ПМТФ, № 6, 1984

УДК 620.171.3

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ХРУПКОЙ ПРОЧНОСТИ С УЧЕТОМ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ

А. И. КОРШУНОВ, С. А. НОВИКОВ

(Москва)

Классический статистический подход к вопросу о вероятности хрупкого разрушения предполагает, что в исследуемом материале присутствует набор дефектов, который и определяет прочность образца, изготовленного из данного материала. При этом предполагается, что каждому конкретному дефекту может быть поставлена в соответствие своя местная прочность. Прочность всего образца (по крайней мере, при статическом нагружении) определяется прочностью того наиболее опасного дефекта, который в данном образце имеет минимальную прочность. Проявление масштабного эффекта (МЭ) заключается в том, что в образце большего объема вероятность встретить более опасный дефект увеличивается. Впервые подобное объяснение МЭ было изложено в [1], а математическая трактовка с использованием несколько разных подходов изложена сначала в [2], а позднее в [3].

В [2] вводится понятие вероятности разрушения S_0 единичного объема при напряжении σ, и на основе решения статистической задачи автор получает вероятность разрушения S при напряжении σ образца объемом V:

$$S = 1 - \mathrm{e}^{-Vn(\sigma)}, \tag{1}$$

где функция $n(\sigma)$ выбрана в виде

$$n(\sigma) = (\sigma/\sigma_0)^m, \tag{2}$$

(σ_0 и m — константы материала, подбираемые экспериментально). Далее, в [2] из уравнения (1) с учетом (2) получена следующая зависимость разрушающего напряжения от объема испытуемого образца:

$$\sigma_{\text{р}} = \sigma_0 I_m V^{-1/m},$$

где I_m — константа для данного напряженного состояния. В более общем виде

$$\sigma_{\text{р}} = A V^{-1/m}, \tag{3}$$

где $A = \sigma_0 I_m$.

Другой подход к решению данной задачи предлагается в [3], где находится вероятность $W(F)dF$ того, что в образце объемом V самым опасным окажется дефект с параметром $F \div F + \Delta F$

$$W(F)\,dF = \bar{n} V p(F) \left[\int\limits_F^\infty p(F)\,dF\right]^{\bar{n}V-1} dF,$$

где $\bar{n}$ — среднее количество дефектов в единице объема; $p(F)$ — плотность распределения величины параметра дефекта. Здесь под параметром дефекта понимается значение хрупкой прочности. Наиболее вероятное значение хрупкой прочности F^* образцов данного объема V определится в этом случае из условия максимума функции $\partial W(F)/\partial F = 0$.

Используя в качестве функции плотности распределения $p(F)$ функцию Гаусса, авторы работы [3] получили следующие уравнения для разрушающего напряжения в зависимости от объема испытуемого образца:

$$F^* = a + b/V,\quad F^* = F_0 - \sqrt{A\,\mathrm{tg}\,V + B}$$

соответственно для образцов «малого» и «большого» объемов. Здесь a, b, F_0, A, B — константы.

В данной работе предлагается решение статистической задачи о вероятности хрупкого разрушения с привлечением линейной механики разрушения и концепции наислабейшего звена [4]. Пусть хрупкий материал обладает каким-либо набором дефектов в виде эллиптических трещин Гриффитса. Тогда при прочих равных условиях прочность изготовленного из данного материала образца определится той трещиной, размер которой максимален.

Для решения задачи воспользуемся подходом, предложенным в [3], однако в качестве параметра дефекта примем не хрупкую прочность, а функцию, связанную с характерным размером трещины.

Пусть $F(\xi)$ — плотность распределения величины параметра дефекта. Предположим, что параметр ξ, физически не уточняемый, является возрастающей функцией $\xi(a)$, где a — характерный размер трещины. Предположим также, что функция $F(\xi)$ имеет область определения от ξ_1 до ξ_2. Вероятность того, что взятая наугад трещина имеет параметр ξ^*, равна $F(\xi^*)d\xi$, а вероятность, что трещина имеет параметр, меньший ξ^*, равна $\int_{\xi_1}^{\xi^*} F(\xi)d\xi$. В этом случае вероятность $P(\xi^*)d\xi$, выражающая, что в образце объема V имеется трещина с параметром ξ^* (при этом все остальные трещины имеют параметр меньше ξ^*), равна

$$P(\xi^*)\,d\xi = \bar{n}VF(\xi^*)\left[\int_{\xi_1}^{\xi^*} F(\xi)\,d\xi\right]^{\bar{n}V-1} d\xi,$$

где

$$P(\xi) = \bar{n}VF(\xi)\left[\int_{\xi_1}^{\xi} F(\xi)\,d\xi\right]^{\bar{n}V-1} \tag{4}$$

— соответствующая плотность распределения; $\bar{n}$ — среднее количество трещин в единице объема. Наиболее вероятное (модальное) значение максимальной величины параметра дефекта для образца заданного объема определится из уравнения

$$\partial P(\xi)/\partial\xi = 0. \tag{5}$$

Дифференцируя уравнение (4) с учетом (5), получаем

$$F(\xi)^2(\bar{n}V-1) + \int_{\xi_1}^{\xi} F(\xi)\,d\xi\,\frac{\partial F(\xi)}{\partial\xi} = 0. \tag{6}$$

Пусть $F(\xi)$ имеет нормальный закон распределения, т. е.

$$F(\xi) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\xi-m)^2}{2S^2}\right],$$

где S и m — параметры распределения. В этом случае

$$\xi_1 = -\infty,\ \frac{\partial F(\xi)}{\partial\xi} = -F(\xi)\frac{\xi-m}{S^2},\ \int_{-\infty}^{\xi} F(\xi)\,d\xi = \Phi^*\left(\frac{\xi-m}{S}\right),$$

где $\Phi^*((\xi-m)/S)$ — интеграл вероятностей. С учетом вышеизложенного уравнение (6) приводим к виду

$$\frac{\bar{n}V-1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-m}{S}\right)^2\right] - \left(\frac{\xi-m}{S}\right)\Phi^*\left(\frac{\xi-m}{S}\right) = 0. \tag{7}$$

Для решения полученного уравнения проведем следующие преобразования. Введем новые переменные:

$$N = \bar{n}V, \tag{8}$$

где N — общее количество трещин в испытуемом объеме;

$$t = (\xi - m)/S. \tag{9}$$

В этом случае уравнение (7) преобразуется к виду

$$N = \sqrt{2\pi}t\exp(t^2/2)\Phi^*(t) + 1. \tag{10}$$

Используя полученное уравнение, можно построить графически (фиг. 1) или получить в табулированном виде функцию $t = t(N)$. Тогда с учетом (8)—(10) получаем следующую зависимость наиболее вероятной максимальной величины параметра дефекта от объема испытуемого образца:

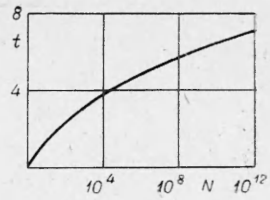
$$\xi = t(\bar{n}V)S + m. \tag{11}$$

Полученное значение ξ является модальным значением, соответствуя при этом квантилю порядка P распределения (4).

В этом случае квантиль порядка P разрушающего напряжения σ для соответствующего распределения находится из выражения

$$\sigma_p = f(a(\xi_P)), \tag{12}$$

где f — функция связи между разрушающим напряжением и характерным размером трещины; $a(\xi)$ — обратная функция от $\xi(a)$.



Фиг. 1

Перейдем теперь к определению разрушающего напряжения в зависимости от объема испытуемого образца, приняв в первом приближении, что σ_p соответствует среднему значению разрушающего напряжения. Рассмотрим бесконечное твердое тело с внутренней дискообразной трещиной диаметром a. В случае его растяжения напряжением σ имеем [5]

$$K_I = \sigma\sqrt{2a/\pi},$$

где K_I — коэффициент интенсивности напряжений. Так как диаметр трещины в рассматриваемом нами случае значительно меньше характерных размеров тела, то можно принять, что тело бесконечно, тогда выражение для разрушающего напряжения имеет вид

$$\sigma_p = K_{IC}\sqrt{\pi/2a}, \tag{13}$$

где K_{IC} — критический коэффициент интенсивности напряжений. В уравнении (13) под a принимаем величину a_p, и тогда, согласно уравнениям (11)—(13), с учетом вышесказанного допущения получаем следующую зависимость прочности образца от испытуемого объема:

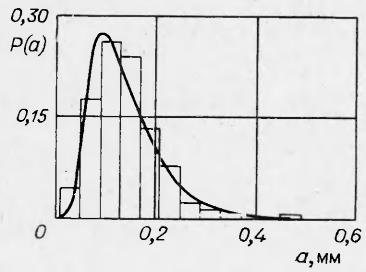
$$\sigma_p = K_{IC}\sqrt{\pi/[2a(t(\bar{n}V)S + m)]}. \tag{14}$$

Вид функции $\xi(a)$ удобно рассмотреть на примере микроструктуры пенопласта, при этом в качестве дефектов будем рассматривать поры, а в качестве характерного размера — диаметр пор. Преимуществом этого материала является то, что даже при небольшом увеличении можно достаточно точно оценить объемную плотность пор и их размеры [6]. На фиг. 2 приведена гистограмма для диаметра пор пенопласта ППУ-307 ($\gamma = 6{,}9$ кН/м³), которая достаточно хорошо подчиняется логарифмически нормальной функции распределения. Уравнение (14) преобразуется в этом случае к виду

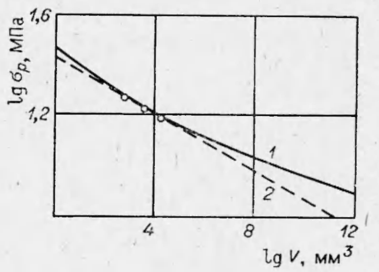
$$\sigma_p = K_{IC}\sqrt{\pi/[2\exp(t(\bar{n}V)S + m)]}. \tag{15}$$

В таблице приведены экспериментальные результаты при испытании на растяжение пенопласта ППУ-307 ($\gamma = 6{,}9$ кН/м³), а также аппроксимированные уравнением (15), при этом величины $\bar{n} = 206$ шт/мм³, $S = 0{,}524$, $m = -2{,}082$ получены из анализа микроструктуры, а $K_{IC} = 16{,}5$ Н/мм$^{3/2}$ — по результатам аппроксимации. Данные таблицы показывают хорошее совпадение эксперимента с расчетом и позволяют судить о достаточной надежности полученного уравнения. Полученное в результате аппроксимации значение $K_{IC} = 16{,}5$ Н/мм$^{3/2}$ совпадает по порядку величины со значениями K_{IC} для неметаллических материалов [7].

В качестве второго примера можно предложить спеченный материал с искусственно организованными дефектами, например ВНМ3-2*. Так, для ВНМ3-2 в эксперименте было получено значение прочности 536 и 455 МПа, расчетом — 547 и 445 МПа соответственно для объемов $2{,}83\cdot10^1$ и $4{,}71\cdot10^3$ мм³.



Фиг. 2



Фиг. 3

* Сплав ВНМ3-2 получают методом горячего прессования из порошков W, Ni и Cu, и поэтому, как и для пенопласта, здесь можно оценить количество дефектов и их распределение. В весовом соотношении материал содержит 3% Ni, 2% Cu, 95% W.

V, мм³	N, шт	t	σ_p, МПа (эксперимент)	σ_p, МПа (расчет)
$8{,}04\cdot10^2$	$1{,}74\cdot10^5$	4,40	18,6	18,5
$4{,}31\cdot10^3$	$9{,}31\cdot10^5$	4,75	16,9	16,9
$2{,}17\cdot10^4$	$4{,}69\cdot10^6$	5,06	15,5	15,6

Для описания произвольных результатов по МЭ без предварительного анализа микроструктуры уравнение (15) целесообразно привести к виду

$$\sigma_p = A \exp\,[-Bt(\overline{n}V)], \tag{16}$$

где $A = K_{IC} \sqrt{\pi/[2 \exp(m)]}$; $B = S/2$. Полученное уравнение позволяет описывать экспериментальные результаты при широком изменении испытуемого объема. Уравнение (16) в этом смысле более удобно, чем уравнения масштабной зависимости, полученные в [3]. Так, в [3] из-за ряда функциональных приближений было использовано два уравнения: одно для образцов «малого» объема, другое для «большого». Подобное разграничение является неудобным с точки зрения практического использования и не позволяет проводить экстраполяцию.

Представляет интерес сравнить уравнение (3) с полученным в данной работе (16). Уравнением (3) можно аппроксимировать результаты экспериментов для любого участка масштабной зависимости, однако, как показано в [8], оно не позволяет описать результаты при значительном изменении объема испытуемых образцов. Для устранения этого недостатка в [8] предлагается добавить к правой части уравнения (3) свободный член, что не укладывается в рамки теоретических предпосылок.

На фиг. 3 приведена зависимость изменения σ_p от объема образца для пенопласта ППУ-307 ($\gamma = 6{,}9$ кН/м³). Эти результаты аппроксимировались как уравнением (3) — кривая *2*, так и уравнением (16) — кривая *1*. Из фиг. 3 видно, что для уравнения (16) наблюдается уменьшение интенсивности МЭ $|\partial(\lg \sigma_p)/\partial(\lg V)|$ с увеличением испытуемого объема, что и наблюдается на практике [8]. Для уравнения же (3) интенсивность МЭ остается постоянной и равной $1/m$. Кривые *1* и *2* (см. фиг. 3) совпадают между собой при изменении объема примерно на три порядка. Отсюда вытекает, что в случае описания экспериментальных результатов масштабной зависимости при небольшом изменении объема можно пользоваться уравнением (3), однако при этом исключается экстраполяция. Полученное в данной работе уравнение (15) (или (16)) позволяет аппроксимировать экспериментальные результаты при значительно большем изменении испытуемого объема и проводить далекую экстраполяцию.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров А. П., Журков С. Н.** Явление хрупкого разрыва. М.— Л.: Гостехтеориздат, 1933.
2. **Weibull W.** A statistical theory of the strength of materials.— Roy. Swedish Inst. Engng Res. Proc., 1939, N 151.
3. **Конторова Т. А., Тимошенко О. А.** Обобщение статистической теории прочности на случай неоднородно-напряженного состояния.— ЖТФ, 1949, т. 19, № 3.
4. **Фрейденталь А. М.** Статистический подход к хрупкому разрушению.— В кн.: Разрушение. Математические основы теории разрушения. Т. 2. М.: Мир, 1975.
5. **Броек Д.** Основы механики разрушения. М.: Высш. школа, 1980.
6. **Павлов В. А.** Пенополистирол. М.: Химия, 1973.
7. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
8. **Матвеев А. В., Шлейфер Н. И., Константинов В. И.** Влияние размеров испытуемых образцов на величину прочности стекла марки К8.— Опт.-мех. промышленность, 1979, № 2.

Поступила 5/VIII 1983 г.