

К ТЕОРИИ ДИФфуЗИОННОЙ РЕЛАКСАЦИИ В ПОЛИКРИСТАЛЛАХ

Б. М. Даринский, Т. Д. Шермергор

(Воронеж)

Наличие примесей в кристаллической решетке является одной из причин неупругости твердых тел. В монокристаллах примеси могут приводить к релаксации Я. Сноэка [1], парной релаксации К. Зинера [2], влиять на уровень дислокационного внутреннего трения [3]. В поликристаллах к этим механизмам релаксации добавляется еще один — восходящая диффузия атомов примеси в случайном поле упругих напряжений, которое обусловлено деформацией случайно ориентированных кристаллитов. Отмеченный механизм может дать вклад во внутреннее трение, релаксацию напряжений, упругое последствие и нестационарную ползучесть. Диффузионная релаксация такого типа впервые рассматривалась К. Зинером [4], однако он считал, что невозможно провести точное вычисление разности релаксированного и нерелаксированного модулей, в связи с чем дал оценку порядка величины дефекта модуля, основываясь на вычислении моментной функции второго порядка от величины, обратной модулю Юнга. В схеме К. Зинера неявно предполагается, что упругая деформация кристаллита определяется лишь ориентировкой его кристаллографических осей и приложенным внешним силовым полем и не зависит от деформации соседних зерен. Недостаточность такой схемы для поликристалла очевидна. Кроме того, такой подход не позволяет рассчитать функцию распределения времен релаксаций. Ниже дается точный расчет интенсивности релаксационного процесса в поликристаллах произвольной кристаллографической симметрии при учете парных корреляций между его зернами.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим поликристалл, состоящий из зерен, отличающихся формой и ориентацией кристаллографических осей. Концентрацию примесей и деформацию будем считать малой. Тогда упруго-диффузионная система уравнений может быть записана в виде

$$\nabla_i D_{ik} \nabla_k c - \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{V_0}{RT} \nabla_i c D_{ik} \nabla_k b_{lm} u_{lm} = -q \quad (1.1)$$

$$\nabla_k \lambda_{iklm} u_{lm} - \nabla_k b_{ik} c = -f_i \quad (1.2)$$

$$c = n/N, \quad b_{ik} = \partial \sigma_{ik} / \partial c = \lambda_{iklm} \gamma_{lm}, \quad \gamma_{lm} = \partial \varepsilon_{lm} / \partial c \quad (1.3)$$

$$D_{ik} = D_{ik}^0 \left( 1 + \frac{\beta V_0}{RT} c \right), \quad \beta = \lambda_{iklm} \gamma_{ik} \gamma_{lm}, \quad \varepsilon_{lm} = 1/2 (u_{lm} + u_{ml})$$

Уравнение (1.1) есть уравнение восходящей диффузии неоднородной анизотропной среды (вывод см. в приложении), а (1.2) — уравнение равновесия с учетом концентрационных напряжений [5,6]. По дважды встречающимся индексам предполагается суммирование, а величины, входящие в уравнение, имеют следующий смысл:  $c$  — концентрация атомов примеси,  $n$  и  $N$  — соответственно количество атомов примеси и всех атомов в единице объема,  $D_{ik}$  — коэффициент диффузии, зависящий от концентрации, которая в некоторых случаях оказывается существенной [7,8],  $D_{ik}^0$  — его значение при  $c \rightarrow 0$ ,  $b_{ik}$  и  $\gamma_{ik}$  — соответственно тензоры концентрационных напряжений и деформаций,  $V_0$  — молярный объем,  $R$  — газовая постоянная,  $u_{ik} = u_{i,k}$  — тензор дисторсии,  $u$  — вектор смещения,  $\varepsilon_{ik}$  — тензор деформаций,  $q$  характеризует мощность источника атомов примеси,  $f$  — плотность силы.

Упруго-диффузионная система уравнений (1.1), (1.2) аналогична системе уравнений термоупругости, отличаясь от последней лишь третьим слагаемым в левой части уравнения диффузии. Поэтому можно было бы непосредственно воспользоваться методом, развитым ранее для расчета термоупругой релаксации поликристаллов кубической кристаллографической симметрии. Однако при более низких видах симметрии непосредственный расчет оказывается весьма громоздким. Поэтому вычисление частотной зависимости эффективного тензора упругих постоянных заменяется ниже расчетом его значений при частотах  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ , что непосредственно дает релаксированное и нерелаксированное значения этого тензора и, следовательно, интенсивность релаксации.

Учитывая, что коэффициент диффузии является кинетической характеристикой и не влияет на степень релаксации, заменим  $D_{ik}$  его эффективным значением  $D\delta_{ik}$  и линеаризуем уравнение (1.1) заменой в коэффициенте диффузии  $D$  и третьем слагаемом истинной концентрации  $c$  средней по поликристаллу величиной  $c_0$ . Тогда это уравнение для гармонических колебаний может быть представлено в виде

$$Lc = -q + D\chi\nabla^2 b_{lm}u_{lm} \quad (\bar{L} \equiv \bar{D}\nabla^2 - i\omega, \quad \chi = \frac{c_0 V_0 D_0}{RTD}) \quad (1.4)$$

Определяя отсюда концентрацию и подставляя ее значение в уравнение (1.2), найдем

$$L_i u_i = -f_i^\circ \quad (1.5)$$

$$(L_{ij} \equiv \nabla_k \lambda_{iklm} \nabla_m + D\chi \nabla_k b_{ik} \nabla^2 g * b_{lm} \nabla_m, \quad f_i^\circ \equiv f_i - \nabla_k b_{ik} \epsilon * \chi, \quad Lg = -\delta(r))$$

Представим тензоры  $\lambda_{iklm}$  и  $b_{lm}$  в виде суммы среднего значения

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{iklm} \rangle &= K\delta_{ik}\delta_{lm} + \mu D_{iklm}, & \langle b_{ik} \rangle &= b\delta_{ik} \\ (D_{iklm} \equiv \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl} - 2/3\delta_{ik}\delta_{lm}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

и флуктуационной добавки

$$\delta\lambda_{iklm} = \lambda_{iklm} - \langle \lambda_{iklm} \rangle, \quad \delta b_{ik} = b_{ik} - \langle b_{ik} \rangle \quad (1.7)$$

Заметим, что усреднение проводится по областям, размеры которых гораздо больше размеров кристаллитов, но малы по сравнению с расстояниями, на которых заметно меняется регулярная часть функций. Тогда оператор  $L_{ij}$  разбивается на регулярную  $Q_{ij}$  и случайную  $R_{ij}$  составляющие

$$Q_{ij} = \nabla_k \langle \lambda_{iklm} \rangle \nabla_m + D\chi \nabla_k \langle b_{ik} \nabla^2 g * b_{lm} \rangle \nabla_m \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \nabla_k \delta\lambda_{iklm} \nabla_m + D\chi b (\nabla_k \delta_{ik} \nabla^2 g * \delta b_{lm} \nabla_m + \nabla_k \delta b_{ik} \nabla^2 g * \delta_{lm} \nabla_m) \\ (Q_{ij} + R_{ij} &= L_{ij}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Сравнивая выражение (1.8) для регулярной части оператора  $L_{ij}$  с уравнением равновесия

$$\sigma_{ik,k} = -f_i^\circ \quad (1.10)$$

находим тензорный оператор упругих модулей поликристалла

$$\Lambda_{iklm}(\omega) = \langle \lambda_{iklm} \rangle + D\chi \langle b_{ik} \nabla^2 g * b_{lm} \rangle \quad (1.11)$$

Отсюда для дефекта тензора упругих модулей  $\Delta\Lambda_{iklm}$  в нулевом приближении получим

$$\Delta\Lambda_{iklm}^{(0)} \equiv \Lambda_{iklm}^{(0)}(\infty) - \Lambda_{iklm}^{(0)}(0) = \chi b^2 \delta_{ik} \delta_{lm} + 1/10 \chi A_{pq}^{pq} D_{iklm} \quad (A_{pq}^{pq} \equiv \langle \delta b_{pq}^2 \rangle) \quad (1.12)$$

Здесь первое слагаемое дает дефект модуля, обусловленный диффузией на расстоянии  $l$  порядка размеров неоднородностей поля деформаций. Второе слагаемое связано с диффузией на расстоянии  $a$  порядка размеров кристаллитов.

Время релаксации в первом случае весьма велико,  $\sim l^2 / D$ , тогда как во втором случае оно существенно меньше  $\sim a^2 / D$ .

Отметим, что при однородной циклической деформации первое слагаемое в выражении (1.12) следует положить равным нулю. Действительно, в этом случае тензор напряжений равен

$$\sigma_{ik} = \langle \lambda_{iklm} \rangle u_{lm} + D \chi u_{lm} (b^2 \delta_{ik} \delta_{lm} \nabla^2 g * 1 + b_{lm}^{ik} \nabla^2 g * 1) \\ [b_{lm}^{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv \langle \delta b_{ik}(\mathbf{r}) \delta b_{lm}(\mathbf{r}') \rangle] \quad (1.13)$$

Обозначая трансформанты Фурье прописными буквами

$$F(\mathbf{k}) = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) dV, \quad f(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} F(\mathbf{k}) dV_{\mathbf{k}} \quad (1.14)$$

и учитывая соотношения

$$f * 1 = F(0), \quad G(\mathbf{k}) = (Dk^2 + i\omega)^{-1} \quad (1.15)$$

получим

$$\nabla^2 g * 1 = - (D + i\omega k^{-2})^{-1}_{k=0} = 0 \quad (1.16)$$

В случае неоднородной деформации, например при изгибе, примесь будет диффундировать из мест сжатия в места расширения материала. Соответствующий дефект модуля для однородной среды получается, если учесть, что при этом  $\nabla^2 g$  свертывается с функцией  $u_{ik}(\mathbf{r})$ . В пространстве Фурье при  $\omega \rightarrow 0$  это приводит к умножению  $U_{ik}(\mathbf{k})$  на  $-D^{-1}$ .

Из выражения (1.12) следует, что для однородных деформаций в нулевом приближении корреляционная часть дефекта тензора упругих модулей определяется корреляциями тензора второго ранга концентрационных напряжений. Поэтому для кубической кристаллографической симметрии в нулевом приближении корреляционная часть дефекта тензора упругих модулей равна нулю, а для кристаллов более низкой симметрии релаксация будет проявляться при наличии сдвиговой компоненты тензора напряжений.

**2. Расчет степени релаксации в первом приближении.** Учет парных корреляций приводит к следующему выражению для регулярной части вектора смещения [9]:

$$Q_{ij} \langle u_i \rangle + \langle R_{ip} g_{pq} * R_{ql} \rangle \langle u_l \rangle = -f_i^0 \quad (2.1)$$

где тензорная функция Грина определяется выражением

$$Q_{ip} g_{pq} = -\delta_{ip} \delta(\mathbf{r}) \quad (2.2)$$

Для высоких частот фурье-образ тензора Грина  $G_{pq}(\mathbf{k})$  и случайный тензорный оператор  $R_{ij}$  равны

$$G_{pq}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mu k^2} (\delta_{pq} - \kappa n_p n_q), \quad R_{ij} = \nabla_k \delta \lambda_{iklm} \nabla_m \quad \left( n_p \equiv \frac{k_p}{k}, \quad \kappa \equiv \frac{K + 1/3\mu}{K + 4/3\mu} \right) \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1), получим

$$\Lambda_{iklm}^{(1)}(\infty) = -\frac{1}{3\mu} A_{lmpq}^{ikpq} + \frac{\kappa}{15\mu} (2A_{lmpq}^{ikpq} + A_{lmqq}^{ikpp}) \quad (2.4)$$

Корреляционные тензоры  $A_{lmpq}^{ikpq}$  и  $A_{lmqq}^{ikpp}$  связаны с бинарной корреляционной функцией тензора упругих модулей  $b_{pqrs}^{iklm}$  соотношениями

$$\langle \delta \lambda_{iklm}(\mathbf{r}) \delta \lambda_{pqrs}(\mathbf{r}') \rangle = b_{pqrs}^{iklm}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = A_{pqrs}^{iklm} \Psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.5)$$

Выражение (2.4) совпадает с корреляционной добавкой к тензору упругих модулей поликристалла, рассчитанной И. М. Лифшицем и Л. Н. Ро-

зевцевейгом [10]. В другом предельном случае малых частот, полагая  $\omega = 0$ , найдем

$$G_{pq}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mu_0 k^2} (\delta_{pq} - \kappa_0 n_p n_q)$$

$$R_{il} = \nabla_k \delta \lambda_{iklm} \nabla_m - \chi b \nabla_k (\delta_{ik} \delta b_{lm} + \delta b_{ik} \delta_{lm}) \nabla_m \quad (2.6)$$

$$\left( \mu_0 \equiv \mu - \frac{1}{10} \chi A_{pq}^{pq}, \quad \kappa_0 \equiv \frac{K_0 + 1/3 \mu_0}{K_0 + 4/3 \mu_0}, \quad K_0 \equiv K - \chi b^2 \right) \quad (2.7)$$

Подставляя (2.6) и (2.7) в (2.1) и проводя соответствующие преобразования, получим для корреляционной добавки к усредненному значению тензора упругих модулей следующее выражение:

$$\Delta \Lambda_{iklm}^{(1)}(0) = -\frac{1}{3\mu_0} \left( 1 - \frac{2}{5} \kappa_0 \right) A_{lmpq}^{ikpq} + \frac{\kappa_0}{15\mu_0} A_{lmq}^{ikpp} + \frac{2\chi b}{3K_0 + 4\mu_0} A_{lmp}^{ik} \quad (2.8)$$

Тензор  $A_{lmpq}^{ik}$  определяется выражением

$$\langle \delta b_{ik}(\mathbf{r}) \delta \lambda_{lmpq}(\mathbf{r}') \rangle = A_{lmpq}^{ik} \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.9)$$

Вычитая (2.8) из (2.4), находим корреляционную добавку первого приближения к дефекту тензора упругих модулей

$$\Delta \Lambda_{iklm}^{(1)} = \frac{\chi b^2}{15(K + 4/3\mu)^2} (2\Omega_1 A_{lmpq}^{ikpq} + \Omega_2 A_{lmq}^{ikpp}) - \frac{2\chi b}{3(K + 4/3\mu)} A_{lmp}^{ik}$$

$$\Omega_1 \equiv 1 + \frac{2}{5b^2} \left( 1 + \frac{K}{\mu} + \frac{3K^2}{8\mu^2} \right) A_{pq}^{pq}, \quad \Omega_2 \equiv 1 - \frac{4}{15b^2} \left( \frac{1}{6} + \frac{K}{\mu} + \frac{3K}{8\mu^2} \right) A_{pq}^{pq}$$

Для кубического кристалла  $\Omega = 1$ . Для более низкой симметрии будем иметь  $\Omega > 1$ .

Для гексагональной симметрии при  $b_{33} = 1.5 b$

$$\Omega_1 = 1 + \frac{4}{15} \left( 1 + \frac{K}{\mu} + \frac{3K^2}{8\mu^2} \right), \quad \Omega_2 = \frac{31}{27} - \frac{2}{3} (\Omega_1 - 1)$$

Например, для цинка, вычислив  $K$  и  $\mu$  по данным [10], получим  $K = 6.71$ ,  $\mu = 2.75 \cdot 10^{11}$  дн / см<sup>2</sup>, что дает  $\Omega_1 = 2.5$   $\Omega_2 = 4/27$ . Входящие в (2.10) бинарные корреляционные тензоры удобно вычислять при помощи соотношений

$$A_{lmp}^{ik} = \frac{1}{10} A_{rsp}^{rs} D_{iklm}, \quad A_{lmq}^{ikpp} = \frac{1}{10} A_{rsq}^{rspp} D_{iklm}$$

$$A_{lmpq}^{ikpq} = \frac{1}{9} A_{sspq}^{rrpq} \delta_{ik} \delta_{lm} + \frac{1}{10} \left( A_{rspq}^{rspq} - \frac{1}{3} A_{sspq}^{rrpq} \right) D_{iklm} \quad (2.11)$$

Входящие в правые части равенств скалярные величины легко вычисляются в кристаллографической системе координат.

3. Расчет полных дефектов модулей всестороннего сжатия и сдвига. Используя соотношение

$$\Delta K = 1/9 (\Delta \Lambda_{iil}^{(0)} + \Delta \Lambda_{iil}^{(1)}) \quad (3.1)$$

найдем

$$\Delta K = \chi b^2 + \frac{2}{135} \frac{\chi b^2 \Omega_1}{(K + 4/3\mu)^2} A_{sspq}^{rrpq} \quad (3.2)$$

Здесь первое слагаемое описывает релаксацию, которая имеет место лишь при неоднородных деформациях. Последнее слагаемое будет отлично от нуля для кристаллов с симметрией, более низкой, чем кубическая.

Дефект модуля сдвига находим при помощи соотношения

$$\mu = 1/10 (\Lambda_{ikik} - 3K) \quad (3.3)$$

Это дает

$$\begin{aligned} \Delta\mu &= \frac{1}{10} \chi A_{pq}^{pq} - \frac{1}{15} \frac{\chi b}{(K + 4/3\mu)} A_{rspp}^{rs} + \\ &+ \frac{1}{75} \frac{\chi b^2}{(K + 4/3\mu)^2} \left( \Omega_1 A_{rspq}^{rspq} + \frac{1}{2} \left( \Omega_2 - \frac{1}{3} \Omega_1 \right) A_{sspq}^{rrpq} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

В случае кубической структуры выражение (3.4) упрощается

$$\Delta\mu = \frac{\chi b^2}{75(K + 4/3\mu)^2} A_{rspq}^{rspq} = \frac{18}{125} \frac{\chi K^2 \gamma^2 c_3^2}{(K + 4/3\mu)^2} \quad (3.5)$$

Величины  $\gamma$  и  $c_3$  для кристаллов кубической структуры определяются выражениями

$$\Lambda_{iklm} = c_1 \delta_{ik} \delta_{lm} + c_2 (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) + c_3 \sum_j \delta_{ij} \delta_{kj} \delta_{lj} \delta_{mj}, \quad \gamma \equiv 1/3 \gamma_{ii} \quad (3.6)$$

**4. Вычисление функции распределения времен релаксаций.** Данному значению степени релаксации  $\Delta\mu / \mu$  соответствует пик внутреннего трения, высота и ширина которого определяются функцией распределения времен релаксаций  $f(\tau)$ . Для вычисления  $f(\tau)$  необходимо рассматривать выражения (1.11) и (2.1), не полагая  $\omega = 0$  или  $\omega = \infty$ .

Как показано в работе [9], функция распределения времен релаксаций определяется координатной зависимостью соответствующих бинарных корреляционных функций. Функция  $f(\tau)$  выражается через трансформанту Фурье  $\Psi(\mathbf{k})$  введенной ранее функции  $\psi(\mathbf{r})$  следующим образом:

$$f(\tau) = \frac{D^{-3/2}}{4\pi^2} \Psi \left( \frac{1}{\sqrt{D\tau}} \right) \tau^{-5/2} \int_0^\infty f(\tau) d\tau = 1 \quad (4.1)$$

Если принять координатную зависимость всех бинарных корреляционных функций в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp(-r/a) \quad (4.2)$$

где  $a$  — порядок размеров кристаллитов, то функция распределения оказывается равной

$$f(\tau) = \frac{2a^3 D^{-3/2}}{\pi} \frac{\tau^{-5/2}}{(1 + a^2/D\tau)^2} \quad (4.3)$$

Наличие функции распределения снижает высоту максимума внутреннего трения, по сравнению с пиком стандартного линейного тела, в два раза и дает

$$Q_{\max}^{-1} = \frac{1}{4} \frac{\Delta\mu}{\mu}$$

Для численной оценки рассмотрим обладающую кубической симметрией систему Fe — C при содержании углерода 4.5% при температуре 1250° С. Упругие постоянные  $\alpha$ -железа, выраженные в  $10^{11}$  дн/см<sup>2</sup>, равны:  $c_1 = 11.4$ ,  $c_2 = 8.9$ ,  $c_3 = 13.6$ , а безразмерный параметр  $\gamma = 0.2$  (см. [11]). Это дает  $\Delta\mu / \mu = 1.5 \cdot 10^{-3}$ , откуда  $Q_{\max}^{-1} = 3.7 \cdot 10^{-4}$ . Это значение приходится на частоту  $\nu_m = 0.6 Da^{-2}$ . Используя приводимые В. Зайтом данные [12], найдем  $D = 3.2 \cdot 10^{-6}$  сек/см<sup>2</sup> при  $T = 1250^\circ$  С. При размере зерна  $a \sim 10^{-3}$  см частота, на которую приходится пик внутреннего трения, будет  $\sim 1$  гу.

Найденные оценки показывают, что диффузионное внутреннее трение в поликристаллах может быть измерено экспериментально. Точное значение высоты пика может оказаться несколько иным, так как для оценки пика при  $T = 1250^\circ$  С использовались значения упругих постоянных при комнатной температуре, а также не учитывалось влияние на них углерода. Однако можно надеяться на правильность оценки порядка величины диффузионного пика внутреннего трения.

5. Приложение. Вывод уравнения восходящей диффузии для неоднородной анизотропной среды. Для малых деформаций  $u_{ik}$  и концентраций атомов примеси  $c$  неоднородной среды свободная энергия единицы объема  $F_0$  может быть разложена в ряд по параметрам  $u_{ik}$  и  $c$ . Ограничиваясь квадратичным приближением, получим

$$F = F_0 + 1/2 \lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm} - \lambda_{iklm} u_{ik} \gamma_{lm} c + 1/2 \lambda_{iklm} \gamma_{ik} \gamma_{lm} c^2 \quad (c \equiv n/N) \quad (5.1)$$

Отсюда находим химический потенциал  $\mu$

$$\mu \equiv \frac{\partial F}{\partial n} = \mu_0 - \frac{1}{N} b_{ik} u_{ik} + \frac{1}{N} \beta c, \quad (\mu_0 \equiv \frac{\partial F_0}{\partial n}, \quad b_{ik} \equiv \lambda_{iklm} \gamma_{lm}, \quad \beta = \lambda_{iklm} \gamma_{ik} \gamma_{lm}) \quad (5.2)$$

Плотность потока частиц  $J$  выражается через химический потенциал обычным образом [13]

$$J_i = - \frac{n}{kT} D_{ij}^0 \nabla_j \mu \quad (5.3)$$

где  $D_{ij}^0$  — коэффициент диффузии при  $c \rightarrow 0$ .

Подставляя (5.2) в (5.3) и учитывая, что для разбавленных растворов

$$\mu_0 = kT \ln n \quad (5.4)$$

найдем

$$- J_i = D_{ij}^0 \left( 1 + \frac{c\beta V_0}{RT} \right) \nabla_j n - \frac{D_{ij}^0 c}{kT} \nabla_j b_{lk} u_{lk} \quad (5.5)$$

Здесь  $V_0$  — молярный объем.

Изменение числа частиц в единицу времени в единице объема равно

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \nabla_i J_i = \nabla_i D_{ij} \nabla_j n - \nabla_i D_{ij}^0 \frac{c}{kT} \nabla_j b_{lk} u_{lk} \quad (D_{ij} \equiv D_{ij}^0 [1 + c\beta V_0 / RT]) \quad (5.6)$$

Относя это выражение к полному числу частиц в единице объема, получим

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \nabla_i D_{ij} \nabla_j c + \frac{V_0}{RT} \nabla_i D_{ij}^0 c \nabla_j b_{lk} u_{lk} = 0 \quad (5.7)$$

При наличии источников атомов примеси уравнение восходящей диффузии (5.7) будет неоднородным, как это принято в формуле (1.1) основного текста. Уравнение (1.2) получается из (5.1) дифференцированием  $F$  по тензору деформаций и подстановкой результата в (1.10).

Поступила 13 XII 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С н о е к Я. Исследования в области новых ферромагнитных материалов. Изд. иностр. лит., 1949.
2. Н о в и к А. С., С е р а ф и м Д. Ф. Величина зинеровской релаксации в сплавах. Сб. «Внутреннее трение металлов», Металлургиздат, 1963, стр. 117.
3. Н и б л е т т Д. Х., У и л к с Дж. Внутреннее трение металлов, вызванное дислокациями. Сб. «Внутреннее трение металлов». Металлургиздат, 1963, стр. 25.
4. З и н е р К. Сб. «Упругость и неупругость металлов». Изд. иностр. лит., 1954.
5. К о н о б е е в с к и й С. Т. К теории фазовых превращений. Ж. эксперим. и теор. физ., 1943, т. 13, стр. 200.
6. Л ю б о в Б. Я., Ф а с т о в Н. С. Влияние концентрационных напряжений на процессы диффузии в твердых растворах. Докл. АН СССР, 1952, т. 84, № 5, стр. 939.
7. Л ю б о в Б. Я. Влияние напряжений, возникающих при распаде твердого раствора, на скорость роста зародыша новой фазы. Ж. техн. физ., 1950, т. 20, стр. 1344.
8. А л е к с а н д р о в Л. Н., Л ю б о в Б. Я. Влияние концентрационных напряжений на скорость бокового роста перлитного зерна. Докл. АН СССР, 1950, т. 74, стр. 1081.
9. Д а р и н с к и й Б. М., Ш е р м е р г о р Т. Д. Температурная релаксация в поликристаллах с кубической структурой. Физ. металлов и металловедение, 1964, т. 18, № 5, стр. 645.
10. Л и ф ш и ц И. М., Р о з е н ц в е й г Л. Н. К теории упругих свойств поликристаллов. Ж. эксперим. и теор. физ., 1946, т. 16, № 11, стр. 967.
11. А л е к с а н д р о в Л. Н. Концентрационные напряжения вблизи растущего сферического центра новой фазы в твердых растворах. Изв. высш. учебн. завед. Черная металлургия, 1962, № 2, стр. 118.
12. З а й т В. Диффузия в металлах. Изд. иностр. лит., 1958.
13. К р и в о г л а з М. А. Об анизотропии диффузии в кубических кристаллах. Физ. металлов и металловедение. 1964, т. 17, № 2, стр. 161.