

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ ПОЛОГИХ
КОНУСОВ В ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ**

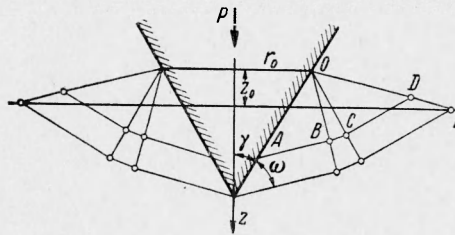
В. В. Варнелло (Новосибирск)

В некоторых методах испытаний на твердость применяется вдавливание пологих конусов. При этом теоретические расчеты проводятся трудоемкими численными методами [1]. Между тем, уже давно отмечено сходство соответствующих полей линий скольжения с полями для плоской задачи [2, 3], что позволяет дать для этой задачи простое приближенное решение.

В статье дается приближенное решение задачи определения среднего давления (твердости по Мейеру) при вдавливании конусов с углом раствора 2γ от 90° до 180° при постоянной силе трения по поверхности конуса. Результаты расчетов показывают весьма удовлетворительное совпадение с численными решениями для вдавливания цилиндра ($2\lambda = 180^\circ$) [2, 4, 5] и конуса ($2\gamma = 170^\circ$) [1] без учета выпучивания. Сделано также сравнение полученных нами результатов с экспериментами [6] и дана приближенная оценка учета выпучивания при вдавливании пологих конусов.

При полном условии пластичности в осесимметричной задаче напряжения определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \\ (\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 &= 4k^2 \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \pm k \end{aligned} \quad (1)$$



Здесь k — предел текучести при сдвиге. Введем известные преобразования для компонентов тензора напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p - k \sin 2\varphi, & \sigma_z &= -p + k \sin 2\varphi \\ \tau_{rz} &= k \cos 2\varphi, & \sigma_\theta &= -p \pm k \end{aligned} \quad (2)$$

После подстановки (2) в (1) получим гиперболическую систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial z} + 2k \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} - 2k \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{k}{r} \cos 2\varphi &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial r} + 2k \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2k \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{k}{r} (\sin 2\varphi \pm 1) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения характеристик системы (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \operatorname{tg} \varphi, & dp + 2k d\varphi &= -\frac{k}{r} (dz \pm dr) & (\text{вдоль } \alpha\text{-линии}) \\ \frac{dz}{dr} &= -\operatorname{ctg} \varphi, & dp - 2k d\varphi &= \frac{k}{r} (dz \mp dr) & (\text{вдоль } \beta\text{-линии}) \end{aligned} \quad (4)$$

В случае вдавливания штампа в соотношениях (2), (4), (5) по физическому смыслу следует взять верхний знак. Рассмотрим задачу о вдавливании тупого конуса ($90^\circ \leq 2\gamma \leq 180^\circ$) с постоянной силой трения по его поверхности. В качестве приближенного поля линий скольжения возьмем поле линий скольжения для задачи о вдавливании плоского клина. При этом поверхность выпучивания аппроксимируется усеченным конусом. Следует заметить, что для осесимметричной задачи условие постоянства объема выполнено не будет, поэтому на предполагаемое решение нужно смотреть как на оценочное. Оказывается, что учет выпучивания вносит лишь очень небольшую поправку, которой для пологих конусов можно пренебречь. Угол раствора концентрического вера η , согласно фигуре, определяется из уравнения

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin \omega}{\sin \gamma} \right)^2 \sin 2 \left(\gamma \mp \omega - \eta - \frac{\pi}{4} \right) + 2\sqrt{2} \frac{\sin \omega}{\sin \gamma} \sin \left(\gamma \mp \omega - \eta - \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{ctg} \gamma &= 0 \\ \omega &= \frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos (-t/k) \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь t — постоянная величина силы трения на поверхности конуса. Для определения компонентов тензора напряжений проинтегрируем (5) вдоль β -линии [2]; имеем

$$P_{\alpha_2} - P_{\alpha_1} = 2k\varphi_{\alpha_1}^{\alpha_2} - k \ln \frac{r_{\alpha_2}}{r_{\alpha_1}} + k \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dz}{r} \quad (7)$$

На поверхности конуса $\varphi_{\alpha_1} = \gamma + \omega$, а вдоль OD будет $P_{\alpha_2} = k, \varphi_{\alpha_2} = \gamma + \omega - \eta$. Поэтому, согласно (2), (7), вдоль поверхности конуса получим

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_z \end{matrix} \right\} = -k \left[2\eta + 1 \pm \sin 2(\gamma + \omega) + \ln \frac{r_d}{r_a} - \int_A^D \frac{dz}{r} \right] \quad (8)$$

$$\sigma_\theta = -k \left[2\eta + \ln \frac{r_d}{r_a} - \int_A^D \frac{dz}{r} \right] \quad \tau_{rz} = k \cos 2(\gamma + \omega)$$

Здесь

$$\int_A^D \frac{dz}{r} = \int_A^B \frac{dz}{r} + \int_B^C \frac{dz}{r} + \int_C^D \frac{dz}{r} = \begin{pmatrix} r = r_0 + R \cos \varphi \\ z = z_0 + R \sin \varphi \\ A = \sin \omega / \sin \gamma \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$= -\operatorname{ctg}(\omega + \gamma) \ln \frac{r_b}{r_a} - \{\eta + r_0 [J\varphi_c - J\varphi_b]\} - \operatorname{ctg}(\omega + \gamma - \eta) \ln \frac{r_d}{r_c}$$

$$J = \frac{2}{\sqrt{r_0^2 - R^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(r_0 - R) \operatorname{tg}^{1/2} \varphi}{\sqrt{r_0^2 - R^2}} \quad \text{при } r_0^2 > R^2$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{R^2 - r_0^2}} \ln \left| \frac{(R - r_0) \operatorname{tg}^{1/2} \varphi + \sqrt{R^2 - r_0^2}}{(R - r_0) \operatorname{tg}^{1/2} \varphi - \sqrt{R^2 - r_0^2}} \right| \quad \text{при } R^2 > r_0^2 \quad (10)$$

$$R = (r_0 - r)A, \quad \varphi_b = \gamma + \omega, \quad \varphi_c = \gamma + \omega - \eta$$

Здесь r_0, z_0 — координаты центра концентрического веера, R — радиус дуги веера, вдоль которой берется криволинейный интеграл; индексы a, b, c, d означают соответствие величин точкам A, B, C, D . Таким образом, согласно (8), (9), компоненты тензора напряжений на поверхности конуса равны

$$\begin{aligned} \sigma_z = \sigma_r = & -2k \{ [^{3/2}\eta + 1/2 + 1/2 [1 + \operatorname{ctg}(\gamma + \omega - \eta)] \ln r_d - \\ & - 1/2 [1 + \operatorname{ctg}(\gamma + \omega)] \ln r_a + 1/2 \operatorname{ctg}(\gamma + \omega) \ln r_b - 1/2 \operatorname{ctg}(\gamma + \omega - \eta) \ln r_c - \\ & - 1/2 r_0 [J(\varphi_c) - J(\varphi_b)] - 1/2 \sin(\gamma + \omega) \} \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & -2k \{ ^{3/2}\eta + 1/2 [1 + \operatorname{ctg}(\gamma + \omega - \eta)] \ln r_d - 1/2 [1 + \operatorname{ctg}(\gamma + \omega)] \ln r_a + \\ & + 1/2 \operatorname{ctg}(\gamma + \omega) \ln r_b - 1/2 \operatorname{ctg}(\gamma + \omega - \eta) \ln r_c - 1/2 r_0 [J(\varphi_c) - J(\varphi_b)] \} \\ \tau_{rz} = & k \cos 2(\gamma + \omega) \end{aligned}$$

При этом (см. фигуру)

$$r_b = r_0 [1 + B] - rB, \quad r_c = r_0 [1 + C] - rC, \quad r_d = r_0 (1 + D) - rD$$

$$\begin{aligned} B = A \cos(\gamma + \omega) \\ C = A \cos(\gamma + \omega - \eta), \quad D = \frac{\sqrt{2} \sin \omega}{\sin \gamma} \cos \left(\gamma + \omega - \eta - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Пренебрегая выпучиванием, мы должны принять $D = A \sqrt{2}$. Для определения нагрузки на штамп P и твердости по Мейеру имеем

$$z_\nu = \tau_{rz} \cos(r, \nu) + \sigma_z \cos(z, \nu)$$

$$P = 2\pi \int_0^{r_0} z_\nu \frac{r}{\sin \gamma} dr = 2\pi \int_0^{r_0} (\tau_{rz} \operatorname{ctg} \gamma + \sigma_z) r dr \quad (13)$$

где z_v — проекция на ось Oz усилия, действующего на элементарную площадку поверхности конуса; ν — направление нормали к поверхности конуса.

Из (9), (11), (13) получим следующее выражение для нагрузки на штамп:

$$P = -2\pi k \left\{ -\operatorname{ctg} \cos 2(\gamma + \omega) \frac{r_0^2}{2} + \eta r_0^2 + \frac{r_0^2}{2} + \right. \\ \left. + m r_0^2 - \sin 2(\gamma + \omega) \frac{r_0^2}{2} \frac{1}{2} \int_0^{r_0} \int_{\varphi_b}^{\varphi_c} \frac{R \cos \varphi}{R \cos \varphi + r_0} r dr d\varphi \right\} \quad (14)$$

$$\varphi_b = \gamma + \omega, \quad \varphi_c = \gamma + \omega - \eta$$

Здесь постоянная m определяется из соотношения

$$2m = [1 + \operatorname{ctg}(\gamma + \omega - \eta)] [(1 + D)^2 D^{-2} \ln(1 + D) - D^{-1}] - \\ - \operatorname{ctg}(\gamma + \omega - \eta) [(1 + C)^2 C^{-2} \ln(1 + C) - C^{-1}] + \\ + \operatorname{ctg}(\gamma + \omega) (1 + B^2) B^{-2} \ln(1 + B) - B^{-1} - 1] - 1 \quad (15)$$

Для вычисления интеграла

$$-\int_0^{r_0} \int_{\varphi_b}^{\varphi_c} \frac{R \cos \varphi r dr d\varphi}{R \cos \varphi + r_0} = -r_0^2 \int_{\varphi_b}^{\varphi_c} \left[\frac{1}{2} + \frac{A}{\cos \varphi} - \frac{\ln(A \cos \varphi + 1)(A \cos \varphi + 1)}{A^2 \cos^2 \varphi} \right] d\varphi \dots$$

представим, полагая $|A \cos \varphi| < 1$,

$$\ln(A \cos \varphi + 1) = A \cos \varphi - \frac{(A \cos \varphi)^2}{2} + \frac{(A \cos \varphi)^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(A \cos \varphi)^n}{n}$$

Откуда, ограничиваясь четырьмя членами разложения, найдем

$$-\int_0^{r_0} \int_{\varphi_b}^{\varphi_c} \frac{R \cos \varphi r dr d\varphi}{R \cos \varphi + r_0} = -r_0^2 \int_{\varphi_b}^{\varphi_c} \left[\frac{A \cos \varphi}{6} - \frac{(A \cos \varphi)^2}{12} + \frac{(A \cos \varphi)^3}{20} \right] d\varphi = \\ = -r_0^2 \left[\frac{3A^3 + 10A}{60} (\sin \varphi_b - \sin \varphi_c) - \frac{A^2}{24} \eta - \frac{A^2}{48} (\sin 2\varphi_b - \sin 2\varphi_c) - \right. \\ \left. - \frac{A^3}{60} (\sin^3 \varphi_b - \sin^3 \varphi_c) \right] \quad (16)$$

Таким образом, окончательно получим для твердости H_m по Мейеру

$$H_m = -\frac{P}{\pi r_0^2} = 2k \left\{ -\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{2} \cos 2(\gamma + \omega) + \eta + \frac{1}{2} + m - \frac{\sin 2(\gamma + \omega)}{2} + \right. \\ \left. + \frac{3A^3 + 10A}{60} (\sin \varphi_b - \sin \varphi_c) - \frac{A^2}{24} \eta - \frac{A^2}{48} (\sin 2\varphi_b - \sin 2\varphi_c) - \right. \\ \left. - \frac{A^3}{60} (\sin^3 \varphi_b - \sin^3 \varphi_c) \right\} \dots \quad (17)$$

Здесь H_m — твердость по Мейеру. Соотношение (17) позволяет также определить H_m без учета выпучивания. В этом случае $D = A\sqrt{2}$ и $\eta = \gamma + \omega - 1/4\pi$.

Приводим результаты вычислений H_m по формуле (16) для некоторых значений γ для вдавливания идеально гладких конусов с учетом выпучивания

$$\begin{array}{ccccccccc} \gamma^\circ & 46.8 & 51.2 & 55.3 & 59.3 & 63.3 & 67.2 & 71.1 & \\ H_m & 2.111 & 2.178 & 2.232 & 2.296 & 2.364 & 2.431 & 2.502 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma^\circ & 74.9 & 80.0 & 85.0 & 90.0 & & & \\ H_m & 2.571 & 2.665 & 2.759 & 2.850 & & & \end{array}$$

Для вдавливания цилиндра различными авторами получены следующие значения:

$H_m = 2k \cdot 2.82$ — Г. Генки [2] $H_m = 2k \cdot 2.84$ — А. Ю. Ишлинского [4] $H_m = 2k \cdot 2.86$ — Р. Шильда [5] $H_m = 2k \cdot 2.80$ — И. Н. Тылевича [1]	По формуле (17) — $H_m = 2k \cdot 2.85$ $\left\{ \begin{array}{l} H_m = 2k \cdot 2.79 \text{ (без учета выпучивания)} \\ H_m = 2k \cdot 2.76 \text{ (с учетом выпучивания)} \end{array} \right.$
---	---

Таким образом, результаты вычислений по формуле (17) практически не отличаются от численных решений. При этом при вдавливании пологих конусов выпучиванием можно, по-видимому, пренебречь.

В заключение сравним полученные результаты с экспериментальными данными [6]. Согласно последним, при вдавливании хорошо смазанных конусов в медь ($90^\circ < 2\gamma < 180^\circ$) среднее давление близко к постоянной величине $H_m = 2k \cdot 2.28$. При неглубоком вдавливании величина H_m несколько снижается с уменьшением угла раствора конуса, а при глубоком вдавливании несколько увеличивается. В нашем решении величина среднего давления меньше теоретического для вдавливания цилиндра ($2k \cdot 2.86 > 2k \cdot 2.28$). На графике среднее давление меняется от $2k \cdot 2.85$ до $2k \cdot 2.11$, поэтому полученные результаты можно считать удовлетворительными.

Поступила 21 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Тылевич И. Н. Определение механических свойств судостроительных материалов методом вдавливания. Тр. Центр. н.-и. ин-та технологии судостроения, 1959, вып. 25, Судпромгиз.
2. Генки Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах. Сб. перев. под ред. Ю. Н. Работнова «Теория пластичности», Изд. иностр. лит., 1948.
3. Ильюшин А. А. Пластичность, Гостехиздат, 1948.
4. Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача пластичности и проба Бриелля. ПММ, 1944, т. 8, вып. 3.
5. Шильд Р. Т. О пластическом течении металла в условиях осевой симметрии. Сб. перев. «Механика», Изд. иностр. лит., 1957, № 1.
6. Bishop R. F., Hill R., Mott N. F. The Theory of indentation and hardness tests. Proc. Phys. Soc. (London), 1945, v. 57, p. 147.

О НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ВОДЕ

А. И. Иоффе, Е. А. Наугольных, Н. А. Рой

(Москва)

Рассматривается процесс расширения канала электрического разряда в воде при относительно небольших, по сравнению со скоростью звука, скоростях расширения канала и умеренных токах, когда можно пренебречь магнитными силами.

Делается попытка построить теоретическую модель канала разряда, позволяющую по измеренным на опыте электрическим характеристикам (разрядный ток и напряжение на промежутке) определить скорость его расширения, давление в канале и т. д.

Как известно [1,2], после пробоя межэлектродного промежутка в жидкости образуется токопроводящий канал, радиус которого увеличивается в процессе разряда. Рассматривая приближенно канал разряда как непроницаемый бесконечный цилиндр, расширяющийся в жидкости, и принимая во внимание, что скорость расширения dR/dt (R — радиус канала) мала по сравнению со скоростью звука, определим давление на его поверхность, используя приближение линейной акустики. В этом случае потенциал скорости φ жидкости, движущейся в результате расширения цилиндра, удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$