УДК 681.5

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ТРЕБУЕМЫМИ ПРЯМЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ КАЧЕСТВА НА БАЗЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛАПЛАСА

С. В. Ефимов, В. В. Курганкин, С. В. Замятин

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
634050, г. Томск, просп. Ленина, 30
E-mail: efimov@tpu.ru

Предложен подход к проектированию передаточных функций с заданными прямыми показателями качества переходных процессов: перерегулированием и временем регулирования. Разработана методика проектирования таких функций. Приведён числовой пример.

Ключевые слова: система автоматического управления, корневые показатели качества, переходный процесс.

Введение. В настоящее время одной из актуальных задач синтеза по-прежнему остаётся проектирование систем управления, о чём свидетельствуют публикации [1–7]. Предлагаемая работа направлена на решение задачи проектирования передаточных функций (ПФ) с требуемой динамикой, желаемыми прямыми показателями качества переходного процесса. Существуют различные подходы к решению этой задачи: алгебраические, частотные, корневые. В классе корневых подходов актуальность решения такой задачи объясняется слабой аналитической связью между косвенными корневыми (запас устойчивости, колебательность) и прямыми (перерегулирование, время регулирования) показателями качества [4]. Это, несомненно, приводит как к ошибочным, так и результатам с большой погрешностью [3, 6]. В этой связи возникает интерес к разработке подхода, позволяющего вычислять ПФ, гарантирующие требуемые прямые показатели качества переходного процесса.

Постановка задачи. Пусть задана ПФ в следующем виде:

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}, \tag{1}$$

где $B(s)$ и $A(s)$ — полиномы числителя и знаменателя ПФ; m и n — порядки полиномов числителя и знаменателя соответственно, $m < n$. Передаточная функция не содержит кратных полюсов.

Пусть переходный процесс (реакция ПФ (1) на единичное ступенчатое воздействие) устойчивый и прямые показатели качества переходного процесса (перерегулирование и время регулирования) имеют значения σ и $t_{\text{р}}$ соответственно.

Ставится задача обеспечить требуемые прямые показатели качества переходного процесса: перерегулирование $\sigma^{\text{тр}}$ путём корректирования доминирующих составляющих переходной функции и время регулирования $t_{\text{р}}^{\text{тр}}$ заменой аргумента ПФ.

Переход от изображения к оригиналу. Подходы к решению поставленной задачи могут быть различными. В данной работе использовался подход, основанный на преобразованиях Лапласа, связывающих нули и полюсы ПФ с составляющими переходной функции.

Переходный процесс, представленный функцией $h(t)$, можно рассматривать как сумму её составляющих, используя формулу Хевисайда [3]

$$h(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{B(s_k)\mathrm{e}^{s_k t}}{s_k \prod\limits_{i=1,\, i\neq k}^{n} (s_k - s_i)} = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{B(s_k)}{s_k A'(s_k)}\,\mathrm{e}^{s_k t}. \qquad (2)$$

В (2) константа $B(0)/A(0)$ содержит в себе действительную часть слагаемых, определяемых значениями всех полюсов ПФ, что не позволяет оценить влияние каждого из них на переходный процесс по отдельности.

Для оценки составляющих переходной функции запишем $W(s)$ как сумму простых дробей:

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{s - s_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{-s_i((-1/s_i)s + 1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{(-1/s_i)s + 1}, \qquad (3)$$

где C_i и s_i в общем виде представлены комплексными числами: $C_i = x_i + y_i j$, $s_i = \delta_i + \omega_i j$, $j = \sqrt{-1}$; $D_i = -C_i/s_i$; x_i, y_i, δ_i и ω_i — действительные числа. Учитывая (3), $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{W_i(s)}{s} \xrightarrow{L^{-1}} \sum\limits_{i=1}^{n} h_i(t)$, где $W_i(s) = \frac{D_i}{(-1/s_i)s+1}$, а $h_i(t)$ — составляющая переходной функции, определяемая i-м полюсом ПФ. Отсюда следует выражение для составляющей переходной функции

$$h_i(t) = |D_i|(\cos(\arg(D_i)) - \mathrm{e}^{\delta_i t} \cdot \cos(\omega_i t + \arg(D_i))). \qquad (4)$$

Доминирование полюсов. Разложение переходного процесса на составляющие даёт возможность проводить анализ влияния тех или иных полюсов системы на форму переходного процесса, а значит, и на прямые показатели качества. Выявление доминирующих полюсов, определяющих характеристики переходного процесса, и корректировка их расположения позволяют изменить и прямые показатели качества.

В работе [4] описаны различные подходы к определению доминирующих полюсов. В классической теории автоматического управления доминирующими полюсами принято считать полюсы, наиболее близко расположенные к мнимой оси на корневой плоскости. В большинстве случаев это действительно так, но не всегда, иногда возможна компенсация полюсов нулями [4]. Для более точного определения доминирующих полюсов существует подход, основанный на применении критерия ε-доминирования [7]. Однако для вычисления доминирующих полюсов воспользуемся полученными составляющими $h_i(t)$ переходной функции из (4).

Необходимым и достаточным условием доминирования составляющей переходной функции, определяемой действительным полюсом s_i, является выполнение условия

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |h_k(t_i)| \Big/ |h_i(t_i)| < 1, \qquad (5)$$

где t_i — время, требуемое составляющей переходной функции, чтобы приблизиться к своему установившемуся значению; $\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |h_k(t_i)|$ — сумма модулей составляющих переходной функции, не содержащая в себе $h_i(t_i)$; $h_i(t_i)$ — проверяемая на доминирование составляющая переходной функции, а условием для доминирования составляющей переходной функции, определяемой комплексно-сопряжённой парой полюсов $s_{i,\,i+1} = \delta_i \pm \omega_i j$, будет выражение

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,\,i+1}}^{n} |h_k(t_i)|\Big/2|h_i(t_i)| < 1. \tag{6}$$

Корректирование доминирующих составляющих переходной функции для обеспечения требуемого перерегулирования. Представим переходную функцию как сумму доминирующих и оставшихся составляющих соответственно:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{d} h_i(t) + \sum_{k=d+1}^{n} h_k(t), \tag{7}$$

d — число доминирующих полюсов ПФ, выявленных при помощи неравенств (5) и (6).

Пусть амплитуда переходного процесса достигает максимума, определяющего перерегулирование, в момент времени t_m. Необходимо, чтобы при $t = t_m$ выполнялось равенство

$$h(t_m) = \frac{b_0}{a_0} + \frac{\sigma^{\text{тр}}}{100}. \tag{8}$$

Так как достижение требуемого значения перерегулирования $\sigma^{\text{тр}}$ осуществляется за счёт изменения расположения доминирующих полюсов, то для (7) с учётом (8) справедливо

$$h(t_m) = \sum_{i=1}^{d} h_i^{\text{тр}}(t_m) + \sum_{k=d+1}^{n} h_k(t_m) = \frac{b_0}{a_0} + \frac{\sigma^{\text{тр}}}{100}, \tag{9}$$

где $\sum\limits_{i=1}^{d} h_i^{\text{тр}}(t_m)$ — сумма составляющих переходной функции при $t = t_m$, определяемая корректированными значениями доминирующих полюсов. Пусть доминирующими полюсами ПФ рассматриваемой системы является пара комплексно-сопряжённых полюсов $s_{i,\,i+1} = \delta_i \pm \omega_i j$. Следовательно, необходимо вычислить их новые значения $s_{i,\,i+1}^{\text{тр}} = \delta_i^{\text{тр}} \pm \omega_i^{\text{тр}} j$, что приведёт к перерегулированию переходного процесса, которое будет иметь значение $\sigma^{\text{тр}}$.

Согласно (4) сумма составляющих переходной функции, определяемая доминирующими комплексно-сопряжёнными полюсами, при $t = t_m$ примет вид

$$\sum_{i=1}^{d} h_i^{\text{тр}}(t_m) = 2|D_i|(\cos(\arg(D_i)) - \mathrm{e}^{\delta_i^{\text{тр}} t_m} \cdot \cos(\omega_i^{\text{тр}} t_m + \arg(D_i))). \tag{10}$$

На основании (9) и (10) запишем равенство

$$2|D_i|(\cos(\arg(D_i)) - \mathrm{e}^{\delta_i^{\text{тр}} t_m} \cdot \cos(\omega_i^{\text{тр}} t_m + \arg(D_i))) = \frac{b_0}{a_0} + \frac{\sigma^{\text{тр}}}{100} - \sum_{k=d+1}^{n} h_k(t_m). \tag{11}$$

Из (11) следует

$$e^{\delta_i^{\text{тр}} t_m} \cdot \cos(\omega_i^{\text{тр}} t_m + \arg(D_i)) = F, \tag{12}$$

где

$$F = \frac{2|D_i|\cos(\arg(D_i)) - (b_0/a_0) - (\sigma^{\text{тр}}/100) + \sum\limits_{k=d+1}^{n} h_k(t_m)}{2|D_i|}.$$

Очевидно, что (12) имеет множество решений. Вычисление новых значений доминирующих полюсов будем осуществлять изменением либо действительной, либо мнимой части искомых доминирующих полюсов: $s_{i,i+1}^{\text{тр}} = \delta_i^{\text{тр}} \pm \omega_i j$ или $s_{i,i+1}^{\text{тр}} = \delta_i \pm \omega_i^{\text{тр}} j$. Тогда на основании (12) получим выражения для вычисления действительной и мнимой части доминирующих полюсов:

$$\delta_i^{\text{тр}} = \ln\left(\frac{F}{\cos(\omega_i t_m + \arg(D_i))}\right)\Big/ t_m, \tag{13}$$

$$\omega_i^{\text{тр}} = \frac{\arccos(F/e^{\delta_i t_m}) - \arg(D_i)}{t_m}. \tag{14}$$

Следует отметить, что предлагаемый алгоритм корректирования доминирующих составляющих переходной функции может быть применён и к другим её составляющим для обеспечения требуемых значений прямых показателей качества как для времени t_m, так и для других значений времени переходного процесса.

Обеспечение требуемого времени регулирования. Для обеспечения требуемого времени регулирования переходного процесса обратимся к свойствам преобразований Лапласа. В частности, рассмотрим теорему подобия (изменение масштаба независимого переменного)

$$f(\alpha t) \xrightarrow{L} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right). \tag{15}$$

Согласно (15) для изменения времени регулирования переходного процесса системы в α раз необходимо, чтобы

$$h(\alpha t) \xrightarrow{L} \frac{1}{\alpha} \frac{W(s/\alpha)\alpha}{s} = \frac{W(s/\alpha)}{s}. \tag{16}$$

Методика проектирования передаточной функции.

1. Вычислить полюсы и определить прямые показатели качества системы, используя ПФ (1).
2. На основании (5) и (6) выявить доминирующие полюсы.
3. Представить ПФ (1) в виде суммы дробей (3) и вычислить D_i.
4. Используя (13) или (14), получить скорректированные значения доминирующих полюсов. Вычислить ПФ с требуемым значением перерегулирования переходного процесса.
5. Согласно (16) рассчитать коэффициенты ПФ с требуемым временем регулирования.

Числовой пример. Пусть задана система с ПФ

$$W(s) = \frac{2{,}000 \cdot 10^{-1} s + 1}{2{,}941 \cdot 10^{-4} s^5 + 5{,}294 \cdot 10^{-3} s^4 + 4{,}000 \cdot 10^{-2} s^3 + 2{,}024 \cdot 10^{-1} s^2 + 4{,}765 \cdot 10^{-1} s + 1}. \quad (17)$$

Необходимо корректированием доминирующих составляющих переходной функции добиться требуемого значения перерегулирования $\sigma^{\text{тр}} = 10$ % и заменой аргумента ПФ обеспечить заданное время регулирования переходного процесса $t_{\text{р}}^{\text{тр}} = 1$ с.

1. Вычисление полюсов и определение прямых показателей качества переходного процесса. Передаточная функция (17) имеет полюсы $s_{1,2} = -1 \pm 3j = 3{,}162\mathrm{e}^{\pm 1{,}893j}$, $s_{3,4} = -3 \pm 5j = 5{,}831\mathrm{e}^{\pm 2{,}111j}$, $s_5 = -10 = 10\mathrm{e}^{3{,}142j}$ и прямые показатели качества переходного процесса $\sigma = 50$ %, $t_{\text{р}} = 3{,}422$ с и $t_m = 1{,}139$ с (см. рисунок).

2. Выявление доминирующих полюсов. Составляющие переходной функции $h_i(t)$ достигают установившихся значений для рассматриваемого примера при временах $t_{1,2} = 2{,}6$ с, $t_{3,4} = 1{,}02$ с и $t_5 = 0{,}27$ с.

Вычислим значения отношений составляющих ПФ:

$$\sum_{k=3}^{5} |h_k(t_{1,2})| \Big/ 2|h_1(t_{1,2})| = 0{,}294, \qquad \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 3,4}}^{5} |h_k(t_{3,4})| \Big/ 2|h_3(t_{3,4})| = 5{,}399,$$

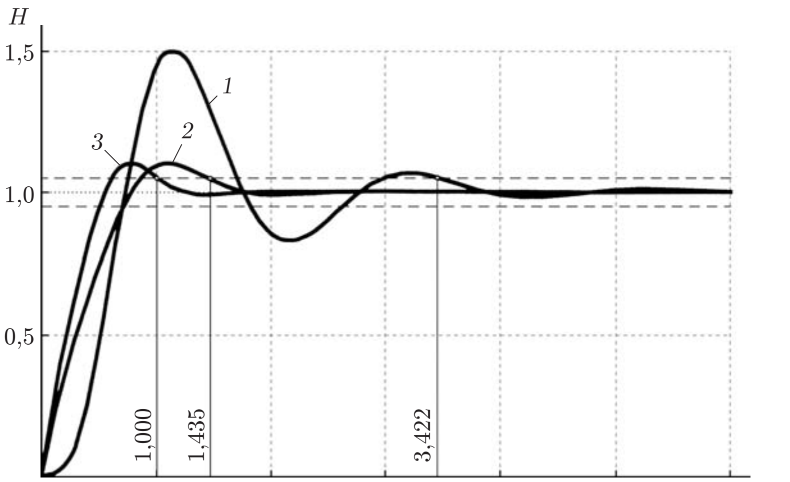
$$\sum_{k=1}^{4} |h_k(t_5)| \Big/ |h_5(t_5)| = 5{,}736.$$

С учётом (5) и (6) $s_{1,2}$ — доминирующие полюсы.

3. Разложение на дроби ПФ и вычисление D_i. Используя математические преобразования, представим ПФ (17) в виде суммы дробей согласно (3):

$$W(s) = \frac{0{,}810\mathrm{e}^{-0{,}540j}}{\dfrac{-1}{3{,}162\mathrm{e}^{1{,}893j}} s + 1} + \frac{0{,}810\mathrm{e}^{0{,}540j}}{\dfrac{-1}{3{,}162\mathrm{e}^{-1{,}893j}} s + 1} + \frac{0{,}313\mathrm{e}^{2{,}141j}}{\dfrac{-1}{5{,}831\mathrm{e}^{2{,}111j}} s + 1} + \frac{0{,}313\mathrm{e}^{-2{,}141j}}{\dfrac{-1}{5{,}831\mathrm{e}^{-2{,}111j}} s + 1} + \frac{0{,}051\mathrm{e}^{3{,}142j}}{\dfrac{-1}{10\mathrm{e}^{3{,}142j}} s + 1}.$$

Следовательно, $D_{1,2} = 0{,}810\mathrm{e}^{\mp 0{,}540j}$, $D_{3,4} = 0{,}313\mathrm{e}^{\pm 2{,}141j}$ и $D_5 = 0{,}0513\mathrm{e}^{3{,}142j}$.



Переходные процессы: кривая *1* — исходный, *2* — с перерегулированием $\sigma^{\text{тр}} = 10$ %, *3* — с перерегулированием $\sigma^{\text{тр}} = 10$ % и временем регулирования $t_{\text{р}}^{\text{тр}} = 1$ с

4. Получение скорректированных значений доминирующих полюсов. Воспользовавшись (13), скорректируем вещественную часть доминирующих полюсов:

$$F = \frac{2|0{,}810\mathrm{e}^{-0{,}540j}|\cos(\arg(0{,}810\mathrm{e}^{-0{,}540j})) - 1 - 0{,}1 - 0{,}389}{1{,}139} = -0{,}062,$$

$$\delta_i^{\text{тр}} = \frac{\ln\left(\dfrac{-0{,}062}{\cos(3\cdot 1{,}139 + \arg(0{,}810\mathrm{e}^{-0{,}540j}))}\right)}{1{,}139} = -2{,}411.$$

Таким образом, скорректированные доминирующие полюсы имеют значения $s_{1,2}^{\text{тр}} = -2{,}411 \pm 3j = 3{,}848\mathrm{e}^{\pm 2{,}248j}$, а ПФ примет вид

$$W(s) = \frac{0{,}810\mathrm{e}^{-0{,}540j}}{\dfrac{-1}{3{,}162\mathrm{e}^{1{,}893j}}s+1} + \frac{0{,}810\mathrm{e}^{0{,}540j}}{\dfrac{-1}{3{,}162\mathrm{e}^{-1{,}893j}}s+1} + \frac{0{,}313\mathrm{e}^{2{,}141j}}{\dfrac{-1}{5{,}831\mathrm{e}^{2{,}111j}}s+1} + \frac{0{,}313\mathrm{e}^{-2{,}141j}}{\dfrac{-1}{5{,}831\mathrm{e}^{-2{,}111j}}s+1} + \frac{0{,}051\mathrm{e}^{3{,}142j}}{\dfrac{-1}{10\mathrm{e}^{3{,}142j}}s+1},$$

или

$$W(s) = \frac{3{,}891\cdot 10^{-4}s^4 + 8{,}174\cdot 10^{-3}s^3 + 5{,}980\cdot 10^{-2}s^2 + 3{,}196\cdot 10^{-1}s + 1}{1{,}986\cdot 10^{-4}s^5 + 4{,}135\cdot 10^{-3}s^4 + 3{,}693\cdot 10^{-2}s^3 + 2{,}046\cdot 10^{-1}s^2 + 6{,}020\cdot 10^{-1}s + 1} \qquad (18)$$

с перерегулированием переходного процесса $\sigma^{\text{тр}} = 10\ \%$ (см. рисунок).

5. Корректирование времени регулирования переходного процесса. Время регулирования переходного процесса для ПФ (18) $t_{\text{р}} = 1{,}430$ с. Согласно (16) это означает, что для обеспечения времени регулирования 1 с в ПФ (18) необходимо аргумент s заменить величиной $s/1{,}430$. Тогда ПФ примет вид

$$W(s) = \frac{9{,}304\cdot 10^{-5}s^4 + 2{,}795\cdot 10^{-3}s^3 + 2{,}924\cdot 10^{-2}s^2 + 2{,}235\cdot 10^{-1}s + 1}{3{,}321\cdot 10^{-5}s^5 + 9{,}888\cdot 10^{-4}s^4 + 1{,}263\cdot 10^{-2}s^3 + 1{,}000\cdot 10^{-2}s^2 + 4{,}210\cdot 10^{-1}s + 1}$$

с временем регулирования переходного процесса $t_{\text{р}}^{\text{тр}} = 1$ с (см. рисунок).

Заключение. В данной работе представлен подход, позволяющий проектировать ПФ, обеспечивая требуемые прямые показатели качества переходного процесса: перерегулирование и время регулирования. В основе этого подхода лежат преобразования Лапласа. Предлагаемый подход опробован на числовом примере и в дальнейшем может быть использован в алгоритмах выбора типов регуляторов и настроек их параметров, гарантирующих прямые показатели качества переходных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Никитин А. В., Шишлаков В. Ф.** Параметрический синтез нелинейных систем автоматического управления: С.-Пб.: ГУАП, 2003. 358 с.
2. **Кривдина Л. Н.** Синтез цифровых регуляторов на основе линейных матричных неравенств: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук /Нижегородский гос. ун-т. 05.13.01. Н. Новгород, 2009. 19 с.
3. **Ефимов С. В., Пушкарев М. И.** Определение прямых показателей качества на основе расположения нулей и полюсов передаточной функции // Автометрия. 2011. **47**, № 3. С. 113–119.

4. **Ефимов С. В., Замятин С. В., Гайворонский С. А.** Задачи корневого анализа и синтеза систем автоматического управления // Изв. ТПУ. 2010. № 5. С. 16–20.

5. **Ефимов С. В., Замятин С. В., Пушкарев М. И.** Синтез параметров регулятора систем управления с интервально заданными параметрами, гарантирующими требуемые прямые показатели качества, с учётом нулей и полюсов // Системный анализ, управление и навигация: Сб. тез. докл. XVII Междунар. науч. конф. М.: МАИ-ПРИНТ, 2012. С. 81–83.

6. **Толочко О. И.** Конструирование передаточных функций по заданному перерегулированию с учетом характера затухания переходных процессов // Вестн. Нац. техн. ун-та «Харьковский политехнический университет»: Сб. науч. тр. Тем. вып. Харьков: НТУ ХПІ. 2003. **2**, № 10. С. 315–319.

7. **Филиппов Д. Н.** Критерии ε-доминирования составляющих переходных функций линейных систем автоматического управления /МАИ. М., 1989. 7 с. Деп. в ВИНИТИ 22.05.1989, № 4524.

Поступила в редакцию 10 октября 2013 г.