ПМТФ, № 2, 1963

# К ТОЧНЫМ РЕШЕНИЯМ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

*Г. И. Назаров*

*(Томск)*

Видоизмененным методом Бергмана рассмотрены общие точные решения уравнений, описывающие потенциальное движение газа, находящегося в магнитном поле, перпендикулярном к плоскости течения и имеющем бесконечную проводимость. Решения находятся для функции тока в переменных годографа скорости как для дозвукового, так и сверхзвукового движения газа (процесс адиабатический). Решена задача о соударении газовых струй в магнитном поле и задача об истечении газа из сосуда с насадком. Показано, что конечные ряды Бергмана для сверхзвукового течения газа представляют собой точные решения для течений гипотетических газов, предложенных С. А. Христиановичем и Г. А. Домбровским.

1. **Основные формулы.** Известно [1], что уравнения магнитной газодинамики для идеального газа с бесконечной проводимостью при стационарном режиме движения и адиабатическом процессе в безразмерных величинах имеют вид

$$\nabla \frac{q^2}{2} + \operatorname{rot} \mathbf{q} \times \mathbf{q} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho}\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

$$\operatorname{div} \rho\mathbf{q} = 0, \qquad \operatorname{rot}(\mathbf{q} \times \mathbf{H}) = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \qquad p = \rho^\gamma \tag{1.1}$$

$$H = a_0 \sqrt{\rho_0} H_1, \qquad q = a_0 q_1, \qquad p = \rho_0 a_0^2 p_1, \qquad \rho = \rho_0 \rho_1 \qquad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4\right)$$

Здесь $H$ — напряженность магнитного поля, $q$ — скорость потока, $p$ — давление, $\rho$ — плотность, $\rho_0$ — плотность газа в точке торможения, $a_0$ — скорость звука.

Рассмотрим задачу о потенциальном движении газа в магнитном поле, перпендикулярном к плоскости течения, поставленную в работе [2]. В этом случае $\mathbf{H} = H(x, y)\, \mathbf{k}^\circ$ и $\operatorname{div} \mathbf{H} \equiv 0$ (переопределенность системы (1.1) исчезает). Кроме того, имеем также равенство $(\mathbf{H} . \nabla)\boldsymbol{q} = 0$ и третье уравнение (1.1) заменяется на $\operatorname{div} H\boldsymbol{q} = 0$. Сопоставляя это уравнение со вторым уравнением (1.1), получим $H = b\rho$ ($b = \mathrm{const}$, $b$ характеризует величину напряженности). Пользуясь уравнением неразрывности, вводим функцию тока, а затем скалярным умножением первого уравнения (1.1) на орт касательной и на орт нормали к линии тока систему (1.1) сведем к виду

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad p = \rho^\gamma \tag{1.2}$$

$$\frac{q^2}{2} + \frac{\gamma\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} + \frac{b^2\rho}{4\pi} = h \qquad \left(h = \frac{\gamma}{\gamma-1} + \frac{b^2}{4\pi}\right) \tag{1.3}$$

Здесь $\psi$ — функция тока, $\varphi$ — потенциал скорости. Уравнение (1.3) представляет интеграл Бернулли.

Переходя обычным путем [3] от $x$, $y$ к новым независимым переменным $s$, $\theta$ ($s = s(q)$, $\theta$ — угол наклона скорости к оси $x$), получим формулу

$$dz = \left(d\varphi + \frac{i}{\rho}d\psi\right)\frac{e^{i\theta}}{q} \tag{1.4}$$

и систему уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\sqrt{K}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \sqrt{K}\frac{\partial\psi}{\partial s} \tag{1.5}$$

Здесь $K = K(s) = K(q) = K(\rho)$ — функция Чаплыгина; причем

$$K = \frac{4\pi\gamma(\gamma+1)\rho^{\gamma-1} + 3(\gamma-1)b^2\rho - 8\pi h(\gamma-1)}{(\gamma-1)\rho^2(4\pi\rho^{\gamma-1}+b^2\rho)} \tag{1.6}$$

$$s = -\int_{\rho_*}^{\rho} \frac{(\gamma-1)(4\pi\gamma\rho^{\gamma-2}+b^2)\rho\sqrt{K}d\rho}{2[4\pi(\gamma-1)h - 4\pi\gamma\rho^{\gamma-1} - (\gamma-1)b^2\rho]} \tag{1.7}$$

Аддитивная постоянная в (1.7) выбрана так, чтобы $s = 0$ при $\rho = \rho_*$ ($\rho_*$ — плотность в той точке потока, в которой скорость совпадает со скоростью звука).

Функции $K(\rho, b)$ и $s(\rho, b)$ могут быть вычислены для каждого $b$. Исключая функцию $\varphi$ из (1.5), получим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + N(s)\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0 \qquad \left(N = \frac{1}{2}\frac{d\ln K}{ds}\right) \tag{1.8}$$

Для $K > 0$ уравнение (1.8) эллиптического типа, а для $K < 0$ — гиперболического типа. При $K < 0$ обычно вводится замена $s = it + s_0$ и уравнения (1.5), (1.8) для сверхзвукового движения газа принимают вещественный вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sqrt{\chi}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \sqrt{\chi}\frac{\partial\psi}{\partial s} \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{2}\frac{d\ln\chi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \qquad (\chi = -K > 0) \tag{1.10}$$

Переходя в (1.10) к характеристическим переменным $2\xi = t - \theta$, $2\eta = t + \theta$, получим

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta} + T(t)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) = 0 \qquad \left(T = \frac{1}{4}\frac{d\ln\chi}{dt}\right) \tag{1.11}$$

Из интеграла Бернулли следует формула

$$M^2 = \frac{2}{\gamma}\left(h - \frac{b^2\rho}{4\pi}\right)\rho^{1-\gamma} - \frac{2}{\gamma-1} \qquad \left(M = \frac{q}{a}\right) \tag{1.12}$$

При отсутствии магнитного поля ($b = 0$) формулы (1.6), (1.7) и (1.12) переходят в известные соотношения обычной газодинамики [3]. Изучение движения газа в магнитном поле, перпендикулярном к плоскости течения, проводится обычными методами газодинамики. Для примера решим две задачи видоизмененным методом Бергмана [4]. При дозвуковом движении газа решение уравнения (1.8) ищем в виде ряда

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(s, \theta) f_n(s) \tag{1.13}$$

Здесь $\Phi_n(s, \theta)$ — произвольные гармонические функции ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Беря производные от (1.13) по $s$ и $\theta$ и внося их в (1.8), удовлетворим это уравнение при произвольной функции от двух переменных $\Phi_0(s, \theta)$, если на функции $\Phi_n$, $f_n$ наложим условия, аналогичные условиям Бергмана [4,5]

$$2f_0' + Nf_0 = 0, \qquad \frac{\partial\Phi_n}{\partial s} = \Phi_{n-1} \tag{1.14}$$

$$2f_n' + Nf_n = -(f_{n-1}'' + Nf_{n-1}') \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.15}$$

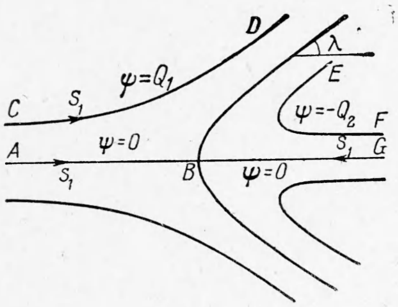
Функции $\Phi_n$ и $f_n$ выражаются через предыдущие функции и в конечном счете соответственно через $\Phi_0$ и $f_0$, причем $\Phi_0(s, \theta)$ удовлетворяет уравнению Лапласа для несжимаемой жидкости $\Delta\Phi_0(s, \theta) = 0$.

При определении функций $\Phi_n$ и $f_n$ достаточно ограничиться частными решениями этих уравнений и записать их в виде [4]

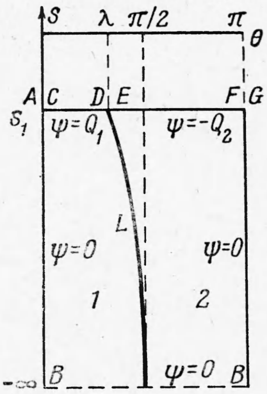
$$f_0 = K^{-1/4}, \qquad f_n = -\frac{f'_{n-1}}{2} - \frac{K^{-1/4}}{8}\int K'K^{-3/4}f'_{n-1}ds, \qquad \Phi_n = \int \Phi_{n-1}ds \qquad (1.16)$$

Здесь величины $K'$ и $f'_{n-1}$ — произвольные по $s$.

Функции $f_n(n = 0, 1, 2,\ldots)$ могут быть вычислены при помощи формул (1.6), (1.7) для каждого $b$ и затабулированы. Сходимость ряда (1.13) и его первых производных по $s$ и $\theta$ для функции (1.6) при адиабатическом процессе доказывается аналогично тому, как это сделано в работе [5] для обычного газа.




Фиг. 1




Фиг. 2

2. **Задача о соударении двух струй газа.** Пусть имеется дозвуковое встречное соударение плоских струй газа в магнитном поле, перпендикулярном к плоскости течения в среде с постоянным давлением $p_1$, как это указано на фиг. 1. В силу симметрии рассматриваем только верхнюю половину течения. Исследование характеристик среды сводится к интегрированию уравнения (1.8) при следующих граничных условиях (фиг. 2)

$$\begin{aligned} &\psi = 0 && (-\infty < s < s_1,\ \theta = 0)\\ &\psi = Q_1 && (s = s_1,\ 0 < \theta < \lambda)\\ &\psi = -Q_2 && (s = s_1,\ \lambda < \theta < \pi)\\ &\psi = 0 && (-\infty < s < s_1,\ \theta = \pi) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Здесь $Q_1$, $Q_2$ — полурасходы газов в каждой струе.

Учитывая условия конечности функции тока при $s = -\infty$, решение уравнения Лапласа для $\Phi_0$ возьмем в виде

$$\Phi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{ks} \sin k\theta \qquad (a_k = \mathrm{const})$$

Тогда решение (1.13) принимает вид

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \alpha_k(s) \sin k\theta \qquad \left(\alpha_k(s) = e^{ks}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(s)}{k^n}\right) \qquad (2.2)$$

Функция (2.2) удовлетворяет первому и четвертому условиям (2.1). Чтобы удовлетворить и другим условиям (2.1), используем теорию рядов Фурье для определения $a_k$. Таким образом, можно записать

$$\psi = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k \alpha_k(s) \sin k\theta}{k\alpha_k(s_1)} \tag{2.3}$$

Здесь

$$b_k = 2Q_1 \sin^2 \frac{k\lambda}{2} + Q_2 [(-1)^k - \cos k\lambda] \tag{2.4}$$

Найдем уравнения свободных струй $CD$ и $EF$. Применим формулу (1.4) к линии тока $CD$, на которой $\psi = Q_1$, $s = s_1$, $0 < \theta < \lambda$. Тогда, учитывая (1.5) и (2.3), получим

$$dz = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{K_1}}{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k \alpha_k'(s_1) \sin k\theta e^{i\theta}}{k\alpha_k(s_1)} d\theta \qquad \left(\alpha_k' = \frac{d\alpha_k}{ds}\right) \tag{2.5}$$

Выделяя Re и Im в (2.5) и интегрируя по $\theta$, получим параметрическое уравнение линии $CD$

$$x = c_1 - \frac{K_1^{1/2}}{\pi q_1}\left[\sum_{k=2}^{\infty} A_k \left(\frac{\cos(k+1)\theta}{k+1} + \frac{\cos(k-1)\theta}{k-1}\right) + \frac{A_1}{4}\cos 2\theta\right]$$

$$y = h_1 + \frac{K_1^{1/2}}{\pi q_1}\left[\sum_{k=2}^{\infty} A_k \left(\frac{\sin(k-1)\theta}{k-1} - \frac{\sin(k+1)\theta}{k+1}\right) + A_1\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]$$

Здесь

$$A_k = \frac{\pi}{2} \frac{b_k \alpha_k'(s_1)}{\alpha_k(s_1)} \qquad (c_1 = \mathrm{const})$$

Аналогично для линии свободной струи $EF$, на которой $\psi = -Q_2$, $s = s_1$, $\lambda < 0 < \pi$, получим параметрические формулы

$$x = c_2 - \frac{K_1^{1/2}}{\pi q_1}\left[\sum_{k=2}^{\infty} A_k \left(\frac{\cos(k+1)\theta}{k+1} + \frac{\cos(k-1)\theta}{k-1}\right) + \frac{A_1}{4}\cos 2\theta\right] \qquad (c_2 = \mathrm{const})$$

$$y = h_2 + \frac{K_1^{1/2}}{\pi q_1}\left[\sum_{k=2}^{\infty} A_k \left(\frac{\sin(k-1)\theta}{k-1} - \frac{\sin(k+1)\theta}{k+1}\right) + A_1\left(\theta - \pi - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]$$

Между углом $\lambda$ слившейся струи и постоянными $c_1$, $c_2$, $h_1$, $h_2$ имеют место соотношения

$$\cos\lambda = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}, \qquad c_1 - c_2 = (h_1 - h_2)\sin\lambda$$

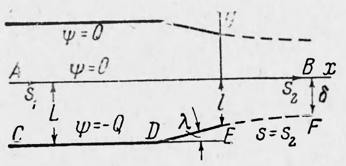
В случае, если соударяющиеся газы имеют одинаковую ширину ($h_1 = h_2$), то слившаяся струя будет отклоняться под прямым углом к оси $x$ ($\lambda = \pi/2$) и функция тока представится в виде

$$\psi = \frac{\pi Q_1}{q_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2(2k-1)}(s) \sin 2(2k-1)\theta}{2(2k-1)\alpha_{2(2k-1)}(s_1)}$$

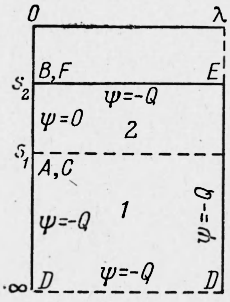
Эта формула аналогична с выражением для $\psi$, полученным методом Чаплыгина в работе [6] для прямого удара плоской струи в безграничную стенку при отсутствии магнитного поля. Аналогично решается задача о соударении двух струй различных газов [7].

3. **Вытекание газа из сосуда.** Пусть струя газа в рассматриваемом магнитном поле вытекает с дозвуковой скоростью из прямоугольного сосуда конечной ширины $2L$, ограниченного двумя параллельными стенками, уходящими в одну сторону в бесконечность и снабженного воронкообразным насадком с шириной на выходе $2l$, как указано на фиг. 3. Из такого сосуда в свободное пространство выходит под давлением газ в виде струи. Поставим задачу определения коэффициента сжатия.

Допустим, что $\psi = 0$ вдоль оси симметрии $AB$, а вдоль сложной границы $CDEF$ функция $\psi = -Q$ ($Q$ — полурасход газа). В силу симметрии задачи рассматриваем только нижнюю половину течения. Предполагаем также, что в удаленных точках сосуда на бесконечности, откуда выходит газ, скорость задана $q_1$, а в точках свободной границы она равна $q_2$ ($q_2 > q_1$). В точке $D$ скорость газа равна нулю. Л. Н. Сретенский [8], решая такую задачу для обычного газа методом Чаплыгина, заменяет точку нулевой скорости небольшой областью спокойного (застойного) газа, преобразовывает ряды Чаплыгина в определенные интегралы и в результате представляет решение для функции тока в сложном виде. Нельзя не согласиться с замечанием М. И. Гуревича [9] о том, что вряд ли такой подход обладает преимуществом. Решим эту задачу методом Бергмана.



Фиг. 3



Фиг. 4

Имеем следующие граничные условия:

$$\psi = -Q, \quad (\theta = 0, \ -\infty < s < s_1), \qquad \psi = -Q \quad (\theta = \lambda, \ -\infty < s < s_2)$$
$$\psi = -Q, \quad (0 < \theta < \lambda, \ s = s_2), \qquad \psi = 0 \quad (\theta = 0, \ s_1 < s < s_2) \tag{3.1}$$

Следуя идее С. В. Фальковича [10], конструируем решение для функции тока $\psi(s, \theta)$ в виде (см. также [4])

$$\psi_1 = -Q + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \alpha_k(s) \sin \omega\theta$$
$$\psi_2 = -\frac{Q\theta}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \alpha_k(s) + B_k \beta_k(s)] \sin \omega\theta \tag{3.2}$$

Здесь $a_k$, $A_k$, $B_k$ — постоянные, $\omega = k\pi/\lambda$, а $\alpha_k(s)$ и $\beta_k(s)$ определяются формулами

$$\alpha_k(s) = e^{\omega s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(s)}{\omega^n}, \qquad \beta_k(s) = e^{-\omega s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n f_n(s)}{\omega^n} \tag{3.3}$$

Функция $\psi_1$ определена в области 1, а $\psi_2$ — в области 2 (фиг. 4). В области 2 всюду $s \neq -\infty$ и, следовательно, в ней $\exp(-\omega s) \neq \infty$ при всех значениях $s$.

Постоянные $a_k$, $A_k$, $B_k$ находятся из условий аналитического продолжения функции $\psi$ через границу областей 1 и 2, на которой $s = s_1$

$$\psi_1(s_1, \theta) = \psi_2(s_1, \theta), \qquad \frac{\partial\psi_1(s_1, \theta)}{\partial s} = \frac{\partial\psi_2(s_1, \theta)}{\partial s}$$

и дополнительного условия на границе $EF$

$$\psi_2(s_2, \theta) = -Q$$

Из этих условий имеем

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k - A_k)\alpha_1 - B_k\beta_1]\sin\omega\theta = \frac{Q}{\lambda}(\lambda - \theta)\\ \sum_{k=1}^{\infty}[(a_k - A_k)\alpha_1' - B_k\beta_1']\sin\omega\theta = 0\\ \sum_{k=1}^{\infty}[A_k\alpha_2 + B_k\beta_2]\sin\omega\theta = -\frac{Q}{\lambda}(\lambda - \theta)\end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь и ниже введены обозначения

$$\alpha_k(s_i) = \alpha_i, \qquad \beta_k(s_i) = \beta_i, \qquad \alpha_k'(s_i) = \alpha_i', \qquad \beta_k'(s_i) = \beta_i' \qquad (i = 1, 2)$$

Разлагая функцию $\theta(\lambda - \theta)/\lambda$ в ряд Фурье в интервале $0 < \theta < \lambda$ и определяя коэффициенты этого ряда, а затем разрешая уравнения (3.4) относительно постоянных, найдем

$$\begin{gathered}a_k = \frac{2Q}{k\pi\alpha_2\Delta_1}(\alpha_2\beta_1' - \alpha_1'\beta_2 - \Delta_1), \qquad B_k = \frac{2Q\alpha_1'}{k\pi\Delta_1}\\ A_k = -\frac{2Q}{k\pi\alpha_2}\left(1 + \frac{\alpha_1'\beta_2}{\Delta_1}\right) \qquad (\Delta_1 = \alpha_1\beta_1' - \beta_1\alpha_1')\end{gathered} \tag{3.5}$$

Определим теперь коэффициент сжатия струи. На линии $EF$ имеем $d\psi = 0$, $s = s_2$, тогда из (1.4) находим

$$y - l = -\frac{K_2^{1/2}}{q_2}\int_{\lambda}^{\theta}\sin\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)_{s=s_2}d\theta, \qquad x = \frac{K_2^{1/2}}{q_2}\int_{\lambda}^{\theta}\cos\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)_{s=s_2}d\theta \tag{3.6}$$

Формулы (3.6) определяют вид свободной струи параметрически ($\theta$ — параметр).

Сжатие струи определим из формулы

$$l - \delta = -\frac{K_2^{1/2}}{q_2}\int_{0}^{\lambda}\sin\theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)_{s=s_2}d\theta \tag{3.7}$$

В рассматриваемом случае нужно положить $\psi = \psi_2$, так как свободная граница (фиг. 3) входит в область 2.

Беря частную производную по $s$ от $\psi_2$ в (3.2), внося ее в (3.7) и интегрируя, получим в учетом (3.5)

$$l - \delta = \frac{Q}{\pi}\frac{K_2^{1/2}}{q_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_k(\alpha_1'\Delta_2 + \alpha_2'\Delta_1)}{k\alpha_2\Delta_1\cdot(\omega^2 - 1)} \tag{3.8}$$

Здесь

$$t_k = (\omega + 1)\sin(\omega - 1)\lambda - (\omega - 1)\sin(\omega + 1)\lambda$$

Расход газа в струе может быть выражен при помощи формулы

$$Q = \rho_2 q_2 \delta = \rho_1 q_1 L \tag{3.9}$$

Внося (3.9) в (3.8) и выделяя коэффициент сжатия $\mu = \delta / l$, получим

$$\mu = \pi \left[ \pi + \rho_2 K_2^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k (\alpha_1'\Delta_2 + \alpha_2'\Delta_1)}{k\alpha_2\Delta_1(\omega^2 - 1)} \right]^{-1} \tag{3.10}$$

К этому уравнению нужно присоединить условие (3.9), которое можно записать в виде

$$\mu = L\rho_1 q_1 / l\rho_2 q_2$$

При $\lambda = \pi/2$ имеем $\omega = 2k$, $t_k = 4k(-1)^{k-1}$; формула (3.10) определит сжатие струи при истечении газа из отверстия.

В случае бесконечно широкого сосуда (рассматриваем для простоты $\lambda = \pi/2$) $s_1 = -\infty$ (на бесконечности скорость равна нулю), тогда имеем

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \infty, \quad \alpha_1' = 0, \quad \Delta_1 = -\beta_1\alpha_1' \neq 0, \infty$$

Следовательно, из (3.5) для такого сосуда $a_k = A_k$, $B_k = 0$, $A_k = -2Q / k\pi\alpha_2$. Таким образом $\psi_2$ представляет функцию тока во всей рассматриваемой области

$$\psi(s, \theta) = -\frac{2Q}{\pi}\left[\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(s)}{k\alpha_k(s_2)} \sin\omega\theta\right]$$

Сжатие струи выражается формулой

$$\mu = \pi \left[ \pi + 8\rho_2 K_2^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^{k-1}\varphi_k(s_2)}{4k^2 - 1} \right]^{-1} \tag{3.11}$$

$$\left(\varphi_k(s) = 1 + \frac{1}{2k} \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(s)(2k)^{-n} \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(s)(2k)^{-n}\right)$$

Сравнивая (3.11) с известной формулой Чаплыгина [11]

$$\mu = \pi \left[ \pi + 8 \sum_{k=1}^{\infty} x_k(\tau_2) \frac{k(-1)^{k-1}}{4k^2 - 1} \right]^{-1} \tag{3.12}$$

$$\left(x_k(\tau) = 1 + \frac{\tau}{k}\frac{y_k'(\tau)}{y_k(\tau)}, \quad y_k(\tau) = F(a_k, b_k, 2k+1, \tau)\right)$$

а также сопоставляя выражения функций тока в задачах, рассмотренных методом Бергмана в работе [4], с аналогичными задачами, решенными методом Чаплыгина, приходим к выводу о том, что метод Бергмана в данном случае представляет собой видоизменение метода Чаплыгина на случай переменных $s, \theta$ с той только разницей, что в методе Чаплыгина функции тока выражаются через хорошо изученные гипергеометрические функции и иногда через сложного вида асимптотические функции Черри $\zeta(\tau)$ (см. [9], стр. 403) или малоудобные интегралы [8].

Метод Бергмана привлекает простотой используемых в нем функций $\exp(\pm\omega s)$ и определенным трафаретом при решении струйных задач, хотя и содержит малоизученные функции Бергмана $f_k(s)$. Он позволяет также просто установить связь с приближенными методами С. А. Христиановича и Г. А. Домбровского [4] и найти аналог при построении решения для чисто сверхзвукового движения газа.

4. **Сверхзвуковое течение газа.** При сверхзвуковом движении газа решение уравнения (1.11) ищем в виде ряда

$$\psi(t,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(t,\theta)\,f_n(t) \tag{4.1}$$

Здесь $R_n(t,\theta)$ — произвольные функции, удовлетворяющие волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 R_n}{\partial \theta^2}=0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{4.2}$$

Отсюда следует, что

$$R_n=\Phi_n(\xi)+F_n(\eta) \qquad (2\xi=t-\theta,\ 2\eta=t+\theta) \tag{4.3}$$

Беря производные по $t$ и $\theta$ от (4.3), внося их в (1.11) и учитывая (4.2), получим уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(\Phi_n'+F_n')(f_n'+Tf_n)+(\Phi_n+F_n)(f_n''+2Tf_n')]=0 \tag{4.4}$$

которое удовлетворится при двух произвольных функциях $\Phi_0(\xi)$, $F_0(\eta)$, если на функции $\Phi_n$, $F_n$, $f_n$ наложить условия, аналогичные формулам (1.14), (1.15)

$$f_0'+Tf_0=0, \qquad f_n'+Tf_n=-(f''_{n-1}+2Tf'_{n-1}) \tag{4.5}$$

$$\Phi_n=\int\Phi_{n-1}(\xi)\,d\xi, \qquad F_n=\int F_{n-1}(\eta)\,d\eta \tag{4.6}$$

Не умаляя общности решения, как и ранее, ограничимся только частными решениями уравнений (4.5), тогда получим формулы

$$f_0=\chi^{-1/4}, \qquad f_n=-f'_{n-1}-\frac{\chi^{-1/4}}{4}\int\chi'\chi^{-3/4}f'_{n-1}\,dt \tag{4.7}$$

Здесь штрих обозначает производную по $t$. Эти функции также могут быть затабулированы.

Если в (4.1) рассматривать конечные ряды ($n=0,1,2,\ldots,\nu$), то уравнение (4.4) удовлетворится при дополнительном условии

$$f_\nu''+2Tf_\nu'=0 \tag{4.8}$$

В этом случае системы (4.5), (4.8) будут совместны, если считать $\chi$ искомой функцией. Это приводит к той или иной аппроксимации функции Чаплыгина, а формула (4.1) с конечными рядами представляет точное решение для некоторого гипотетического газа. Рассмотрим несколько примеров. Положим $\nu=0$, тогда из (4.5) и (4.8) имеем систему

$$f_0'+Tf_0=0, \qquad f_0''+2Tf_0'=0 \tag{4.9}$$

Учитывая выражение $T$ из формулы (1.11), определяем общее решение из первого уравнения (4.9) в виде $f_0=a\chi^{-1/4}$ и вносим его во второе уравнение (4.9), тогда получим

$$\chi''-\frac{3}{4}\frac{\chi'^2}{\chi}=0$$

Отсюда, интегрируя, а затем используя (4.1), находим известную аппроксимацию и решение С. А. Христиановича [12]

$$\chi=[A(t+b)]^4, \qquad \psi=\frac{\Phi(\xi)+F(\eta)}{\xi+\eta+b} \tag{4.10}$$

Полагая $\nu = 1$, получим систему

$$f_0' + Tf_0 = 0, \qquad f_1'' + 2Tf_1' = 0, \qquad f_0'' + 2Tf_0' = -(f_1' + Tf_1) \tag{4.11}$$

Из первых двух уравнений (4.11) находим ($a, b, c = \text{const}$)

$$f_0 = a\chi^{-1/4} \qquad f_1 = c\int \chi^{-1/2}\, dt + b \tag{4.12}$$

Вносим функцию $T$ из (1.11) в третье уравнение (4.11)

$$\frac{4\chi}{\chi'} f_0'' + 2f_0' = -\left(\frac{4\chi}{\chi'} f_1' + f_1\right)$$

Возьмем от этого уравнения производную по $t$ и используем (4.12); тогда, полагая $a = c$, $b = 0$, для определения $\chi$ получим уравнение

$$\chi^2\chi'\chi''' - (\chi^2\chi'' + \chi\chi'^2 - 4\chi^{11/4})\chi'' + \left(\frac{15}{16}\chi'^2 - 3\chi^{7/4}\right)\chi'^2 = 0 \tag{4.13}$$

Интегрируя (4.13), найдем, что $\chi$ с точностью до аддитивной постоянной имеет тот же вид, что и (4.10), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой.

Если вместо (4.12) для $f_1$ взять частное решение $f_1 = c = \text{const}$, то из (4.11) имеем

$$f_0'' + 2Tf_0' = -cT$$

Вносим сюда $f_0$ по формуле (4.12) и $T$ из (1.11)

$$\chi\chi'' - \left(\frac{3}{4}\chi' + \frac{c}{a}\chi^{5/4}\right)\chi' = 0$$

Интегрируя это уравнение и внося результат в (4.1), находим аппроксимацию и решение Г. А. Домбровского [13]

$$\chi = [A \operatorname{tg} m(t + b)]^4$$

$$\psi = c\,[\Phi(\xi) + F(\eta)] + \frac{a}{A} \operatorname{ctg} m(\xi + \eta + b)\,[\Phi'(\xi) + F'(\eta)] \tag{4.14}$$

$$\left(\int \Phi_0(\xi)\, d\xi = \Phi(\xi), \quad \int F_0(\eta)\, d\eta = F(\eta)\right)$$

Здесь $2ma = cA$; $A$, $m$, $b$ — произвольные постоянные.

Функции (4.10) и (4.14) и соответствующие им решения использованы в работах [12, 13] для приближенного решения четырех основных краевых задач. Некоторые краевые задачи сверхзвуковой газодинамики решаются методом Фурье аналогично тому, как это сделано в § 2 и 3 или, например, в статье [14].

С возрастанием числа $\nu$ увеличивается число постоянных в аппроксимирующих функциях и тем самым увеличивается возможность добиться наилучшего совпадения функции Чаплыгина с функцией сравнения. Однако при практических расчетах целесообразнее иметь дело с приближенным решением уравнения (1.11), получающимся отсечением ряда (4.1) на члене $\nu$ и содержащим точное значение функции Чаплыгина. Выбор числа $\nu$ зависит от быстроты сходимости ряда для $\psi$, а последнее — от поведения функции $R_0(t, \theta)$, т. е. в итоге от краевых условий задачи.

Вместо условий (4.5) можно наложить также условия вида

$$f_0'' + 2Tf_0' = 0, \qquad f_n'' + 2Tf_n' = -(f_{n-1}' + Tf_{n-1})$$

$$\Phi_n = \frac{d\Phi_{n-1}}{d\xi}, \qquad F_n = \frac{dF_{n-1}}{d\eta} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и провести аналогичные построения. Те же общие решения (1.13), (1.16) и (4.1), (4.7) имеют место для всех задач, приводящихся к уравнениям типа Чаплыгина (1.5), (1.9) (обычная газодинамика), а также, например, задача о плоском вихревом движении газа в магнитном поле, параллельном скорости потока [15] и вихревые двухпараметрические задачи [16]. К задаче И. И. Ночевкиной [17] эти решения неприменимы, так как в [17,18] допущена существенная ошибка, связанная с пропуском одного уравнения для вихрей (см. [3], стр. 302), без которого переменная $\lambda(x,y)$ становится «произвольной» (см. [17], формула (13) на стр. 1222).

Поступила 20 X 1962

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТЛ, 1957.
2. Голицын Г. С. Плоские задачи магнитной гидродинамики. ЖЭТФ, 1958, № 34.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, 1950, стр. 372—375.
4. Назаров Г. И. Давление газовой струи на равнобокий клин. ПМТФ, 1962, № 1.
5. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. ИЛ, 1961, гл. V, § 5.
6. Слезкин Н. А. Об ударе плоской газовой струи в безграничную стенку. ПММ, 1952, т. 16, вып. 2.
7. Соломахова Т. С. Соударение двух газовых струй, движущихся навстречу одна другой. Вест. Московск. ун-та, серия 1, 1961, № 1.
8. Сретенский Л. Н. К теории газовых струй. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
9. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Госфизматиздат, 1961.
10. Фалькович С. В. К теории газовых струй. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
11. Чаплыгин С. А. О газовых струях. ГИТТЛ, 1949, стр. 75.
12. Христианович С. А. Приближенное интегрирование уравнений сверхзвукового течения газа. ПММ, 1947, т. 11, вып. 2.
13. Домбровский Г. А. Приближенное аналитическое решение плоской задачи сверхзвуковой газовой динамики. Оборонгиз, Сб. статей «Теоретическая гидромеханика», 1954, № 12, вып. 4.
14. Блюмкина И. А. О решении методом Фурье краевой задачи для уравнения $u_{yy} + K_y(y)\, u_{xx} = 0$ с данными на характеристике и линии вырождения. Вест. Ленингр. ун-та, 1962, № 1, вып. 1.
15. Юрьев И. М. К решению уравнений магнитной газодинамики. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
16. Ткалич В. С. Двухпараметрические движения в магнитной газодинамике. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
17. Ночевкина И. И. О приближенном методе исследования плоских вихревых течений в магнитной гидродинамике. ДАН СССР, 1959, т. 126, № 6.
18. Ночевкина И. И. Некоторые задачи магнитной гидродинамики с учетом конечной проводимости среды. Вестн. Московск. ун-та, серия физики и астрономии 1961, № 1.