критическое число Грасгофа для спиральных возмущений Gr_{sp} не зависит от амплитуды и частоты вибрации. Эти параметры влияют лишь на интенсивность скорости возмущенного движения вдоль конвективных валов. Анализ уравнений (13) показывает, что Gr_{sp} соответствует случаю термогравитационного течения в отсутствие вибраций: $\mathrm{Gr} = 106{,}7/(\mathrm{Pr}\sin\alpha_0)$ [8]. Область абсолютной устойчивости комбинированного термогравитационного и термовибрационного течения (рис. 2) находится между осями координат, горизонтальной границей для спиральных возмущений ($a = 0$) и правой границей для плоских возмущений ($a = 1$).

В случае горизонтальной ориентации слоя ($\alpha_0 = 90°$) границы устойчивости течения по отношению к спиральным и плоским возмущениям приведены на рис. 3. Кривые *1, 2* — результаты работы [7]. Из рис. 3 следует, что при частоте $\omega = 8\pi$ порог устойчивости полностью определяется поведением плоских возмущений. В случае частоты вибраций $\omega = \pi$ в интервале вибрационных чисел Грасгофа $0 < \mathrm{Gr}_v < 683{,}8$ граница неустойчивости ($\mathrm{Gr} = 106{,}7$) обусловлена спиральными возмущениями; при больших амплитудах вибрации ($\mathrm{Gr}_v > 683{,}8$) на линии $\mathrm{Gr} = f(\mathrm{Gr}_v)$ нарастают плоские возмущения.

Заключение. С использованием теории Флоке рассмотрена проблема неустойчивости течения однородной жидкости в наклонном слое под действием силы тяжести и продольных вибраций конечной частоты. В случае плоских возмущений в зависимости от характеристик параметрического воздействия возможны как дестабилизация основного состояния, так и его стабилизация. В исследованном диапазоне углов наклона слоя, амплитуд и частот вибрации неустойчивость течения вызывают синхронные возмущения. Для случая периодического термовибрационного течения получены преобразования, связывающие характеристики плоских и пространственных возмущений. Показано, что в общем случае устойчивость основного течения могут нарушать либо спиральные, либо плоские возмущения. Критические характеристики спиральных возмущений не зависят от амплитуды и частоты вибраций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gershuni G. Z., Lyubimov D. V.** Thermal vibrational convection. L.: Jonh Wiley and Sons, 1998.
2. **Зеньковская С. М., Симоненко И. Б.** О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 5. С. 51–55.
3. **Космическое** материаловедение. Введение в научные основы космической технологии / Под ред. Б. Фоербахера и др. М.: Мир, 1989.
4. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
5. **Ahlers G., Hohenberg P. C., Lücke M.** Thermal convection under modulation of the driving force. 1. The Lorenz model // Phys. Rev. A. 1985. V. 32. P. 3493–3518.
6. **Гершуни Г. З., Келлер И. О., Смородин Б. Л.** О вибрационно-конвективной неустойчивости в невесомости: Конечные частоты // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 2. С. 194–196.
7. **Гершуни Г. З., Келлер И. О., Смородин Б. Л.** О вибрационно-конвективной неустойчивости плоского горизонтального слоя жидкости при конечных частотах вибрации // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 5. С. 44–51.
8. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А.** Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
9. **Шарифулин А. Н.** Устойчивость конвективного движения в вертикальном слое при наличии продольных вибраций // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1983. № 2. С. 186–188.
10. **Coddington E. A., Levinson N.** Theory of ordinary differential equations. N. Y.: McGraw-Hill, 1955.

Поступила в редакцию 15/VII 2002 г.,
в окончательном варианте — 13/VIII 2002 г.