

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др. Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
2. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б., Истратов А. Г. О диффузионно-тепловой устойчивости ламинарного пламени // ПМТФ.— 1962.— № 4.
3. Ландау Л. Д. К теории медленного горения // ЖЭТФ.— 1944.— Т. 14, № 6.
4. Истратов А. Г., Либрович В. Б. О влиянии процессов переноса на устойчивость плоского фронта пламени // ПММ.— 1966.— Т. 30, № 3.
5. Germain P., Guiraud J.-P. Conditions de choc dans un fluid faiblement dissipatif en mouvement non stationnaire // C. r. acad. sci.— 1961.— V. 252, N 7.
6. Чечило И. М., Хвиливицкий Р. Я., Ениколопан И. С. О явлении распространения реакции полимеризации // ДАН СССР.— 1972.— Т. 204, № 5.
7. Жижин Г. В., Сегаль А. С. Гидродинамическая устойчивость цилиндрического фронта реакции, сопровождающейся сильным увеличением вязкости // ПМТФ.— 1988.— № 2.
8. Жижин Г. В., Сегаль А. С. Гидродинамическая устойчивость сферического фронта реакции, сопровождающейся сильным увеличением вязкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 3.
9. Бабаджанян А. С., Вольперт Вит. А., Вольперт Вл. А. и др. Фронтальные режимы протекания экзотермической реакции в сферических и цилиндрических реакторах.— Черногоровка, 1986.— (Препр./ОИХФ АН СССР).
10. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика.— М.: Физматгиз, 1963.— Ч. 2.
11. Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив.— М.: Наука, 1973.
12. Markstein G. H. Experimental and theoretical studies of flame front stability // J. Aeronaut. Sci.— 1951.— V. 18, N 3.
13. Kazlovitz B., Denniston D. W. Jr. and oth. Studies of turbulent flame // 4th Symp. Combust.— Baltimore: Williams and Wilkins.— 1953.

г. Ленинград

Поступила 31/VII 1990 г.

УДК 532.593

А. Н. Гаврилов, В. П. Коробейников

ДВИЖЕНИЕ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД В ТРУБАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ПОДВОДЕ МАССЫ И ЭНЕРГИИ

Рассматриваются одномерные нестационарные течения двухфазных сред, представляющих смесь идеального нетеплопроводного газа и твердых частиц. В автономной постановке решаются задачи о втекании двухфазной смеси в трубу переменного сечения, в которой находится другая смесь, причем смеси могут быть как инертными, так и горючими. Задача сведена к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с дополнительными условиями на внутренних поверхностях разрыва. Методом малого параметра решена неавтономная задача о втекании горючего газа в инертную двухфазную смесь.

1. Пусть в трубе переменного сечения находится покоящаяся смесь газа и твердых частиц. Движение газа с частицами рассматривается в рамках модели взаимопроникающих континуумов. Считается, что газ идеальный, нетеплопроводный, а частицы — несжимаемые и недеформируемые сферы одинакового радиуса. Не учитываются броуновское движение частиц, их объемная доля и соударения друг с другом. Между фазами имеется вязкое и тепловое взаимодействие.

В начальный момент времени в трубу через входное отверстие начинает поступать двухфазная смесь с другими частицами и газом. В результате возникает нестационарное движение обеих смесей, которое будем считать одномерным. Площадь поперечного сечения трубы меняется следующим образом: $F(r) = br^{\nu-1}$, $1 \leq \nu \leq 3$ (r — расстояние, отсчитываемое от входного отверстия, ν , b — постоянные, $\nu = 1, 2, 3$ для плоского, цилиндрического и сферического случаев).

Массовые расходы и поток энергии через входное отверстие с пренебрежимо малыми размерами аппроксимируем степенными функциями (1.1)

$$M_i(t) = bm_i t^\alpha, N(t) = bnt^\beta$$

(m_i, n, α, β — постоянные, $i = 1, 2$). Здесь и далее, если не оговорено противное, индекс 1 относится к газу, 2 — к частицам. Величины (1.1) в цилиндрическом и плоском случаях отнесены соответственно к единице длины и площади.

Примем начальное распределение плотностей фаз невозмущенной среды в трубе $\rho_{i0} = A_i r^{-\omega}$ (A_i, ω — постоянные). При отсутствии частиц и при $\omega = 0$ аналогичная задача впервые рассмотрена в [1]. Уравнения, описывающие движение смеси, имеют вид [2]

$$(1.2) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i v_i}{\partial r} + \frac{v-1}{r} \rho_i v_i = 0, \quad \rho_i \frac{d_i v_i}{dt} = (i-2) \frac{\partial p}{\partial r} + (-1)^i f,$$

$$\rho_i \frac{d_i e_i}{dt} = (-1)^i q + (2-i) \left[f(v_1 - v_2) - p \left[\frac{\partial v_i}{\partial r} + (v-1) \frac{v_i}{r} \right] \right],$$

$$\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial r}, \quad e_1 = c_v T_1, \quad e_2 = c T_2, \quad p = (\gamma - 1) \rho_1 e_1,$$

где ρ_i, v_i, e_i, T_i — плотность, скорость, внутренняя энергия и температура фазы; p — давление; c_v и c — теплоемкости; $f = H \rho_2 e_1^k (v_1 - v_2)$ — сила межфазного взаимодействия; $q = \sigma_1 H \rho_2 e_1^k (e_1 - e_2 c_v/c)$ — интенсивность теплового взаимодействия; H и σ_1 — характерные константы взаимодействия, причем σ_1 безразмерная, а размерность H представляется формулой $[H] = L^{-2k} T^{2k-1}$. Частицы считаются химически инертными.

Задача станет автомодельной [3], если при $\omega \neq 0$ пренебречь начальными энергиями фаз ($e_{i0} = 0$) и удовлетворить условиям

$$(1.3) \quad (1 + \alpha)(2 + v - \omega) = (v - \omega)(3 + \beta),$$

$$k = 0,5(1 - \delta)^{-1}, \quad \delta = 0,5(2 + \beta - \alpha).$$

При $e_{i0} \neq 0$ и выполнении условий (1.3) автомодельными будут только равновесные течения, исследованные в [4].

Введем безразмерные функции по формулам

$$(1.4) \quad V_i = v_i/v_{1s}, \quad R_i = \rho_i/\rho_{i0}, \quad \varepsilon_i = T_i/T_{1s}$$

(индекс s относится к параметрам газа на ударной волне). Эти функции зависят только от безразмерного параметра $\lambda = r/r_s$ ($r_s(t)$ — координата фронта ударной волны, распространяющейся по находившейся в трубе смеси). Согласно теории размерностей [3], $r_s(t) = \sqrt{n/m_1} t^\delta / \lambda_0$. Здесь λ_0 — безразмерная постоянная, которую в дальнейшем нужно будет определить. На ударной волне параметры частиц считаются непрерывными, а параметры газа определяются из условий Рэнкина — Гюгонно.

В безразмерных функциях (1.4) уравнения (1.2) примут вид

$$(1.5) \quad R_i S_i + \left(V_i' + \frac{v-1}{\lambda} V_i \right) R_i = 0,$$

$$2R_1 S_1 V_1' + (\gamma - 1) \left[(R_1 \varepsilon_1)' - \frac{\omega R_1 \varepsilon_1}{\lambda} \right] + G V_1 R_1 = -\kappa B R_2 \varepsilon_1^k (V_1 - V_2),$$

$$R_1 S_1 \varepsilon_1' - (\gamma - 1) \left[R_1' S_1 - \frac{\omega V_1 R_1}{\lambda} \right] \varepsilon_1 + G R_1 \varepsilon_1 =$$

$$= \kappa B R_2 \varepsilon_1^k \left[(V_1 - V_2) - \frac{1}{2} \sigma_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right],$$

$$2S_2 V_2' + G V_2 = B \varepsilon_1^k (V_1 - V_2), \quad S_2 \varepsilon_2' + G \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \sigma_2 B \varepsilon_1^k (\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

где $S_i = V_i - \frac{v+1}{2} \lambda$ ($i = 1, 2$); $G = \frac{\delta-1}{\delta} (\gamma + 1)$;

$$\kappa = A_2/A_1; \sigma_2 = \frac{c_v}{c} \sigma_1;$$

$$B = (\gamma + 1) H \left[\frac{2}{(\gamma + 1)^2} \right]^k \delta^{\delta/(1-\delta)} \left(\sqrt{\frac{n}{m_1}} \lambda_0 \right)^{1/(1-\delta)};$$

штрих обозначает производную по λ .

На ударной волне ($\lambda = 1$) параметры среды запишутся в форме

$$(1.6) \quad \begin{aligned} V_1(1) = \varepsilon_1(1) = 1, \quad R_1(1) = (\gamma + 1)/(\gamma - 1), \\ V_2(1) = \varepsilon_2(1) = 0, \quad R_2(1) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае возникновения ударной волны в среде задача сводится к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (1.5) с начальными условиями (1.6) на правом конце отрезка интегрирования $[0, 1]$ и дополнительными условиями на внутренних поверхностях разрыва.

Из-за большой размерности и сильной нелинейности уравнений полное качественное исследование задачи затруднено. Можно, однако, выявить особые множества системы (1.5), связанные с разрывами, и частично определить их свойства:

а) множество $V_1 = 0,5(\gamma + 1)\lambda$,

$$\varepsilon_1^k B \lambda R_2 [\sigma_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + 2(V_1 - V_2)^2] = 2\varepsilon_1 R_1 [\lambda G + (\gamma - 1)\omega]$$

соответствует контактному разрыву по газовой фазе, он реализуется при $v > \omega$, $\delta < 2/(2 + \gamma\omega - \omega)$;

б) множество $V_2 = 0,5(\gamma + 1)\lambda$ отвечает контактному разрыву по частицам; для того чтобы плотность твердой фазы ρ_2 имела на нем конечную величину, необходимо на этом разрыве выполнить условие $\varepsilon_1^k B (V_1 - V_2) = G V_2$, что осуществлялось при расчетах методом «стрельбы»;

в) поверхность $2\left(V_1 - \frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)^2 = \gamma(\gamma-1)\varepsilon_1$ является поверхностью слабых разрывов в газе: будучи подставленной в условия Рэнкина — Гюгонио, она переходит сама в себя.

При пересечении решения с поверхностью $(\gamma - 1)^2 \varepsilon_1 = 4\left(V_1 - \frac{\gamma+1}{2}\lambda\right)^2$ нужно сделать скачок на поверхность $\varepsilon_1 = 0$. Необходимость этой процедуры обоснована в [1].

При $\varepsilon_1 = 0$ уравнения (1.5) легко интегрируются:

$$\begin{aligned} c_i V_i^\delta &= \left(\delta V_i - \frac{\gamma+1}{2}\lambda \right)^\delta, \quad d_i R_i \left(V_i - \frac{\gamma+1}{2}\lambda \right) \lambda^{v-\omega-1} = \\ &= V_i^{\delta(v-\omega)/(\delta-1)}, \quad \varepsilon_2 = \text{const } V_2^2. \end{aligned}$$

Для определения скачка плотности газа на контактном разрыве по газу, скачка внутренней энергии частиц на контактном разрыве по частицам и постоянной λ_0 воспользуемся балансом массы и энергии:

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_i} R_i \lambda^{v-\omega-1} d\lambda &= \frac{m_i}{A_i(\alpha+1)} (\lambda_0 \sqrt{m_1/n})^{v-\omega} \quad (i = 1, 2), \\ \frac{2\delta^2}{(\gamma+1)^2} \int_0^1 \left\{ R_1 (V_1^2 + \varepsilon_1) + \kappa R_2 \left(V_2^2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \varepsilon_2 \right) \right\} \lambda^{v-\omega-1} d\lambda &= \\ &= \frac{n}{A_1(\beta+1)} \left(\lambda_0 \sqrt{\frac{m_1}{n}} \right)^{v-\omega+2} \end{aligned}$$

(λ_i — координата контактного разрыва по i -й фазе).

Решение задачи исследовалось численно. Расчет проводился для абсолютно одинаковых смесей с параметрами $\gamma = 1,4$, $\omega = 2$, $\delta = 0,7$.

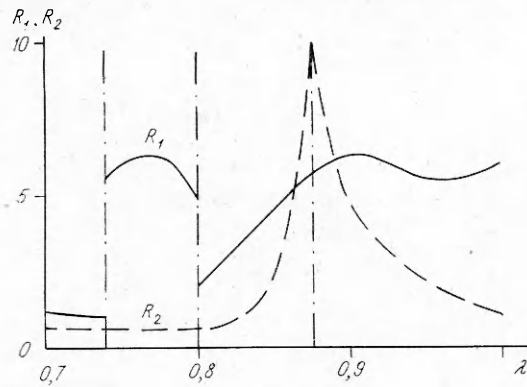


Рис. 1

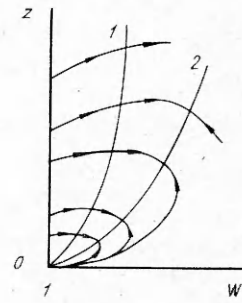


Рис. 2

Результаты представлены на рис. 1. Решение содержит две контактные поверхности и две ударные волны. Как и в задаче о взрыве [2], в возмущенной области возникает пик плотности частиц (ρ -слой).

2. Пусть теперь смесь, поступающая в трубу, является горючей (такая ситуация может иметь место в некоторых двигателях внутреннего сгорания). Тогда по ней могут распространяться волны детонации и фронты пламени. Пренебрежем кинетикой химических реакций и толщиной зоны, в которой они происходят. Автомодельными теперь будут равновесные течения ($V_1 = V_2 = V$, $e_1 = e_2 = e$); в этом случае двухфазную среду можно считать газом с приведенными параметрами ρ_* , γ_* [3]. При $\omega \neq 0$ условия автомодельности запишутся в виде $p_0 = 0$, $\alpha = \beta = \nu - \omega - 1$, $\delta = 1$. Задача, обратная данной (втекание инертного газа в область с горючей смесью), была рассмотрена в [5].

Введем новые функции z , W по формулам

$$W(\lambda) = vt/r, \quad z(\lambda) = \gamma pt^2/\rho r^2.$$

Как показано в [3], фактическое решение задачи заключается в исследовании поля интегральных кривых уравнения

$$(2.1) \quad dz/dW = \Phi(z, W, \gamma, \nu, \omega)$$

и анализа возможных разрывов. Правая часть (2.1) есть известная функция своих аргументов [3]. Поскольку движение инертного газа при $W < 1$ подробно изучено в [1, 4], достаточно рассмотреть движение горючей смеси по другую сторону от контактного разрыва при $W > 1$.

Пусть $\omega = 0$. На рис. 2 представлена картина поля интегральных кривых уравнения (2.1) при $\nu = 3$, $W > 1$. Стрелки указывают направление уменьшения λ , линии 1 и 2 для $z = \frac{2\nu}{\gamma-1}(W-1)^2$ и $z = (W-1)^2$.

Условия на скачке с тепловыделением могут быть записаны в виде

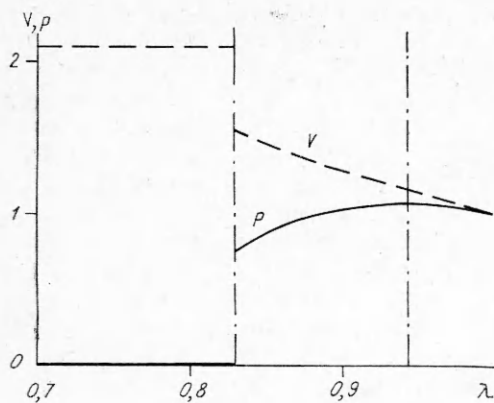
$$(2.2) \quad R_2 = R_1 \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} (1 - \Lambda) \left(1 + \frac{z_1}{\gamma_1 (W_1 - 1)^2} \right) \right]^{-1},$$

$$W_2 = 1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} (1 - \Lambda) \left[1 + \frac{z_1}{\gamma_1 (W_1 - 1)^2} \right] (W_1 - 1),$$

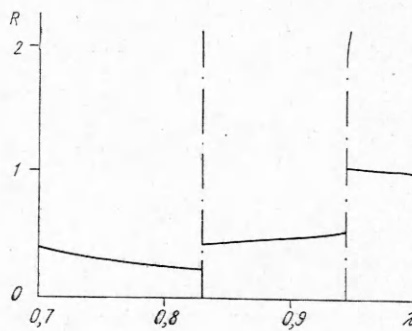
$$z_2 = \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \right] (1 - W_1)^2 (1 - \Lambda) (1 + \gamma_2 \Lambda) \left[1 + \frac{z_1}{\gamma_1 (W_1 - 1)^2} \right]^2,$$

$$\Lambda^2 = 1 - \frac{\gamma_2^2 - 1}{\gamma_2^2} \left[1 + \frac{2}{(W_1 - 1)^2} \left[\frac{z_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{Q}{D^2} \right] \right] \left[1 + \frac{z_1}{\gamma_1 (W_1 - 1)^2} \right]^{-2},$$

где индексы 1, 2 отвечают горючей смеси и продуктам реакции; Q — теплота, выделяющаяся при сгорании единицы массы газа; D — скорость скачка с тепловыделением.



Р и с. 3



Р и с. 4

Входному отверстию соответствует точка $z = 0$, $W = \infty$, которой можно достигнуть только по прямой $z = 0$. Скачок на прямую $z = 0$, отвечающий волне детонации, нужно сделать при пересечении интегральной кривой с параболой

$$(2.3) \quad z = \frac{1 + \gamma_2 \Lambda}{1 - \Lambda} (W - 1)^2.$$

При $\Lambda > 0$ парабола (2.3) расположена выше звуковой параболы

$$(2.4) \quad z = (W - 1)^2$$

и решение единственно. При $\Lambda = 0$ удовлетворяется условие Чепмена — Жуге, (2.3) совпадает с (2.4) и попасть на параболу (2.4) можно из области $z > (1 - W)$ либо из

$$(2.5) \quad 0 < z < (W - 1)^2.$$

Во втором случае, чтобы попасть в область (2.5), нужно ввести простой скачок уплотнения при пересечении интегральной кривой с параболой $z = a(W - 1)^2$ ($1 < a < 2\gamma_2/(\gamma_2 - 1)$). Если $\Lambda < 0$, (2.3) лежит ниже (2.4) и попасть на нее можно, только введя дополнительный скачок уплотнения. Положение дополнительного скачка определится, если зафиксировать скорость втекания смеси в трубу.

Пусть теперь по горючей смеси распространяется фронт пламени. Так как он является скачком разрежения, ему должна предшествовать ударная волна, которую нужно построить из точки пересечения интегральной кривой с параболой $z = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 - 1} (W - 1)^2$, чтобы перейти на прямую $z = 0$.

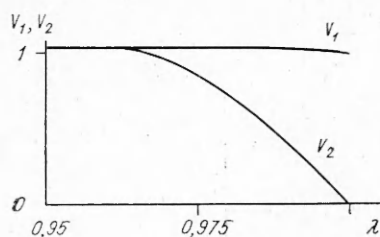
Фронт пламени можно построить из точки пересечения интегральной кривой с параболой $z = g(W - 1)^2$. Случай $g > 1$ отвечает дозвуковому горению, $g < 1$ — сверхзвуковому. При $g = 1$ осуществляется режим Чепмена — Жуге для горения и возможен простой скачок за фронтом пламени. При $g < 1$ решение существует только с дополнительным скачком.

Внешней стороне фронта пламени должны отвечать точки, лежащие в области $z_1 > 2\gamma_1(W_1 - 1)^2/(\gamma_1 - 1)$, $W > 1$. Из условий (2.2) получим

$$(2.6) \quad \frac{2g(2\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_2 - 1)} - \frac{g^2}{\gamma_2^2} < \frac{2Q}{u^2} < 1 + \frac{2g}{\gamma_2 - 1}$$

(u — скорость фронта пламени по продуктам горения). Из (2.6) следует, в частности, что $g \neq \gamma_2$.

При $2Q/u^2 > (2\gamma_2 - 1)^2/(\gamma_2 - 1)^2$ левое неравенство в (2.6) удовлетворяется при любых g . Если $2Q/u^2 \leq (2\gamma_2 - 1)^2/(\gamma_2 - 1)^2$, то при значениях g , удовлетворяющих равенству $\frac{2g(2\gamma_2 - 1)}{\gamma_2(\gamma_2 - 1)} - \frac{g^2}{\gamma_2^2} = \frac{2Q}{u^2}$, происхо-



Р и с. 5

дит слияние фронта пламени и предшествующего ему простого скачка в волну детонации.

Численные расчеты проводились при $\omega = 0$, $\nu = 3$, $p_0 = 0$. Результаты для детонации Чепмена — Жуге представлены на рис. 3, 4. Параметры отнесены к их значениям на ударной волне, распространяющейся по инертному газу. Равновесные течения при $\omega = 0$ могут быть изучены и для ненулевой объемной доли

частиц. Здесь, однако, следует изменить уравнение состояния смеси ($e = p(A + B\rho)/\rho$, A , B — постоянные).

Полученные результаты могут быть распространены на неавтомоделную задачу о втекании горючего газа в инертную двухфазную смесь, когда члены взаимодействия f и q рассчитываются по более точным формулам

$$f = (3/8)C_D(v_1 - v_2)|v_1 - v_2|\rho_1\rho_2/(\rho_{22}a),$$

$$q = (3/2)Nu k(T_1 - T_2)/(\rho_{22}a^2),$$

где C_D — коэффициент сопротивления; Nu — число Нуссельта; k — теплопроводность газа; a — радиус частиц; ρ_{22} — истинная плотность частиц.

На рис. 5 представлены параметры двухфазной смеси справа от контактного разрыва, найденные при решении задачи методом малого параметра [6] при $\nu = 1$, $2\rho_{22}a^2/(9\mu) = 0,01$ (μ — вязкость газа).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С., Марченко Т. В., Якимов Ю. Л. О нестационарных движениях газа в ударных трубах переменного сечения // ПМТФ.— 1961.— № 4.
2. Коробейников В. П., Марков В. В., Меньшов И. С. Задача о сильном взрыве в запыленном газе // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова.— 1984.— Т. 163.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1987.
4. Шидловская Л. В. Задача о движениях газа в трубах переменного сечения и ее приложения к возмущениям солнечного ветра // Изв. АН СССР.— МЖГ.— 1976.— № 3.
5. Захаров Н. С., Коробейников В. П. Автомоделные движения газа при локальном подводе массы и энергии в горючей смеси // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1979.— № 4.
6. Коробейников В. П. Метод малого параметра в течениях запыленного газа // УМН.— 1985.— Т. 40, вып. 4(24).

г. Владивосток

Поступила 23/IV 1990 г.,
в окончательном варианте — 27/XI 1990 г.

УДК 532.517.4

В. К. Никульчиков, Н. Д. Сосновский, А. В. Шваб

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ В УЗКИХ ЗАЗОРАХ МЕЖДУ ПРОФИЛИРОВАННЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В современных энергетических установках, турбомашинах, аппаратах химической технологии широко используются вращающиеся каналы различной формы. В частности, применяемые в порошковой технологии эффективные воздушно-центробежные классификаторы и разработанные на их основе экспресс-анализаторы [1, 2] позволяют с высокой производительностью фракционировать по размерам частиц порошкообразные материалы и определять их гранулометрический состав. Рабочей зоной