

**СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГОВЯЗКОЙ СРЕДЕ
С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ
ВЯЗКОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ ВЕЩЕСТВА**

С. К. Годунов, Н. С. Козин

(Новосибирск)

В данной работе исследована структура профиля ударной волны в упруговязкой среде с нелинейной зависимостью максвелловской вязкости χ (величины, обратной времени τ релаксации касательных напряжений) от параметров вещества на основе модели, предложенной в работе [1]. Наличие такой зависимости времени релаксации позволило выделить с помощью дополнительных соотношений участки с резким изменением величин на профиле, которые названы пластическими волнами. Используемая модель изотропной среды характеризуется уравнением состояния в виде зависимости плотности внутренней энергии E на единицу массы от инвариантов тензора деформаций и энтропии S .

1. Одномерная система уравнений. Для описания процессов пластической деформации в уравнения среды [1] включены упруговязкие члены Максвелла, которые описывают процесс релаксации во времени девиатора касательных напряжений.

Пластические деформации протекают с увеличением энтропии вещества. Характерное время τ процесса релаксации при этом может меняться в широких пределах в зависимости от состояния среды: ее температуры, степени сжатия, интенсивности касательных напряжений. К таким средам следует отнести конденсированные вещества: металлы, порошки, жидкости.

Как указано в [2], металл при нормальных условиях имеет характерное время τ порядка нескольких часов, в то время как при ударных нагружениях τ падает до 10^{-5} сек [3].

В связи с этим исследование структуры ударных волн в вязкоупругих средах с сильно меняющимся временем релаксации касательных напряжений представляет значительный интерес. При расчетах конкретных примеров была использована форма уравнений состояния, предложенная в [4], и интерполяционные формулы зависимости величины максвелловской вязкости от температуры, сжатия и интенсивности касательных напряжений, приведенные в [3].

Отметим, что в работах [5,6], посвященных ударным волнам в плексигласе, которые изучались экспериментально с помощью упругопластической схемы, пришлось учесть зависимость напряжения текучести от температуры.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую движение упруговязкой среды параллельно выбранной оси x в пространстве (x, y, z)

$$(1.1) \quad \partial \rho / \partial t + \partial \rho u / \partial x = 0$$

$$(1.2) \quad \partial \rho u / \partial t + \frac{\partial [\rho u^2 - \sigma_1]}{\partial x} = 0$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \rho (E + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho u (E + u^2/2) - \sigma_1 u]}{\partial x} = 0$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} + u \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\tau^{-1} \left(\beta - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)$$

Здесь x и t — пространственная координата и время, u — скорость движения вещества вдоль оси x , величины α , β и γ представляют собой логарифмы относительных удлинений k_1 , k_2 , k_3 вдоль осей x , y , z : $\alpha = \ln k_1$, $\beta = \ln k_2$, $\gamma = \ln k_3$.

Поскольку среда считается изотропной, то $\beta \equiv \gamma$ в течение всего процесса движения. Величина ρ — плотность, она связана с α , β и γ соотношением

$$(1.5) \quad \rho = \rho^0 e^{-(\alpha + \beta + \gamma)}$$

где ρ^0 — плотность вещества в начальном состоянии.

Плотность внутренней энергии вещества на единицу массы связана с плотностью энтропии S на единицу массы и величинами α , β и γ уравнением состояния для изотропной среды

$$(1.6) \quad E = E(\alpha, \beta, \gamma, S)$$

Здесь E — симметрическая функция от α , β , γ . Величина σ_1 является главным напряжением, направленным вдоль оси x . В силу изотропности среды можно предположить, что главные напряжения σ_2 и σ_3 направлены вдоль осей y и z . В этом случае напряжения σ_i связаны с деформациями формулами

$$(1.7) \quad \sigma_1 = \rho \frac{\partial E}{\partial \alpha}, \quad \sigma_2 = \rho \frac{\partial E}{\partial \beta}, \quad \sigma_3 = \rho \frac{\partial E}{\partial \gamma}$$

В силу изотропности $\sigma_2 \equiv \sigma_3$.

Время релаксации $\tau > 0$ является функцией состояния среды, т. е.

$$(1.8) \quad \tau = \tau(\alpha, \beta, \gamma, S)$$

Система уравнений (1.1) — (1.8) является одномерным вариантом приведенной к главным осям тензора напряжений системы уравнений, предложенной в [1]. Система (1.1) — (1.8) и система из [1] отличаются формой членов в правой части уравнения (1.4), описывающих процесс пластической деформации. Использование феноменологического подхода не дает преимуществ какому-либо из этих способов введения релаксационных членов.

Приведем уравнение для энтропии, являющееся следствием (1.1) — (1.7)

$$(1.9) \quad \rho E_S \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} \right) = \frac{2}{3} \frac{(\alpha - \beta)(\sigma_1 - \sigma_2)}{\tau}$$

а также формулы для скоростей звука: продольной

$$(1.10) \quad c = (\partial^2 E / \partial \alpha^2 - \partial E / \partial \alpha)^{1/2}$$

и поперечной

$$(1.11) \quad b = (1/2 \partial E / \partial D)^{1/2}$$

$$(1.12) \quad D = \frac{1}{2} \left[\left(\alpha - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)^2 + \left(\gamma - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)^2 \right]$$

2. Соотношения на ударных волнах. Будем называть ударной волной решение системы (1.1) — (1.9) вида

$$(2.1) \quad \alpha = \alpha(x - Ut), \quad \beta \equiv \gamma \equiv \beta(x - Ut), \quad S = S(x - Ut)$$

Пусть в выбранной системе координат ударная волна покоится, т. е. $U = 0$. Тогда (2.1) удовлетворяет системе

$$(2.2) \quad \begin{cases} d\rho u / dx = 0, & d(\rho u^2 - \sigma_1) / dx = 0 \\ \frac{d[\rho u (E + u^2/2) - \sigma_1 u]}{dx} = 0, & u \frac{d\beta}{dx} - \frac{\alpha - \beta}{3\tau} \end{cases}$$

На концах ударной волны (при $x \rightarrow \pm \infty$) величины α , β и S должны принимать конечные значения, а $d\alpha/dx$, $d\beta/dx$ и dS/dx обращаются в нуль. Из (2.2) следует, что на концах ударной волны $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3} \ln(\rho^\circ / \rho)$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$, т. е. среда должна находиться под действием гидростатического давления. Обозначив через w поток вещества через ударную волну

$$(2.3) \quad w = \rho u$$

получим, используя (2.2), что значения величины на концах ударной волны связаны соотношениями, аналогичными соотношениям газовой динамики

$$(2.4) \quad \begin{cases} [p] = w^2 [1/\rho], & [u] = -w [1/\rho] \\ [E] + \frac{p_0 + p_1}{2} [1/\rho] = 0 \\ \alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3} \ln(\rho^\circ / \rho) \end{cases}$$

Здесь p_0 и p_1 величины давления перед волной и за волной. Внутри волны, как это следует из (2.2) и (2.3), термодинамические величины и скорость связаны соотношениями

$$(2.5) \quad u - u_0 = w(1/\rho - 1/\rho_0)$$

$$(2.6) \quad \sigma_1 + p_0 = w^2(1/\rho - 1/\rho_0)$$

$$(2.7) \quad E - E_0 + [(p_0 - \sigma_1)/2](1/\rho - 1/\rho_0) = 0$$

$$(2.8) \quad w \frac{d\beta}{dx} = \frac{\rho}{3} \frac{\alpha - \beta}{\tau}$$

Здесь $\beta = \gamma$, u_0 , ρ_0 , p_0 , E_0 — величины скорости, плотности, давления и энергии перед волной. Задача построения профиля волны сводится к интегрированию системы (2.6) — (2.8) с дополнительным соотношением (2.5), а задача определения состояния за волной по скорости w и состоянию перед волной ρ_0 , S_0 — к решению системы соотношений (2.4). Задача об определении состояния за волной решается в полной аналогии с газовой динамикой: если уравнение состояния (1.6) при $\alpha = \beta = \gamma$ удовлетворяет неравенствам

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \partial^2 E / \partial \rho^2 > 0, & \quad \partial^2 E / \partial \rho \partial S > 0, & \quad \partial^2 E / \partial S^2 > 0, \\ \partial^3 E / \partial \rho^3 < 0, & \quad \partial E / \partial D > 0 \end{aligned}$$

то адиабата Гюгонио в плоскости $(p, 1/\rho)$

$$(2.10) \quad E_1 - E_0 + \frac{p_1 + p_0}{2} (1/\rho_1 - 1/\rho_0) = 0, \quad \alpha = \beta = \gamma$$

имеет лишь две точки пересечения с прямой Михельсона

$$(2.11) \quad [p] = -w^2 [1/\rho], \quad \alpha = \beta = \gamma$$

соответствующие начальному и конечному состоянию: $(p_0, 1/\rho_0)$ и $(p_1, 1/\rho_1)$.

Адиабата Гюгонио в начальном состоянии касается прямой с коэффициентом наклона $w = \rho_0 (c_0^2 - 4 / 3b_0^2)$, который представляет собой модуль объемного сжатия. Секущей с угловым коэффициентом $w_h = \rho_0 c_0$ соответствует на адиабате так называемая «точка Гюгонио» $(p_h, 1 / \rho_h)$. Точкам адиабаты Гюгонио, лежащим выше $(p_h, 1 / \rho_h)$, отвечают сверхзвуковые скорости волны, остальным — дозвуковые. Ниже приведены значения $(p_h, \rho_h / \rho^0)$ для некоторых металлов.

Металл	Fe	Al	Cu	Ni	Pb	Ti
p_h , кбар	386.4	112.1	207.8	227.5	36.00	115.8
ρ_h / ρ^0	1.175	1.116	1.117	1.090	1.069	1.082

3. Структура ударных волн. Рассмотрим структуру профиля ударных волн. Из формул (2.6) — (2.8) следует, что задача построения профиля сводится к решению системы уравнений

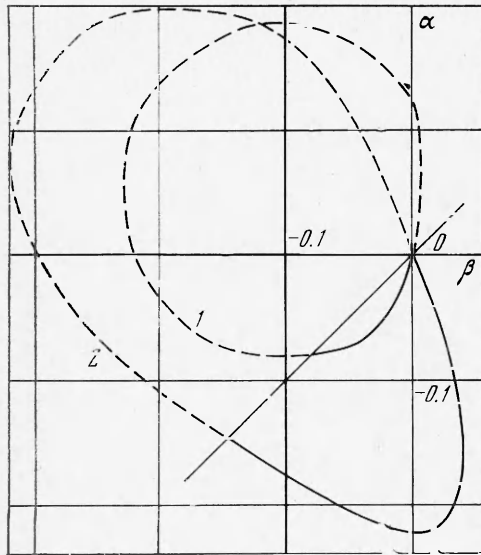
$$(3.1) \quad \rho_0 + \sigma_1 = w^2 (1 / \rho - 1 / \rho_0)$$

$$(3.2) \quad E - E_0 + \frac{E_0 - \sigma_1}{2} (1 / \rho - 1 / \rho_0) = 0$$

при условии $\beta = \gamma$ и квадратуре

$$(3.3) \quad dx / d\beta = 3\tau w / \rho (\alpha - \beta)$$

Система (3.1), (3.2) определяет кривую в пространстве α, β, S , которую назовем кривой возможных состояний. Кривая возможных состояний проектируется на плоскости α, β в виде замкнутой выпуклой кривой, пересекающейся с прямой $\alpha = \beta$ в двух и только двух точках, соответствующих начальному и конечному состоянию ударной волны.



Фиг. 1

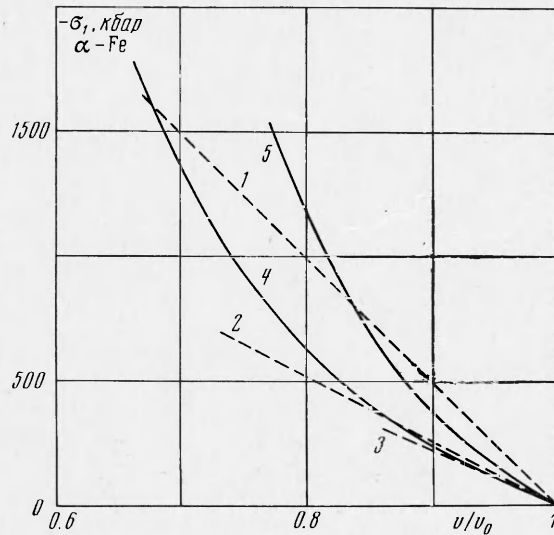
На фиг. 1 кривая 1 соответствует $|w| < \rho_0 c_0$, а кривая 2 — $|w| > \rho_0 c_0$. Здесь в качестве материала было взято железо (α — фаза). Кривой 2 соответствует $|w| / \rho_0 c_0 = 1.48$, а кривой 1 — $|w| / \rho_0 c_0 = 0.88$. Для дозвуковой волны ($|w| < \rho_0 c_0$) участок кривой (3.1), (3.2), лежащей в полуплоскости $\beta > \alpha$, и квадратура (3.3) дают решение задачи о построении профиля. При сверхзвуковых скоростях волн в окрестности начального состояния из (3.1) и (3.2) находим

$$(3.4) \quad \frac{\alpha - \alpha_0}{\beta - \beta_0} = -2 \frac{c_0^2 - 2b_0^2 - w^2 / \rho_0^2}{c_0^2 - w^2 / \rho_0^2}$$

Для сверхзвуковых волн $(\alpha - \alpha_0) / (\beta - \beta_0) < 0$. Отсюда следует, что на профиле волны должен быть разрыв. Из (3.3) и $w (d\beta / dx) < 0$ следует $\beta > \alpha$; непрерывность профиля противоречила бы в силу (3.4) монотонности $\beta(x)$.

В связи с этим необходимо решить задачу о построении обобщенного (разрывного) решения для случая $|w| > \rho_0 c_0$.

Введем в решение разрыв — упругий предвестник, поставив на нем дополнительное соотношение $[\beta] = 0$. Это равенство обеспечивает отсутствие релаксации напряжений внутри упругого скачка. Введение разрыва $[\beta] = 0$ на профиле волны может быть выполнено единственным образом, а именно: он должен быть расположен в начале волны, выход из начального состояния не возможен с помощью гладкого решения, а кривая возможных состояний имеет в силу выпуклости единственную точку пересечения с прямой $\beta = \beta_0$ (см. фиг. 1), расположенную в плоскости $\beta > \alpha$.



Фиг. 2

Из этой точки возможен гладкий переход в плоскости $\beta > \alpha$ вдоль кривой возможных состояний в положение, соответствующее концу ударной волны.

При $|w| > \rho_0 c_0$ ударная волна складывается из скачка, определяемого соотношениями (3.1), (3.2) и $\beta = \beta_0$, который назовем упругой волной, и гладкого участка, определяемого соотношениями (3.1) — (3.3), который можно назвать релаксационным слоем. В случае $|w| < \rho_0 c_0$ упругий скачок отсутствует. В обоих случаях всюду на ударной волне выполнено соотношение $\beta > \alpha$, т. е. $\sigma_2 > \sigma_1$. Структуру волны удобно представлять в плоскости $(-\sigma_1, 1/\rho)$. На фиг. 2 представлены кривые 4 и 5 ударных адиабат, соответствующих конечному состоянию и упругому скачку. Прямые 1, 2 и 3 — прямые перехода (3.1). На фиг. 2 упругая адиабата 5 в начальной точке касается прямой перехода 2, соответствующей точке Гюгонио адиабаты конечного состояния. Это означает, что при ослаблении ударной волны упругий скачок уменьшается, а при $|w| < \rho_0 c_0$ исчезает.

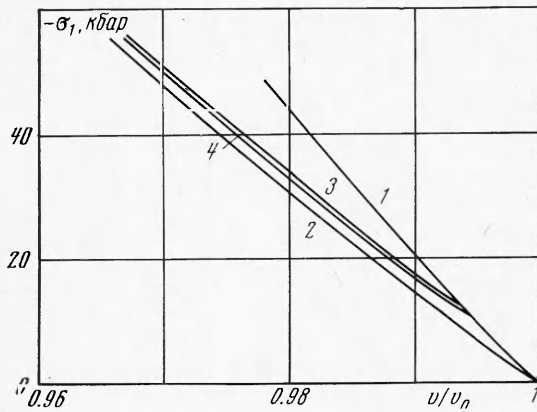
Для уравнений состояния, удовлетворяющих при $\beta = \text{const}$ неравенствам (2.9), упругий скачок удовлетворяет требованиям эволюционности.

4. Пластические волны. Вопрос о структуре ударных волн был разобран в п.3 без учета возможных особенностей, связанных с зависимостью времени релаксации τ от параметров среды. Если бы τ было постоянным, то релаксационный слой представлял бы собой плавный переход. Для

реальных веществ время релаксации зависит существенным образом от температуры T , плотности ρ и интенсивности σ касательных напряжений. Для металлов (см. [3])

$$(4.1) \quad \tau = \tau_0 (\sigma/\sigma_0)^m e^{-U(\sigma, T)/RT}$$

Здесь $U(\sigma, T)$ — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная, τ_0, σ_0 — константы. Для металлов такие резкие зависимости для времени релаксации приводят к тому, что на релаксационном слое



Фиг. 3

формируется участок с крутым фронтом, который можно выделить в отдельную волну.

В экспериментальных исследованиях ударных волн в металлах подобная структура фронта, расщепившегося на упругий предвестник и пластическую волну неоднократно наблюдалась и качественно была описана, например, в [7].

В терминах, используемых в данной работе, это описание можно сделать следующим образом: зададимся характерной длительностью Δt

пластической волны и построим в плоскости $(-\sigma_1, 1/\rho)$ для различных значений скорости w кривую, определяемую соотношениями (3.1), (3.2) и $\tau = \Delta t$ (τ из (4.1)).

На фиг. 3 вместе с упругой и гидродинамической адиабатами кривые 1 и 2, представлены кривые 3 и 4, соответствующие различным значениям $\tau = 1$ мксек и 100 мксек (в качестве материала выбрана медь). Соответствующие этим значениям кривые назовем пластическими адиабатами. Пластические волны, шириной $\approx \Delta t$ заменим разрывными решениями, для которых величины скачков вычисляются с помощью пластических адиабат.

Назовем этот процесс выделением пластических волн.

Рассмотрим на примере меди различные случаи выделения пластических волн на структуре фронта. Аналогичные рассуждения можно проводить и для других металлов. Они зависят от скоростей ударной волны. Для сильных ударных волн $|w| > \rho_0 c_0$ (давление за фронтом выше 200 кбар) пластические адиабаты практически неотличимы от гидродинамической и условия

$$\tau = \Delta t_1, \quad \tau = \Delta t_2$$

эквивалентны по существу условиям $\alpha = \beta$. Это означает, что для достаточно сильных ударных волн в металлах можно пренебрегать различием между σ_1 и σ_2 и использовать, как это часто делают, гидродинамический подход. С этой точки зрения понятно, почему металл при высоких давлениях ведет себя как жидкость. На фиг. 4 представлен профиль 1 ударной волны, соответствующий секущей 1 (фиг. 2, 5). Из структуры фронта видно, что в этом случае упругий скачок на толщинах Δt_1 и Δt_2 не отличим от релаксационного слоя, и поэтому пластическую волну можно выделить

основными соотношениями

$$(4.2) \quad E_1 - E_0 - \frac{\sigma_{10} + \sigma_{11}}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right) = 0, \quad \sigma_{11} - \sigma_{10} = w^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right)$$

$$(4.3) \quad u_1 - u_0 = \pm \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{10}) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right)}$$

и одним дополнительным соотношением за скачком

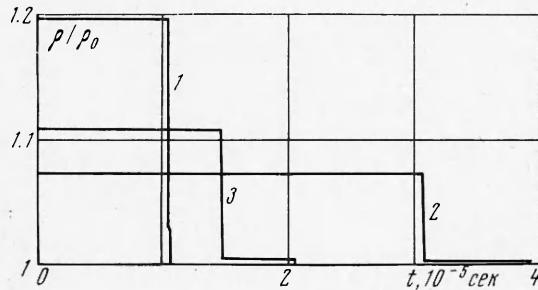
$$(4.4) \quad \tau(\alpha_1, \beta_1, S_1) = \Delta t$$

что соответствует пересечению пластической адиабаты с секущей 1 на фиг. 2. Эйлерова скорость D границы определяется соотношением

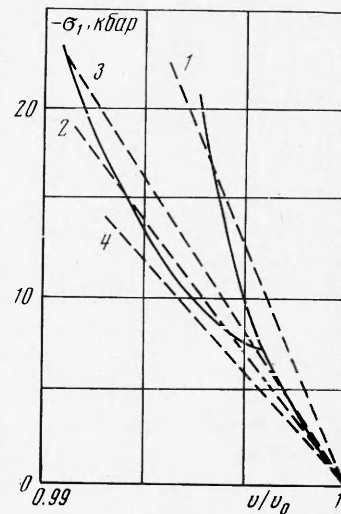
$$(4.5) \quad D = \frac{\sqrt{\rho_1} u_1 + \sqrt{\rho_2} u_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} \pm \sqrt{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{10}}{\rho_0 - \rho_1}}$$

Для волн, идущих с дозвуковой скоростью ($|w| < \rho_0 c_0$, секущая 2 на фиг. 2, 5) характерный профиль представлен кривой 2 на фиг. 4. Поскольку волна идет с дозвуковой скоростью, то выделение волны осуществляется помимо основных соотношений (4.2) и (4.3) еще двумя дополнительными соотношениями: перед волной

$$(4.6) \quad \tau(\alpha_0, \beta_0, S_0) = \Delta t$$



Фиг. 4



Фиг. 5

и за волной — (4.4), что соответствует пересечению пластической адиабаты с секущей 2 на фиг. 5 в двух точках¹.

В промежуточном случае между описанными выше, когда распространение ударной волны происходит со скоростью, немного превышающей скорость звука (секущая 3 на фиг. 5), структура фронта имеет вид кривой, изображенной на фиг. 4 кривой 3. В этом случае на фронте имеется идущий впереди пластической волны упругий скачок. Выделение пластической волны осуществляется в этом случае, как и в дозвуковом режиме, с помощью двух дополнительных соотношений (4.4) и (4.6), что также соответствует пересечению секущей 3 на фиг. 5 и пластической адиабаты в двух точках. Необходимость использования двух дополнительных со-

¹ В (4.4) и (4.6) приравнивание $\tau(\alpha, \beta, S)$ одной и той же постоянной Δt не является обязательным.

отношений для выделения пластической волны связана с тем, что скорость пластической волны меньше скорости звука перед волной. Этот факт следует из того, что за упругим скачком скорость звука возрастает вдоль профиля волны.

Пластические волны, шириной больше Δt не считались разрывными. Им соответствуют секущие вида 4 на фиг 5.

Поступила 19 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Роменский Е. И. Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах. ПМТФ, 1972, № 6.
2. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1945.
3. Годунов С. К., Демчук А. Ф., Козин Н. С., Мали В. И. Интерполяционные формулы для зависимости максвелловской вязкости некоторых металлов от интенсивности касательных напряжений и температуры. ПМТФ, 1974, № 4.
4. Годунов С. К., Козин Н. С., Роменский Е. И. Использование уравнения состояния Жаркова — Калинина для вычисления упругой энергии при нешаровом тензоре деформации. ПМТФ, 1974, № 2.
5. Schuler K. W., Nunziano J. W. Recent results in nonlinear viscoelastic wave propagation. Internat. J. Solids and Structures, 1973, vol. 9, No. 10.
6. Nunziano I. W., Walsh E. K. Amplitude behavior of shock waves in thermoviscoelastic solid. Internat. J. Solids and Structures, 1973, vol. 9, No. 11.
7. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.