Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 6

УДК 539.4

НЕКОТОРЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ СПОСОБНОСТИ К ОРИЕНТИРОВАННОМУ ПРЕВРАЩЕНИЮ ДЛЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

А. А. Мовчан

Институт прикладной механики РАН, 117334 Москва

Одно из уникальных свойств сплавов с памятью формы состоит в характерном для них ориентированном превращении [1, 2], суть которого сводится к следующему. Пусть образец, находящийся под действием напряжения σ_{ij}, охлаждается через интервал температур прямого мартенситного превращения (M_1, M_2). В результате в нем развивается деформация прямого превращения ε_{ij}, девиатор которой соосен девиатору приложенного напряжения. При некоторой промежуточной температуре T_0 ($M_2 < T_0 < M_1$) действующее напряжение снимается. При дальнейшем снижении температуры ненагруженный образец продолжает деформироваться в направлении ранее приложенного напряжения, что объясняется развитием ориентированных ранее действовавшими напряжениями кристаллов мартенсита [2]. Этот эффект достаточно хорошо изучен экспериментально на одномерных образцах при растяжении и кручении [3, 4] и описан с помощью микромеханических определяющих уравнений для сплавов с памятью формы [5–7].

В данной работе предлагается способ решения краевых задач о прямом превращении при меняющихся граничных условиях, с помощью которого удается описать более сложные проявления ориентированного превращения.

1. В [5–7] приведены определяющие уравнения для сплавов с памятью формы, моделирующие с помощью микромеханической схемы [8] процессы зарождения и развития кристаллов термоупругого мартенсита в аустенитной матрице. Для прямого превращения из полностью аустенитного состояния эти определяющие уравнения имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^1_{ij} + \varepsilon^2_{ij} + \varepsilon^3_{ij}, \quad \varepsilon^{1\prime}_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{2G}, \quad \varepsilon^1_{kk} = \frac{1}{K}\sigma_{kk}, \quad \varepsilon^3_{ij} = \alpha(T - T_0)\delta_{ij},$$
$$\frac{d\varepsilon^{2\prime}_{ij}}{dq} = c_0\sigma'_{ij} + a_0\varepsilon^{2\prime}_{ij}, \quad \frac{d\varepsilon^2_{kk}}{dq} = \beta_0 + a_0\varepsilon^2_{kk}; \tag{1.1}$$

$$q = \sin\Big(\frac{\pi}{2}\,\frac{T - M_1}{M_2 - M_1}\Big), \tag{1.2}$$

где ε^1_{ij}, ε^2_{ij}, ε^3_{ij} — упругая, фазовая и температурная деформации; $T_0 \geqslant M_1$ — температура, при которой температурная деформация считается равной нулю; σ_{ij} — тензор напряжений; штрихом обозначены компоненты девиаторов; G и K — модуль сдвига и объемного расширения; α — коэффициент температурного расширения; q — доля мартенситной фазы в объеме материала; c_0, a_0 и β_0 — постоянные материала, значения которых для никелида титана [3] и сплава CuAlMnCo [4] определены в [6].

Решение дифференциального уравнения для девиатора фазовой деформации может быть записано как

$$\varepsilon_{ij}^{2\prime} = \int\limits_0^q K(q-\xi)\sigma'_{ij}(\xi)d\xi, \quad K(q) = c_0 \exp(a_0 q).$$

Здесь очевидна аналогия с линейной вязкоупругостью, причем роль времени играет величина q (возможно использование других ядер, например степенного $K(q) = c_0 q^m$). Одно из принципиальных отличий данной модели состоит в том, что в ней ядро — возрастающая функция ($a_0 > 0$, $m > 0$), т. е. сплавы с памятью формы в рамках этой аналогии можно трактовать как среды с не затухающей, а, наоборот, с усиливающейся памятью о предшествующей (по q) истории нагружения. С этим и связано ориентированное превращение, которое в обычных вязкоупругих средах с затухающей памятью не наблюдается. Второе отличие состоит в том, что здесь параметр q может как возрастать, так и убывать, причем в случае убывания q (обратное превращение) справедливы совсем другие определяющие уравнения [5–7].

Для многих сплавов с памятью формы объемная доля мартенситной фазы q зависит не только от температуры, но и от действующих напряжений. Однако при исследовании смещений, связанных с ориентированным превращением, когда напряжения снимаются, этой зависимостью можно пренебречь.

2. Для решения краевых задач к определяющим уравнениям, уравнениям равновесия, совместности и граничным условиям применяется преобразование Лапласа по переменной q. В пространстве изображений определяющие уравнения для образа полной деформации принимают вид

$$\hat{\varepsilon}'_{ij} = \frac{1}{2\hat{G}(s)}\hat{\sigma}'_{ij}, \quad \hat{\varepsilon}_{kk} = \frac{1}{K}\hat{\sigma}_{kk} + \hat{\varepsilon}_0(s),$$

где символом ˆ обозначены образы по Лапласу;

$$s \to q,\ \hat{\varepsilon}_0(s) = \frac{\beta_0}{s(s-a_0)} + 3F(s),\ F(s) \to \alpha(T - T_0),\ \hat{G}(s) = G\,\frac{s-a_0}{s-d},\ d = a_0 - 2c_0 G \qquad (2.1)$$

(стрелка означает соответствие по Лапласу). Таким образом, задача о прямом превращении в пространстве изображений сводится к упругой с начальной объемной деформацией $\hat{\varepsilon}_0(s)$.

Решение задачи сводится к следующему. Если заданы, вообще говоря, переменные объемные силы $F_i(t)$, правые части силовых $T_i^0(t)$ ($\sigma_{ij}n_j = T_i^0(t)$ на S_T) и кинематических $u_i^0(t)$ ($u_i = u_i^0(t)$ на S_u) граничных условий, то эти величины представляются как функции монотонно уменьшающейся температуры $T(t)$: $F_i = F_i(T)$, $T_i^0 = T_i^0(T)$, $u_i^0 = u_i^0(T)$. С использованием соотношения (1.2) эти величины выражаются как функции q, которые продолжаются через точку $q = 1$ произвольным образом (лишь бы существовали преобразования Лапласа от соответствующих функций). Обычно выбираются простейшие продолжения. Например, функции, постоянные на интервале $0 < q < 1$, считаются постоянными на всей оси $q > 0$. Далее определяются образы по Лапласу $F_i(q) \to \hat{F}_i(s)$, $T_i^0(q) \to \hat{T}_i^0(s)$, $u_i^0(q) \to \hat{u}_i^0(s)$, которые и будут объемными силами, силовыми и кинематическими граничными условиями в эквивалентной упругой задаче. Находя ее решение в виде функции модуля сдвига $\hat{G}(s)$, начальной объемной деформации $\hat{\varepsilon}_0(s)$ и величин $\hat{F}_i(s)$, $\hat{T}_i^0(s)$, $\hat{u}_i^0(s)$ и переходя к оригиналам, можно получить решение задачи о прямом превращении.

В дальнейшем понадобятся образы по Лапласу для соответствующих упругих постоянных:

$$\hat{E}(s) = E\,\frac{s - a_0}{s - \beta}, \quad \hat{\nu}(s) = \nu\,\frac{s - \gamma}{s - \beta}, \quad \hat{D}(s) = D\,\frac{(s - a_0)(s - \beta)}{(s - d)(s - \delta)}. \tag{2.2}$$

Здесь $\beta = a_0 - 2c_0E/3$; $\gamma = a_0 - Ec_0/(3\nu)$; $\delta = a_0 - c_0E/(3(1-\nu))$; E, ν, D — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и цилиндрическая жесткость. Легко видеть, что при $0 < \nu \leqslant 0{,}5$, $a_0 > 0$, $c_0 > 0$ выполняются неравенства

$$a_0 > \delta \geqslant \beta \geqslant d \geqslant \gamma, \tag{2.3}$$

причем для несжимаемых материалов ($\nu = 0{,}5$) $\delta = \beta = d = \gamma$.

3. Пусть один конец стержня постоянного поперечного сечения и длины L из сплава с памятью формы, находящегося в аустенитном состоянии при температуре T_0, закреплен, а другому сообщено в пределах упругих деформаций продольное перемещение u_0, и в этом новом положении он также закреплен. Растянутый таким образом стержень охлаждается через интервал температур (M_1, M_2), что должно вызвать релаксацию напряжений, так как фазовая деформация развивается в сторону действующего напряжения.

Решение соответствующей упругой задачи при наличии начальной объемной деформации ε_0 имеет вид $\sigma = E(\delta_0 - (1/3)\varepsilon_0)$, где $\delta_0 = u_0/L$. Заменяя здесь модуль упругости и объемную деформацию на выражения $\hat{E}(s)$ и $\hat{\varepsilon}_0(s)$ (2.1), (2.2), для напряжения в пространстве изображений получим

$$\hat{\sigma}(s) = E\left[\frac{\delta_0(s - a_0)}{s(s - \beta)} - \frac{\beta_0}{3s(s - a_0)} - F(s) + \frac{2c_0E}{3}\,\frac{F(s)}{s - \beta}\right].$$

Переходя к оригиналам, можно найти зависимость напряжения от температуры:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{1}{\beta}\left(a_0 + \frac{\beta_0}{3\delta_0} - \lambda\frac{\varepsilon_2}{\delta_0}\right) \quad \frac{\alpha(T - T_0)}{\delta_0} - \left[\frac{1}{\beta}\left(\lambda\left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\delta_0}\right) + \frac{\beta_0}{3\delta_0}\right) + \frac{6\lambda\varepsilon_1}{\pi\delta_0}I(q)\right]\exp(\beta q). \tag{3.1}$$

Здесь $\sigma_0 = E\delta_0$; $\lambda = 2Ec_0/3$; $\varepsilon_1 = \alpha(M_1 - M_2)$; $\varepsilon_2 = \alpha(M_1 - T_0)$;

$$I(q) = \int\limits_0^q \arcsin(\tau)\exp(-\beta\tau)d\tau. \tag{3.2}$$

На рис. 1 сплошными линиями показана зависимость $S = \sigma/\sigma_0$ от q для никелида титана [3] (кривая *1*) и сплава CuAlMnCo [4] (кривая *2*). В первом случае

$$\begin{gathered} a_0 = 0{,}718, \quad c_0 = 0{,}243 \cdot 10^{-3}, \quad \beta_0 = 0{,}0011 \ \ [6, 7], \\ E = 28000\,\text{МПа}, \quad \alpha = 0{,}6 \cdot 10^{-5} \ \ [9], \quad M_1 = 50\,^\circ\text{C}, \quad M_2 = 25\,^\circ\text{C}. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Для сплава на основе меди [4]

$$\begin{gathered} a_0 = 0{,}257, \quad c_0 = 0{,}152 \cdot 10^{-3}, \quad \beta_0 = 0{,}117 \cdot 10^{-3} \ \ [6, 7], \\ E = 7000\,\text{МПа}, \quad \alpha = 0{,}143 \cdot 10^{-4}, \quad M_1 = -27\,^\circ\text{C}, \quad M_2 = -34\,^\circ\text{C} \ \ [10]. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Первоначальное растяжение в обоих случаях производилось при температуре $T = M_1$ и начальной деформации $\delta_0 = 0{,}002$.

Как видно из приведенных графиков, при снижении температуры напряжения падают до нуля при некотором значении $q = q^*$, зависящем от параметров материала и начальной деформации δ_0. При $\delta_0 = 0{,}002$ для никелида титана $q^* = 0{,}434$, а для сплава CuAlMnCo $q^* = 0{,}743$. С уменьшением δ_0 значение q^* падает.

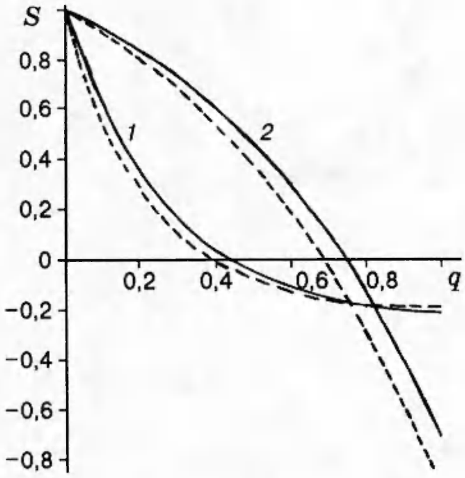

Рис. 1

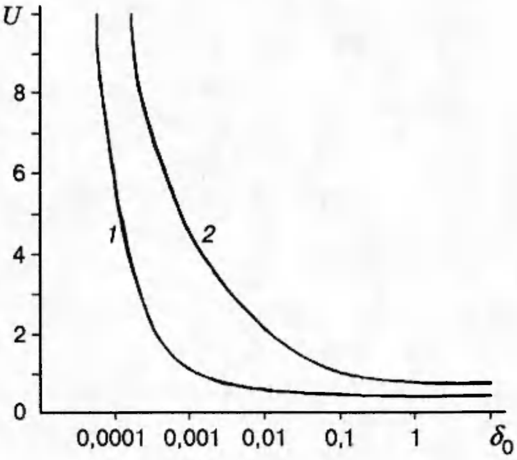

Рис. 2

При дальнейшем охлаждении в первоначально растянутом стержне развиваются сжимающие напряжения, что является следствием ориентированного превращения, из-за которого, хотя при $q = q^*$ напряжения и равны нулю, скорость фазовой деформации отлична от нуля и положительна. Отношение сжимающего напряжения при $q = 1$ к исходному значению растягивающего напряжения только за счет ориентированного превращения доходит до 0,62 для сплава CuAlMnCo и до 0,21 для никелида титана (эти значения получены из формулы (3.1) при $\delta_0 \to \infty$, когда обращаются в нуль слагаемые, связанные с фазовой объемной и температурной деформациями). Этот эффект растет с уменьшением δ_0 (усиливается за счет объемной фазовой деформации и изменения температуры). Температурное сжатие из-за охлаждения, с одной стороны, при $q > q^*$ уменьшает модуль сжимающих напряжений, а с другой — при $q < q^*$ температурные растягивающие напряжения увеличивают последующий эффект ориентированного превращения. Вычисления показывают, что последнее влияние преобладает. При $\delta_0 \to 0$ $|S(1)| \to \infty$.

Пусть теперь закрепление другого конца стержня носит односторонний характер, когда он может свободно увеличивать свою длину свыше $L + u_0$, но не может стать короче $L + u_0$. Здесь граничное условие имеет вид $u(L) = u_0$ при $\sigma < 0$ и $u(L) > u_0$ при $\sigma = 0$. Для этой задачи решение (3.1) справедливо лишь при $q \leqslant q^*$. При дальнейшем охлаждении стержень удлиняется за счет ориентированного превращения и развития фазовой объемной деформации и сокращается за счет температурных деформаций. Далее будет показано, что удлинение за счет первых двух факторов превосходит укорочение за счет третьего. Тогда стержень будет деформироваться в свободном от напряжений состоянии. Упругая деформация равна нулю, а фазовая $\varepsilon^2(q)$ может быть найдена путем интегрирования уравнений (1.1) при $\sigma_{ij} = 0$. В результате полная деформация определяется по формуле

$$\varepsilon(q) = (\varepsilon^2(q^*) + \beta_0/3a_0)\exp[a_0(q - q^*)] - \beta_0/3a_0 + \alpha(T - T_0).$$

Выражая величину фазовой деформации при $q = q^*$ через заданное начальное смещение u_0 ($\varepsilon^2(q^*) = u_0/L - \alpha(T - T_0)$), для перемещений свободного конца стержня при $q \geqslant q^*$ получим

$$u = u_0 \exp[a_0(q - q^*)] + L[\beta_0/3a_0 - \alpha(T - T_0)][\exp(a_0(q - q^*)) - 1]. \qquad (3.5)$$

Согласно этой зависимости, при $q > q^*$ выполняется $u > u_0$, т. е. стержень действительно будет деформироваться в свободном от напряжений состоянии.

На рис. 2 приведена зависимость относительного дополнительного смещения $U = (u - u_0)/u_0$ от начальной деформации δ_0 при полном превращении ($q = 1$). Кривая *1* соответствует никелиду титана, *2* — сплаву CuAlMnCo. При $\delta_0 \to 0$ $U \to \infty$ (за счет объемной деформации фазового превращения и температурного слагаемого). При $\delta_0 \to \infty$ величина U асимптотически стремится к значению $\exp[a_0(1 - q^*)] - 1$, соответствующему учету только фазовой деформации изменения формы. Как видно, дополнительное смещение, связанное с ориентированным превращением, может существенно превосходить исходное значение u_0.

4. Аналогично решается задача о бесконечной плоскости с круглым отверстием радиуса a (плоское напряженное состояние) из материала с памятью формы. В отверстие вставляется жесткая круглая шайба радиусом $a + W_0$. Предположим, что контур шайбы жестко скреплен (сварен) с контуром отверстия, что отвечает граничному условию в виде заданного радиального смещения W_0 на контуре отверстия. Решение соответствующей упругой задачи при наличии начальной объемной деформации ε_0 имеет вид

$$W = \frac{aW_0}{r} + \frac{1}{3}\varepsilon_0\Big(r - \frac{a^2}{r}\Big), \quad \sigma_r = -\sigma_\theta = 2G\,\frac{a}{r^2}\Big(W_0 - \frac{a\varepsilon_0}{3}\Big), \tag{4.1}$$

где r — радиус; W — радиальное смещение; σ_r и σ_θ — радиальное и кольцевое напряжения. Заменяя в этих выражениях модуль G и объемную деформацию ε_0 на соответствующие операторы $\hat{G}(s)$ и $\hat{\varepsilon}_0(s)$ (2.1) и переходя к оригиналам, получим

$$\begin{gathered} W = \frac{aW_0}{r} + \Big(r - \frac{a^2}{r}\Big)\Big(\frac{1}{a_0}[\exp(a_0q) - 1]\,\frac{\beta_0}{3} + \alpha(T - T_0)\Big), \\ \sigma_r = -\sigma_\theta = \sigma_0\Big\{\frac{a_0 - g\exp(qd)}{d} - \frac{1}{\delta_0}\Big[\frac{\beta_0/3 + g\varepsilon_1}{d}\,(\exp(qd) - 1) + \\ + \alpha(T - T_0) + \frac{2g\varepsilon_2}{\pi}\,\exp(qd)I(q)\Big]\Big\}. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Здесь $\sigma_0 = -2aGW_0/r^2$ — функция, дающая распределение радиальных напряжений в упругой задаче; $g = 2Gc_0$; $\delta_0 = W_0/a$; интеграл $I(q)$ определяется зависимостью (3.2).

На рис. 1 штриховыми линиями показана зависимость отношения $S = \sigma_r/\sigma_0$ от q для значений параметров материала, характерных для никелида титана (3.3) (кривая *1*) и сплава CuAlMnCo (3.4) (кривая *2*), при этом $\delta_0 = 0{,}002$. Как видно из графиков, изменение напряжений с ростом q качественно аналогично и количественно незначительно отличается от решения для напряжений в предыдущей задаче.

Пусть сцепление между контурами шайбы и отверстия отсутствует, т. е. граничное условие на контуре отверстия имеет вид $W = W_0$ при $\sigma_r < 0$ и $W > W_0$ при $\sigma_r = 0$. В этой задаче решение (4.2) справедливо лишь для $q \leqslant q^*$. При $q = q^*$, согласно второй формуле (4.1), все компоненты напряжений в каждой точке полуплоскости обращаются в нуль. При дальнейшем охлаждении материал благодаря ориентированному превращению будет свободно деформироваться в ненапряженном состоянии. Рассуждая так же, как и в предыдущей задаче, для радиального смещения контура отверстия W имеем

$$W = W_0\exp[a_0(q - q^*)] + a[\beta_0/3a_0 - \alpha(T - T_0)][\exp(a_0(q - q^*)) - 1]. \tag{4.3}$$

Формула (4.3) получается из (3.5) путем замены длины стержня L на радиус отверстия a.

Тем не менее относительное смещение W/W_0 в задаче о плоскости с отверстием при одинаковых значениях относительного начального смещения и q несколько отличается от u/u_0 в задаче о стержне, поскольку значения q^* в этих задачах различны. Однако в качественном отношении поведение решений обеих задач одинаково. В частности, диаметр отверстия в полуплоскости после прямого превращения может существенно превышать диаметр шайбы так, что их отношение стремится к бесконечности при $\delta_0 \to 0$.

5. Несколько сложнее смоделировать эксперимент, с помощью которого был обнаружен эффект ориентированного превращения [1]. Рассматривается тонкая прямоугольная полоса из сплава с памятью формы в аустенитном состоянии, защемленная на одном конце. Другому концу сообщается с помощью одностороннего воздействия жесткой подставки смещение W_0 (оно может свободно увеличиваться, но не может уменьшаться). После этого полоса охлаждается через интервал температур прямого мартенситного превращения. В [1] обнаружено, что, начиная с некоторой промежуточной температуры T_1, при дальнейшем охлаждении полосы она отходит от подставки, и другой ее конец совершает дополнительное перемещение, направленное в ту же сторону, что и W_0. Температура T_1 не зависит от начального прогиба W_0. Результирующий прогиб W_1, достигаемый при охлаждении до фиксированной температуры, пропорционален начальному прогибу W_0 [1].

При решении задачи изгиба в рамках гипотезы Кирхгофа — Лява можно пренебречь влиянием на прогиб объемной фазовой и температурной деформаций. Решение упругой задачи о цилиндрическом изгибе прямоугольной полосы, заделанной на одном конце и смещенной на W_0 на противоположном, имеет вид

$$W = \frac{W_0}{2L^2}\Big(3x^2 - \frac{x^3}{L}\Big), \quad M_x = -\frac{3DW_0}{L^3}(L-x), \quad M_y = -\frac{3\nu DW_0}{L^3}(L-x), \quad P = \frac{3DW_0}{L^3}.$$

Здесь L — длина полосы; x — продольная координата; M_x, M_y — изгибающие моменты; P — приходящаяся на единицу ширины полосы сосредоточенная поперечная сила, действующая со стороны подставки на пластину при $x = L$.

Применяя преобразование Лапласа в пространстве изображений для задачи, в которой положение конца пластины фиксировано с двух сторон, и используя выражения для $\hat{D}(s)$ и $\hat{\nu}(s)$ (2.2), получим

$$\frac{\widehat{M}_x(s)}{x-L} = \hat{P}(s) = \frac{3W_0D}{L^3}\,\frac{(s-a_0)(s-\beta)}{s(s-d)(s-\delta)}; \tag{5.1}$$

$$\frac{\widehat{M}_y(s)}{x-L} = \frac{3W_0\nu D}{L^3}\,\frac{(s-a_0)(s-\gamma)}{s(s-d)(s-\delta)}. \tag{5.2}$$

После перехода к оригиналам имеем

$$P(q) = (3W_0D/L^3)f_1(q), \quad M_x(q) = P(q)(x-L); \tag{5.3}$$

$$f_1(q) = A\exp(dq) + B\exp(\delta q) + C; \tag{5.4}$$

$$A = \frac{d^2 - d(a_0+\beta) + a_0\beta}{d(d-\delta)}, \quad B = \frac{\delta^2 - \delta(a_0+\beta) + a_0\beta}{\delta(\delta-d)}, \quad C = \frac{a_0\beta}{d\delta}. \tag{5.5}$$

Согласно (5.3) и неравенству (2.3), сила P уменьшается с ростом q. При некотором значении $q = q^*$, являющемся корнем уравнения $f_1(q) = 0$ и не зависящем от W_0, сила P и изгибающий момент M_x обращаются в нуль вместе с напряжениями σ_x, после чего в задаче о двустороннем защемлении второго конца пластины сила P, необходимая для сохранения постоянства прогиба W_0, становится отрицательной и растет по абсолютной величине при дальнейшем охлаждении. Меняется также знак изгибающего момента M_x и соответствующих нормальных напряжений σ_x (так что на поверхности пластины, обращенной в сторону перемещения W_0, возникают растягивающие напряжения σ_x, а на противоположной стороне — сжимающие). Ясно, что этот эффект есть следствие ориентированного превращения. Для никелида титана с приведенными выше значениями характеристик $q^* = 0{,}563$, для сплава CuAlMnCo $q^* = 0{,}817$.

Переходя к оригиналам в формуле (5.2), для изгибающего момента M_y находим $M_y(q) = (3W_0\nu D/L^3)f_2(q)(x-L)$, где функция $f_2(q)$ вычисляется по формуле (5.4), но в выражениях для коэффициентов (5.5) необходимо заменить параметр β на γ. Используя неравенства (2.3), можно показать, что значение функции f_2 будет уменьшаться с ростом q, однако медленнее, чем значение f_1. Поэтому для сплава CuAlMnCo поперечный момент M_y, убывая с ростом q, остается положительным. В никелиде титана момент M_y и напряжения σ_y обращаются в нуль при $q = q^{**} = 0{,}687$ и при дальнейшем охлаждении меняют знак. Из-за несовпадения значений $q^{**} > q^*$ полной релаксации напряжений в пластине не будет ни при каком значении q.

В задаче с односторонним закреплением правого конца пластины полученное выше решение справедливо для $0 \leqslant q \leqslant q^*$. Решение для $q > q^*$ затруднено тем, что в пластине сохраняются отличные от нуля напряжения σ_y и входящие в уравнение для фазовой деформации компоненты девиатора напряжений не только не равны нулю, но и меняются в процессе деформирования. Поэтому в данном случае для решения задачи об одностороннем закреплении при $q > q^*$ применяется преобразование Лапласа. Для определения прогиба при $q > q^*$ может быть решена задача о действии на правый конец рассматриваемой пластины силы $P_1(q)$, меняющейся по закону $P_1(q) = (3W_0D/L^3)f_1(q)$ при $q < q^*$ и $P_1(q) = 0$ при $q > q^*$. Решение соответствующей эквивалентной упругой задачи для прогиба правого конца имеет вид

$$\hat{W}(s) = L^3\hat{P}_1(s)/(3\hat{D}(s)). \tag{5.6}$$

Здесь образ по Лапласу от функции $P_1(q)$ проще всего найти по определению

$$\hat{P}_1(s) = \frac{3W_0D}{L^3}\int\limits_0^{q^*} f_1(q)\exp(-sq)dq =$$

$$= \frac{3W_0D}{L^3}\,\frac{A\delta\exp(q^*d) + Bd\exp(q^*\delta) - C\delta d + Cs(d+\delta)}{s(d-s)(\delta-s)}\exp(-sq^*). \tag{5.7}$$

Подставляя (5.7) в (5.6) и переходя к оригиналам, получим

$$\frac{W_1}{W_0} = \frac{(a_0+\lambda)\exp[\beta(q-q^*)] - (\beta+\lambda)\exp[a_0(q-q^*)]}{a_0-\beta}, \tag{5.8}$$

$$\lambda = Ad\exp(q^*d) + B\delta\exp(q^*\delta).$$

Решение значительно упрощается для несжимаемого материала ($\nu = 0{,}5$):

$$W_1 = W_0\exp[a_0(q-q^*)]. \tag{5.9}$$

Соотношение (5.9) справедливо, если речь идет не о пластине, а об ориентированном превращении в изгибаемой балке. Поскольку, согласно (5.8) или (5.9), при $q > q^*$ выполняется неравенство $W_1 > W_0$, то правый конец пластины действительно отходит от подставки.

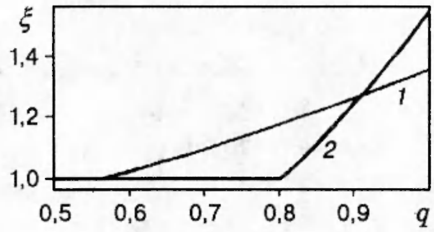

Рис. 3

Так как q^* не зависит от W_0, то, согласно полученному решению, температура, при которой начинается отход, одинакова для всех W_0, что соответствует экспериментальным данным [1]. Согласно полученным решениям, при фиксированном значении q прогиб W действительно пропорционален W_0, как это и наблюдается в эксперименте [1].

На рис. 3 приведена рассчитанная по формуле (5.8) зависимость $\xi = W/W_0$ от q для никелида титана (кривая *1*) и сплава CuAlMnCo (кривая *2*). Интересно отметить, что для материальных постоянных, характерных для этих сплавов, значения, найденные по формулам (5.8) и (5.9), отличаются в третьем знаке.

6. Рассматривается контактная задача о штампе с параболическим основанием (профиль $y = x^2/(2R)$), прижатым силой P к полуплоскости из материала с памятью формы в аустенитном состоянии. Нормальные смещения точек плоскости и штампа одинаковы, касательные напряжения между ними отсутствуют. Осуществляется охлаждение через интервал температур прямого мартенситного превращения. Необходимо найти закон изменения прижимающей силы P, обеспечивающий постоянство размера зоны контакта $2L$.

Упругое решение задачи для давления под штампом S имеет вид [11]

$$S = \left(\frac{G}{1-\nu}\,\frac{L^2 - 2x^2}{2R} + \frac{P(q)}{\pi}\right)(L^2 - x^2)^{-0,5}, \tag{6.1}$$

где $P(q)$ — неизвестная внешняя сила, действующая на штамп. Переходя к эквивалентной упругой задаче, получим

$$\hat{S}(s) = \left(\frac{G}{1-\nu}\,\frac{(s-a_0)(s-\beta)}{s(s-d)(s-\delta)}\,\frac{L^2-2x^2}{2R} + \frac{\hat{P}(s)}{\pi}\right)(L^2 - x^2)^{-0,5}$$

($\hat{P}(s)$ — образ по Лапласу от функции $P(q)$). После перехода к оригиналам

$$S(q,x) = \left(\frac{G}{1-\nu}\,f_1(q)\,\frac{L^2-2x^2}{2R} + \frac{P(q)}{\pi}\right)(L^2 - x^2)^{-0,5}$$

(функция $f_1(q)$ определяется формулой (5.4)). Здесь удалось так просто решить задачу с переменной нагрузкой только потому, что слагаемое, пропорциональное нагрузке в решении (6.1), не зависит от упругих постоянных. Записывая условие ограниченности давления при $x = L$, находим искомое соотношение

$$P(q) = \frac{G}{1-\nu}\,\pi f_1(q)\,\frac{L^2}{2R}. \tag{6.2}$$

Согласно (6.2), при охлаждении сила, требуемая для сохранения постоянной площадки контакта, уменьшается, обращаясь в нуль при $q = q^*$, где q^* есть корень уравнения $f_1(q) = 0$. В этой точке силовое взаимодействие между штампом и полуплоскостью отсутствует, однако скорость деформации отлична от нуля вследствие ориентированного превращения. Из-за этого при дальнейшем охлаждении сила, необходимая для поддержания заданной площадки контакта, становится отрицательной, т. е. материал как бы «затягивает» штамп в себя. Разумеется, этот вывод справедлив лишь в рассматриваемой постановке задачи, когда точки штампа не могут отходить от соответствующих точек полуплоскости. В задаче о прямом превращении при фиксированной силе P, действующей на штамп, зависимость полуразмера площадки контакта L от q может быть найдена исходя из уравнения (6.2). В результате получается, что при охлаждении размер площадки контакта растет, стремясь к бесконечности при $q \to q^*$. Это также есть следствие ориентированного превращения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01406).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Витайкин Е. З., Литвин Д. Ф., Макушев С. Ю., Удовенко В. А.** Структурный механизм эффекта памяти формы в сплавах MnCu // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229, № 3. С. 597–600.
2. **Лихачев В. А., Кузьмин С. Л., Каменцева З. П.** Эффект памяти формы. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987.
3. **Кузьмин С. Л., Лихачев В. А., Шиманский С. Р., Чернышенко А. И.** Эффект ориентированного превращения в никелиде титана // Физика металлов и металловедение. 1984. Т. 57, вып. 3. С. 612–614.
4. **Лихачев В. А., Малинин В. Г., Овчаренко С. Я.** Деформация ориентированного превращения сплава CuAlMnCo // Материалы с новыми функциональными свойствами. Материалы семинара. Новгород, 1990.
5. **Мовчан А. А.** Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 197–205.
6. **Мовчан А. А.** Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 2. С. 173–181.
7. **Мовчан А. А.** Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47–53.
8. **Мовчан А. А.** Микромеханический подход к проблеме описания анизотропных рассеянных повреждений // Изв. РАН. МТТ. 1990. № 3. С. 115–123.
9. **Корнилов И. И., Белоусов О. К., Качур Е. В.** Никелид титана и другие сплавы с эффектом «памяти». М.: Наука, 1977.
10. **Liang C., Rogers C. A.** One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials // J. Intelligent Mater. System and Struct. 1990. V. 1, N 2. P. 207- 234.
11. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 21/VII 1995 г.