

7. **Воннов О. В.** К теории утоньшения свободных пленок вязкой жидкости. — ПМТФ, 1974, № 3.
8. **Зорин З. М., Соболев В. Д., Чураев Н. В.** Измерение капиллярного давления и вязкости в кварцевых микрокапиллярах. — Докл. АН СССР, 1970, т. 193 № 3.
9. **Барбин М. Б.** О скорости и удельном коэффициенте скольжения жидкости о стенку. — Коллоидн. журн., 1973, т. 35, № 2.
10. **Железный Б. В.** К теории равновесного краевого угла. — Журн. физич. химии, 1974, т. 48, № 11.
11. **Френкель Я. И.** Кинетическая теория жидкостей. М., Изд-во АН СССР, 1946.
12. **Железный Б. В.** К гидродинамике наступающего мениска смачивающей жидкости. — Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 1.

УДК 532.5 : 532.13

О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ ЖИДКОСТИ НА ДИНАМИКУ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА

С. П. Левицкий, А. Т. Листров

(Воронеж)

Вопросам динамики газовых пузырьков в вязкоупругих жидкостях посвящен ряд работ, из которых отметим [1—4]. В [1, 2] численно изучены радиальные колебания газового пузырька в несжимаемой вязкоупругой жидкости модели Олдройда [5]. В работе [3] и независимо от нее в [4] найдено точное решение уравнения малых колебаний полости в среде Олдройда при периодическом изменении давления на бесконечности. Анализ колебаний пузырька в вязкоупругой жидкости осложняется особенностями предельных переходов в реологическом уравнении среды, представляющими существенный интерес для рассматриваемой задачи. Ниже обсуждаются эти особенности и на основе численного анализа точного решения, полученного в [3], исследуются характеристики малых колебаний пузырька в среде Олдройда.

Основные характеристики малых колебаний пузырька в вязкоупругой жидкости, полученные в [3], после приведения к безразмерной форме примут вид

$$(1) \quad D = \left\{ \frac{[\omega(\omega^2 - b) + (\lambda_1^{-1} + s_1)2\omega\delta]^2 + [(a\omega^2 - c) + (\lambda_1^{-1} + s_1)(\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)]^2}{[4\omega^2\delta^2 + (\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)^2][\omega^2(\omega^2 - b)^2 + (a\omega^2 - c)^2]} \right\}^{1/2};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = & - \frac{2\omega\delta[\omega^2(\omega^2 - b)^2 + (a\omega^2 - c)^2] + \omega(\omega^2 - b)(\lambda_1^{-1} + s_1) \times}{(\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)[\omega^2(\omega^2 - b)^2 + (a\omega^2 - c)^2] +} \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{\times [4\omega^2\delta^2 + (\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)^2]}{+ (\lambda_1^{-1} + s_1)(a\omega^2 - c)[4\omega^2\delta^2 + (\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)^2]}, \end{aligned}$$

$$a = \lambda_1^{-1} + 4\eta_0\lambda_2\lambda_1^{-1}, \quad b = 3k + 2\sigma(3k - 1) + 4\eta_0\lambda_1^{-1},$$

$$c = \lambda_1^{-1}[3k + 2\sigma(3k - 1)], \quad s_1 = A + B - a/3,$$

$$\mu = \sqrt{3}(A - B)/2, \quad \delta = -1/2(A + B) - a/3, \quad A = (-q/2 + \sqrt{Q})^{1/3},$$

$$B = (-q/2 - \sqrt{Q})^{1/3}, \quad Q = (p/3)^3 + (q/2)^2, \quad q = 2(a/3)^3 - 1/3ab + c,$$

$$p = b - 1/3a^2, \quad \sigma = \sigma^* (R_0^* p_\infty^*)^{-1}, \quad p_0 = p_0^* / p_\infty^*,$$

$$\eta_0 = \eta_0^* (\rho^* p_\infty^*)^{-1/2} / R_0^*, \quad T^* = R_0^* (\rho^* / p_\infty^*)^{1/2},$$

$$\omega = \omega^* T^*, \quad \lambda_1 = \lambda_1^* / T^*, \quad \lambda_2 = \lambda_2^* / T^*,$$

где D — амплитуда малых колебаний полости, отнесенная к акустическому давлению p_0 ; α — сдвиг по фазе между акустическим давлением и вынужденными колебаниями полости; $-s_1$ и $-\delta$ — коэффициенты затухания собственных колебаний полости с частотой μ ; ρ^* , η_0^* , λ_1^* , λ_2^* , σ^* — соответственно плотность, вязкость, время релаксации, время ретардации и коэффициент поверхностного натяжения жидкости; ω^* — частота акустического давления; p_∞^* — давление на бесконечности; k — показатель политропы; R_0^* — начальный радиус пузырька. Звездочкой помечены размерные величины.

Формулы (1) соответствуют случаю положительного дискриминанта Q характеристического уравнения для малых колебаний полости в вязкоупругой жидкости [3]

$$(2) \quad s^3 + as^2 + bs + c = 0.$$

Этот случай представляет наибольший интерес, так как соответствует осциллирующему режиму собственных колебаний пузырька.

С целью выяснения влияния параметров λ_1 и λ_2 на характер малых колебаний полости были проведены численные расчеты по формулам (1) на ЭЦВМ БЭСМ-4 при $\eta_0 = 0,01$; $\sigma = 0,001$; $k = 1,4$. Результаты представлены на фиг. 1—7.

На фиг. 1 приведены резонансные кривые для пузырька в жидкости Максвелла ($\lambda_2 = 0$) (1—4 соответствуют $\lambda_1 = 0; 0,25; 0,5; 0,75$); видно, что при увеличении λ_1 резонансная амплитуда колебаний резко возрастает. При больших значениях времени релаксации график зависимости $D = D(\omega)$ приближается к разрывной кривой, характерной для идеальной жидкости [6]. Это объясняется тем, что при $\lambda_1 \rightarrow \infty$ уравнение Олдройда

$$(3) \quad \tau_{ik} + \lambda_1 D \tau_{ik} / Dt = 2\eta_0 (e_{ik} + \lambda_2 D e_{ik} / Dt)$$

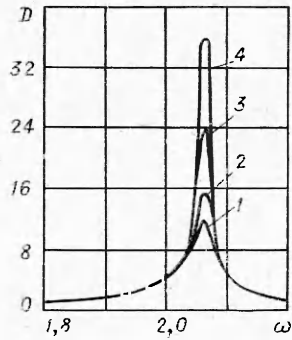
принимает вид $\tau_{ik} = \text{const}$. Здесь через τ_{ik} и e_{ik} обозначены тензор избыточных напряжений и тензор скоростей деформаций соответственно. Так как в начальный момент времени полость покоилась, то можно принять $\tau_{ik} = 0$. Это и означает, что тензор напряжений в жидкости становится шаровым.

Из фиг. 1 следует также, что отличия резонансных кривых 2—4 для жидкости Максвелла от кривой 1, соответствующей ньютоновской жидкости, проявляются лишь в узкой зоне вблизи резонансной частоты ω_r . Для $\omega \gg \omega_r$ и $\omega \ll \omega_r$ все кривые сливаются в одну.

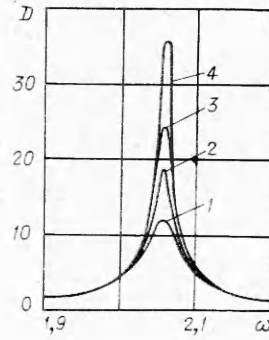
На фиг. 2 показаны зависимости $D = D(\omega)$ для среды Олдройда с $\lambda_1 = 0,75$, кривые 1—4 соответствуют значениям $\lambda_2 = 0,75; 0,4; 0,2; 0$; видно, что запаздывание скоростей деформаций (в противоположность релаксации напряжений) уменьшает амплитуду колебаний пузырька. При $\lambda_2 = \lambda_1$ резонансная кривая принимает такой же вид, как и в ньютоновской жидкости. В этом случае уравнение Олдройда описывает обычную вязкую жидкость. Действительно, для ньютоновской жидкости имеем

$$(4) \quad \tau_{ik} = 2\eta_0 e_{ik}.$$

Дифференцируя уравнение (4) по времени, умножая на произвольный параметр λ и складывая с исходным уравнением, получим уравнение (3)



Ф и г. 1



Ф и г. 2

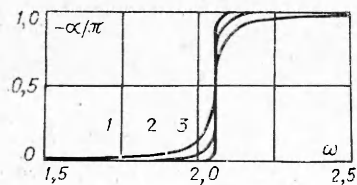
с $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Эта особенность среды Олдройда не отмечена, в частности, в работе [2], где ряд расчетов выполнен для различных, но равных друг другу значений λ_1 и λ_2 . При этом получены идентичные кривые, соответствующие ньютоновской жидкости.

Таким образом, при всех значениях λ_2 , удовлетворяющих неравенству $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, резонансная кривая для жидкости Олдройда заключена между двумя предельными кривыми, соответствующими жидкости Максвелла и ньютоновской жидкости.

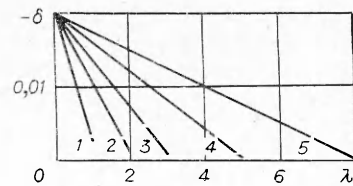
Требование положительной определенности произведения энтропии в среде Олдройда (см. [7]) приводит к условию $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Этому условию не удовлетворяют расчеты, приведенные в работе [4] в графическом виде для случаев $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$. В то же время уравнение Олдройда допускает предельный переход [3] при $\lambda_1 \rightarrow 0$ в реологическое уравнение вязкоупругой жидкости с ретардацией скоростей деформаций, для которой параметр λ_2 следует считать положительным. Строгое доказательство этого факта, основанное на термодинамическом анализе, проведено недавно в работе [8]. Уравнение с отрицательным λ_2 , известное в литературе как уравнение состояния Вальтерса [9], по причинам, указанным в [8], не описывает какую-либо реальную жидкость.

На фиг. 3 представлена зависимость угла сдвига фаз α от частоты акустического давления ω для пузырька в среде Максвелла. Кривые 1—3 соответствуют $\lambda_1 = 0; 1; 10$; видно, что характер изменения сдвига фаз при увеличении λ_1 приближается к скачкообразному на частоте $\omega = \omega_r$, соответствующему идеальной жидкости.

В связи с тем, что при $\lambda_1 = \lambda_2$ среда Олдройда переходит в ньютоновскую жидкость, целесообразно в качестве характеризующих среду параметров рассматривать величину λ_1 и разность $\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda$. На фиг. 4 показаны зависимости коэффициента затухания $-\delta$ от параметра λ , кривые 1—5 соответствуют $\lambda_1 = 1; 2; 3; 5; 8$. Все кривые выходят из одной

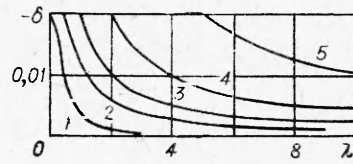


Ф и г. 3



Ф и г. 4

точки, так как значение $\lambda=0$ соответствует ньютоновской жидкости. Видно, что зависимость коэффициента затухания от параметра λ носит практически линейный характер, при этом величина $-\delta$ с ростом λ убывает. Кривые заканчиваются в точке с абсциссой $\lambda=\lambda_1$, поскольку дальнейший счет соответствовал бы отрицательным значениям λ_2 . При фиксированной величине λ увеличение λ_1 приводит к росту коэффициента затухания. Однако расчеты показывают, что при малых значениях λ_1 и λ среда Олдройда вполне характеризуется одним параметром λ .



Ф и г. 5

На фиг. 5 показаны зависимости коэффициента затухания $-\delta$ от λ_1 при фиксированных значениях λ_2 , кривые 1—5 соответствуют $\lambda_2=0; 0,5; 1; 2; 5$. При $\lambda_1 \rightarrow \infty$ величина $\delta \rightarrow 0$, что отвечает идеальной жидкости. Увеличение времени ретардации λ_2 при постоянном λ_1 приводит к росту коэффициента затухания, однако всегда коэффициент затухания в вязкоупругой жидкости меньше, чем в ньютоновской. Отметим также, что при увеличении λ_2 кривая зависимости коэффициента затухания от времени релаксации принимает более пологий характер.

На фиг. 6, а дана зависимость от λ_1 второго коэффициента затухания $-s_1$, специфичного для релаксирующей среды. Расчеты показывают, что величина s_1 незначительно зависит от времени ретардации λ_2 . При неограниченном возрастании λ_1 коэффициент затухания $-s_1$ монотонно убывает до нуля.

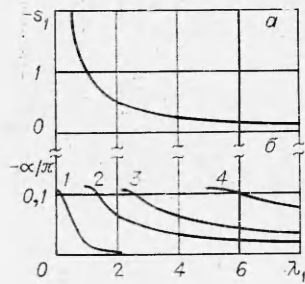
Как видно из фиг. 4—6, коэффициенты затухания $-\delta$ и $-s_1$ при всех значениях λ_1 и λ_2 являются положительными. В этой связи необходимо отметить одну неточность, допущенную в [4] при анализе характера малых колебаний полости в вязкоупругой жидкости. В этой работе указано, что при некоторых условиях может происходить неограниченный рост решения уравнения малых колебаний полости в жидкости Олдройда, что, по мнению авторов, и будет означать начало кавитации в звуковом поле малой амплитуды. Для этого необходимо, чтобы величины δ или s_1 , представляющие собой действительные части корней характеристического уравнения (2), были положительны. В [4] сформулированы неравенства, которым должны удовлетворять для этого параметры задачи. Можно убедиться, что уравнение (2) не имеет корней с положительными вещественными частями. Действительно, известные условия Рауса — Гурвица [10], являющиеся необходимыми и достаточными для того, чтобы все корни уравнения (2) имели отрицательные вещественные части, записываются в виде

$$b > 0, \quad c > 0, \quad ab > c.$$

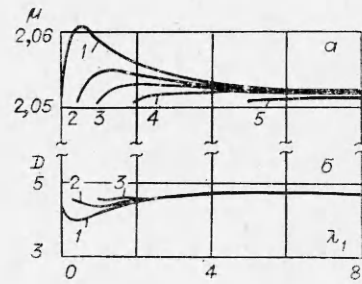
Первые два неравенства выполняются очевидным образом, а последнее эквивалентно соотношению

$$4\eta_0\lambda_1^{-1} \{ \lambda_1^{-1} + \lambda_2 [3k + 2\sigma(3k - 1) + 4\eta_0\lambda_1^{-1}] \} > 0,$$

которое также всегда имеет место. Поэтому ни при каких физически реализуемых условиях невозможно выполнение критериев начала кавитации, сформулированных в [4]. Коэффициенты затухания $-\delta$ и $-s_1$ всегда положительны, на что и было указано в [3]. Отметим, что вывод о возможности неограниченного роста пузырька в звуковом поле малой амплитуды был сделан также в работе [11], на которую имеется ссылка



Ф и г. 6



Ф и г. 7

в [4]. В статье [11] этот вывод был обусловлен коллизией некоторых параметров задачи и погрешностью при линейризации уравнения для радиуса пузырька.

На фиг. 6, б показана зависимость угла сдвига фаз α от λ_1 при фиксированной частоте $\omega=2$, кривые 1—4 соответствуют $\lambda_2=0; 1; 2; 5$; видно, что при увеличении времени релаксации λ_1 сдвиг по фазе между колебаниями полости и давления на бесконечности на данной частоте ω монотонно убывает. Наиболее крутой характер кривая $\alpha=\alpha(\lambda_1)$ имеет в жидкости Максвелла (кривая 1), при $\lambda_2 > 0$ кривая становится более полой. Увеличение времени релаксации приводит к возрастанию сдвига фаз, однако при всех значениях λ_2 сдвиг по фазе в жидкости Олдройда меньше, чем в ньютоновской жидкости. Отметим, что это относится лишь к дорезонансным частотам ($\omega < \omega_r$). При $\omega > \omega_r$ имеет место обратный результат (см. фиг. 3).

На фиг. 7, а, б даны зависимости от времени релаксации λ_1 собственной частоты колебаний μ и амплитуды D на дорезонансной частоте $\omega=2$. Кривые 1—5 соответствуют $\lambda_2=0; 0,5; 1; 2; 5$; видно, что собственная частота колебаний при возрастании λ_1 вначале растет, а затем монотонно убывает. Влияние релаксации приводит к уменьшению величины μ . Отметим, что собственная частота колебаний пузырька в жидкости Олдройда всегда больше, чем в ньютоновской жидкости, но меньше, чем в жидкости Максвелла.

Данные фиг. 7, б позволяют выявить некоторые особенности в изменении амплитуды колебаний на дорезонансной частоте при варьировании параметров λ_1 и λ_2 , которые не удалось изобразить в масштабе, выбранном на фиг. 1, 2. Видно, что при увеличении λ_1 амплитуда D вначале убывает и лишь затем монотонно возрастает, приближаясь при больших λ_1 к амплитуде колебаний пузырька на частоте $\omega=2$ в идеальной жидкости. Это, по-видимому, объясняется тем, что при малых значениях λ_1 рост собственной частоты колебаний μ (фиг. 7, а) и, следовательно, смещение резонансной кривой в область больших частот происходит быстрее, чем рост амплитуды колебаний. Увеличение времени релаксации в этой области изменения λ_1 приводит к увеличению амплитуды.

Таким образом, как показывает проведенный линейный анализ задачи, колебания пузырьков в вязкоупругих жидкостях вблизи резонансных частот должны развиваться интенсивнее, чем в ньютоновских.

Авторы благодарят В. Н. Николаевского за полезные советы и обсуждение полученных результатов.

Поступила 18 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Fogler H. S., Goddard J. D. Oscillations of a gas bubble in viscoelastic liquids subject to acoustic and impulsive pressure variations.—«J. Appl. Phys.», 1971, vol. 42, N 1.
2. Tanasawa I., Yang W. J. Dynamic behavior of a gas bubble in viscoelastic liquids.—«J. Appl. Phys.», 1970, vol. 41, N 11.
3. Левцкий С. П., Листров А. Т. Малые колебания газонаполненной сферической полости в вязкоупругих полимерных средах.— ПМТФ, 1974, № 1.
4. Yang W. J., Lawson M. L. Bubble pulsation and cavitation in viscoelastic liquids.—«J. Appl. Phys.», 1974, vol. 45, N 2.
5. Oldroyd J. G. Non-newtonian effects in steady motion of some idealized elasticoviscous liquids.—«Proc. Roy. Soc. Ser. A», 1958, vol. 245, N 1241.
6. Флинн Г. Физика акустической кавитации в жидкостях.— В кн.: Физическая акустика. Т. 1. М., «Мир», 1967.
7. Городцов В. А., Леонов А. И. О кинематике, неравновесной термодинамике и реологических соотношениях в нелинейной теории вязкоупругости.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
8. Dunn J. E., Fosdick R. L. Thermodynamics, stability and boundedness of fluids of complexity 2 and fluids of second grade.—«Arch. Rat. Mech. Anal.», 1974, vol. 56, N 3.
9. Walters K. The solution of flow problems in the case of materials with memory — «J. Méc.», 1962, vol. 1, N 4.
10. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
11. Houghton G. Theory of bubble pulsation and cavitation.—«J. Acoust. Soc. Amer.», 1963, vol. 35, N 9.

УДК 532.51

РЭЛЕЕВСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ В РЕЛАКСИРУЮЩИХ СРЕДАХ

В. Е. Накоряков, В. В. Соболев, О. Ю. Цвелодуб

(Новосибирск)

Рассматривается устойчивость установившегося течения в среде с нелокальной связью между давлением и плотностью. В линейном приближении выводятся уравнения для возмущений в такой среде. Приведены результаты численного интегрирования для сдвигового течения.

Устойчивость параллельных слоистых потоков в невязкой однородной жидкости изучается уже в течение ста лет. Был развит математический аппарат исследования невязкой неустойчивости и дано ее физическое объяснение. Первые важные результаты по устойчивости течений несжимаемой жидкости получены в работах Гельмгольца, Рэля и Кельвина [1] в прошлом веке. В 1920-х гг. этой проблемой занимался Гейзенберг [2], затем появился ряд интересных работ Толмина [3]. Одна из первых задач по устойчивости сжимаемой жидкости решена, по-видимому, Ландау [4]. Первые работы по устойчивости пограничного слоя идеального газа выполнены Лизом и Линем [5], Даном и Линем [6]. Следует отметить ряд работ, появившихся сравнительно недавно [7—9]. Во всех упомянутых работах исследовалась устойчивость течений в рамках классической однофазной гидродинамики. Между тем в последние годы интенсивно изучаются процессы распространения возмущений в средах с релаксацией [10—12].

1. Основные уравнения Рассмотрим задачу об устойчивости относительно малых возмущений установившегося течения жидкости со следующим уравнением состояния:

$$(1.1) \quad \delta p = c_0^2 \delta \rho + \beta d \delta \rho / dt + \kappa d^2 \delta \rho / dt^2,$$