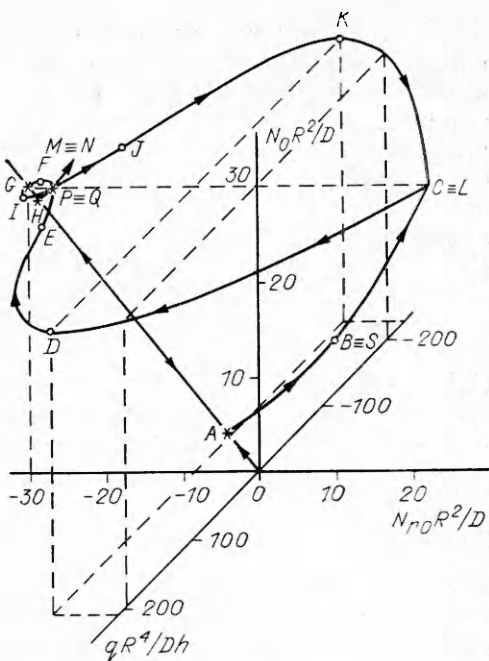


ближения решения метода непрерывного продолжения, как показывают расчеты, увеличится на одну — две.

Описанные приемы дают возможность существенно повысить точность решения систем нелинейных уравнений методом непрерывного продолжения, уменьшить трудоемкость за счет увеличения шага интегрирования по траектории и повысить его устойчивость в окрестности точек ветвления траектории нагружения. Так, например, при решении осесимметричной задачи о комбинированном нагружении круговой пластины (2), в основе которого лежало точное решение в степенных рядах Уэя [3], применение изложенных приемов позволило обойти все ветви траектории нагружения. Образы этой траектории показаны на рис. 1—3. Здесь  $w_0$ ,  $M_{r0}$  и  $N_{r0}$  — прогиб, изгибающий момент и растягивающее усилие в центре пластины. Первоначально пластина нагружается равномерной контурной нагрузкой  $N_0$ , под действием которой она теряет устойчивость по первой осесимметричной форме (точка  $A$ ) и выводится по бифуркационной ветви  $ABC$  в закритическую область, где для  $N_0$  фиксируется значение  $30D/R^2$  (точка  $C$ ). Затем к пластине с выпуклой стороны прикладывается равномерная поперечная нагрузка  $q$ , и она прощелкивает по ветви  $CDEQFGIPJKL$  подобно пологому сферическому куполу. При этом на траектории нагружения встречаются предельные точки  $B, D, E, F, I, J, K, S$  и точки бифуркации  $A, H, G, P, Q$ . Точки  $P$  и  $Q$  — пересечение траектории нагружения пластины с бифуркационной ветвью, соответствующей второй осесимметричной форме потери устойчивости пластины.



Р и с. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Давиденко Д. Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Укр. матем. журн.— 1953.— Т. 5, № 2.
2. Григолюк Э. И., Шалашилин В. И. Проблемы нелинейного деформирования.— М.: Наука, 1988.
3. Way S. Bending of circular plates with large deflection // Trans. ASME.— 1934.— V. 56, N 8.

г. Москва

Поступила 16/V 1988 г.,  
в окончательном варианте — 6/IV 1989 г.

УДК 539.3

Л. Г. Доборджгинидзе

## О СОПРИКАСАНИИ ДВУХ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ

Исследована задача о соприкосновении двух близких по форме к полуплоскостям тел  $S_1$  и  $S_2$  из нелинейно-упругого материала гармонического типа [1]. Принимается, что на контактной области трение отсутствует. Получено точное решение задачи.

© 1990 Доборджгинидзе Л. Г.

7\*

99

1. Пусть рассматриваемые физические области  $S_1$  и  $S_2$ , форма границ которых близка к прямолинейной, после деформации соприкасаются вдоль общей части  $L$  их границ  $L_1$  и  $L_2$  соответственно. Контакт между телами осуществляется посредством внешних сил, главный вектор которых  $P_0 = X + iY$  ( $P_0$  — известная постоянная). Предполагается, что область соприкосновения  $L$  состоит из конечного числа отрезков действительной оси  $ox$ :  $L = [a_1 b_1] + \dots + [a_n b_n]$ . Считаем, что  $S_1$  и  $S_2$  занимают нижнюю и верхнюю полуплоскости плоскости переменной  $z = x + iy$  [2]. Все величины, относящиеся к  $S_1$  и  $S_2$ , обозначим индексами 1 и 2. Напряжения и вращения для этих тел на бесконечности отсутствуют.

Граничные условия задачи имеют вид [3]

$$(1.1) \quad v_1^- - v_2^+ = f(x), \quad T_1(x) = T_2(x) = 0, \quad N_1(x) = N_2(x) = N(x) \text{ на } L,$$

а на свободных от внешних воздействий остальных частях границ

$$(1.2) \quad N = 0, \quad T = 0.$$

Здесь  $N$ ,  $T$  — нормальное и касательное напряжения;  $v$  — нормальное упругое перемещение;  $f(x) = f_2(x) - f_1(x)$  — заданная на деформированной контактной линии функция,  $f_1$  и  $f_2$  характеризуют конфигурацию сжимаемых тел после деформации. Напомним, что  $x^* = x + u$ ,  $u = u(x)$  — горизонтальное упругое смещение точек линии  $L$ . Далее примем  $f'(x) \in H(L)$ .

Для решения задачи используем комплексные представления полей упругих элементов для полуплоскости через две аналитические в ней функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  от комплексного аргумента  $z = x + iy$  [4]

$$(1.3) \quad X_x + Y_y + 4\mu = \frac{(\lambda + 2\mu) q \Omega(q)}{\sqrt{J}}, \quad Y_y - X_x - 2iX_y = \\ = -\frac{4(\lambda + 2\mu)}{\sqrt{J}} \frac{\Omega(q)}{q} \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}};$$

$$(1.4) \quad u + w = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \int \varphi'^2(z) dz + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[ \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right] - z;$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial z^*}{\partial z} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \varphi'^2(z) + \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\varphi'(z)}{\varphi'(z)}, \quad \frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}} = \\ = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left[ \frac{\varphi(z) \overline{\varphi''(z)}}{\varphi'^2(z)} - \overline{\psi'(z)} \right],$$

$$\text{где } z^* = z + u + w; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right);$$

$$(1.6) \quad \sqrt{J} = \frac{\partial z^*}{\partial z} \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial z^*}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}^*}{\partial z}, \quad q = 2 \left| \frac{\partial z^*}{\partial z} \right|, \quad \Omega(q) = q - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu};$$

$\lambda$ ,  $\mu$  — упругие постоянные Ламэ. При достаточно больших  $|z|$  имеют место представления [4]

$$(1.7) \quad \varphi(z) = -\frac{(\lambda + 2\mu)(X + iY)}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \ln z + z + o(1) + \text{const};$$

$$(1.8) \quad \psi(z) = \frac{(\lambda + 2\mu)(X - iY)}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \left[ \frac{1}{2\varphi'(z)} - 1 \right] \ln z + o(1) + \text{const}.$$

Кроме того,  $\varphi'(z) \neq 0$  везде в рассматриваемой замкнутой области.

Из второго соотношения (1.4), выражающего условие отсутствия касательных напряжений на  $L$ , и из (1.2) на основании (1.3), (1.5) следует

$$(1.9) \quad \overline{\varphi_\nu(x)} \varphi_\nu'(x) - \varphi_\nu'^2(x) \psi_\nu(x) = 0 \text{ на } \Gamma \quad (\nu = 1, 2)$$

( $\Gamma = L_1 \cup L_2 \cup L$ ). Согласно же (1.9), из (1.3), (1.5), (1.6)

$$(1.10) \quad N_t(x) = \frac{2\mu_t(\lambda_t + \mu_t) \left[ |\varphi_t'^2(x)| - 1 \right]}{\lambda_t + \mu_t + \mu_t |\varphi_t'^2(x)|} \text{ на } \Gamma.$$

Исходя из (1.4), (1.2), (1.10), получим условия

$$(1.11) \quad |\varphi_t'(x)| = \left[ \frac{\lambda_t + \mu_t}{\mu_t} \frac{2\mu_t + N(x)}{2(\lambda_t + \mu_t) - N(x)} \right]^{1/2} = f_t(x) \text{ на } L, \\ |\varphi_t'(x)| = 1 \text{ на } \Gamma \setminus L.$$

Из (1.11) с учетом (1.7) находим представления

$$(1.12) \quad \varphi_1(z) = \exp \left[ -\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{F_1(x) dx}{x-z} \right], \quad z \in S_1;$$

$$(1.13) \quad \varphi_2'(z) = \exp \left[ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{F_2(x) dx}{x-z} \right], \quad z \in S_2,$$

где

$$(1.14) \quad F_t(x) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\lambda_t + \mu_t}{\mu_t} \frac{2\mu_t + N(x)}{2(\lambda_t + \mu_t) - N(x)} \right] \quad (t = 1, 2)$$

— неизвестные пока функции на  $L$ . Полагаем, что  $F_t(x) \in H$ . После этого продифференцируем (1.4) по  $x$  и в полученном соотношении учтем (1.9):

$$(1.15) \quad 1 + u_j' + w_j' = \varphi_j'^2(x) \left[ \frac{\mu_j}{\lambda_j + 2\mu_j} + \frac{\lambda_j + \mu_j}{\lambda_j + 2\mu_j} \frac{1}{|\varphi_j'^2(x)|} \right] \text{ на } L \quad (j = 1, 2).$$

В (1.15) перейдем к сопряженным значениям, прологарифмируем как исходное, так и полученные равенства и вычтем из одного другое:

$$(1.16) \quad \ln \left[ \varphi_1'^{-2}(x) \varphi_2'^{-2}(x) \right] - \ln \left[ \overline{\varphi_1'^{-2}(x)} \overline{\varphi_2'^{-2}(x)} \right] = \\ = 2i \left[ \operatorname{arctg} v_1'^-(x) - \operatorname{arctg} v_2'^-(x) \right] \text{ на } L$$

(дифференцирование проведено по указанным в скобках аргументам). Левая часть этого равенства при соблюдении условий

$$(1.17) \quad \ln \varphi_t'^-(\infty) = 0$$

будет однозначной функцией.

Теперь, согласно известным соотношениям Сохоцкого — Племяля, найдем граничные значения функции (1.2), (1.13) на  $L$ , полученные выражения внесем в левую часть (1.16). Тогда, исходя из первого условия (1.1), после некоторых приведений имеем

$$(1.18) \quad \int_L \frac{F(x) dx}{x-x_0} = \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} \frac{f_1'(\overset{*}{x}) - f_2'(\overset{*}{x})}{1 + f_1'(\overset{*}{x}) f_2'(\overset{*}{x})} = g(\overset{*}{x}) = g(x + u(x)) = \delta(x),$$

где

$$(1.19) \quad F(x) = \frac{i}{2} \ln \left[ \frac{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2} \frac{(2\mu_1 + N(x))(2\mu_2 + N(x))}{(2(\lambda_1 + \mu_1) - N(x))(2(\lambda_2 + \mu_2) - N(x))} \right].$$

Отметим, что правая часть (1.18) предполагается известной функцией переменной  $x$ . Обозначим через  $\alpha$  угол, который проведенная в точке  $(x, f(x))$  к линии  $L_1$  касательная прямая составляет с положительным направлением оси  $ox$ , а через  $\beta$  — угол, образуемый касательной к  $L_2$  в

точке  $(x^*, f_2^*(x^*))$  с той же прямой:

$$(1.20) \quad \operatorname{tg} \alpha^*(x) = f_1'(x), \quad \operatorname{tg} \beta^*(x) = f_2'(x).$$

Тогда

$$(1.21) \quad g^*(x) = (\pi/2)[\alpha^*(x) - \beta^*(x)].$$

Равенство (1.18) относительно функции  $F(x)$  на  $L$  представляет собой характеристическое сингулярное интегральное уравнение первого рода. Общее решение этого уравнения класса  $h_0$  (решение, не ограниченное в конечных точках контактной линии) имеет вид (этому классу соответствует индекс  $\kappa = n$ ) [5]

$$(1.22) \quad F(x_0) = \Phi(x_0) / \sqrt{(x_0 - a_1)(x_0 - b_1) \dots (x_0 - a_n)(x_0 - b_n)},$$

где

$$(1.23) \quad \Phi(x_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\sqrt{(x - a_1)(x - b_1) \dots (x - a_n)(x - b_n)} \delta(x) dx}{x - x_0} + P(x_0),$$

$P(x_0) = C_1 x_0^{n-1} + C_2 x_0^{n-2} + \dots + C_n$  — произвольный полином степени не выше  $n - 1$ . Заметим, что в данных соотношениях постоянные  $a_k, b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) считаются известными. Постоянные же  $C_1, C_2, \dots, C_n$  находятся из (1.7) и дополнительных условий задачи.

Для решения класса  $h(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$  (решение, ограниченное в окрестности указанных точек), которому отвечает индекс  $\kappa = -n$  (такое решение обращается в нуль в отмеченных точках), должны выполняться соотношения

$$(1.24) \quad \Phi(a_i) = 0, \quad \Phi(b_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Из приведенных равенств и вычисляются постоянные  $a_i, b_i$ .

После определения из (1.18)  $F(x)$  на  $L$  из (1.19) имеем искомую функцию  $N(x)$  на той же области:

$$(1.25) \quad N(x) = \frac{-h + \sqrt{h^2 - 4\eta\gamma}}{\eta},$$

где

$$(1.26) \quad h = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\exp(2F)}{\lambda_1 + \mu_1} + \frac{\exp(2F)}{\lambda_2 + \mu_2}, \quad \eta = \frac{1}{\mu_1 \mu_2} - \frac{\exp(2F)}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}, \quad \gamma = 1 - \exp(2F).$$

Особенно простой вид принимает эта формула в случае, когда оба контактируемых тела изготовлены из одного и того же материала ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \mu_1 = \mu_2 = \mu$ ):

$$(1.27) \quad N(x) = \frac{2\mu [\exp(F(x)) - 1]}{1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \exp(F(x))}.$$

Определяя таким образом значения  $N(x)$  и подставляя их в (1.14), а затем полученное — в (1.12), (1.13), запишем функции  $\varphi_1(z)$  и  $\varphi_2(z)$ . По найденным же выражениям из (1.8), (1.9), (1.17) известным способом выводим потенциалы  $\psi_1(z)$  и  $\psi_2(z)$ , после чего из (1.3) — (1.6) можно вычислить напряжения и смещения любой части исследуемой области.

Главная задача теории контактных взаимодействий — нахождение размеров контактной области (если она заранее не известна) и значений контактных напряжений на этой области. Ниже на двух примерах показана реализация намеченного подхода, позволяющего устранить недостатки в решении соответствующих задач по линейной теории.

2. П р и м е р 1. Рассмотрим случай одного участка соприкосновения, когда концевые точки контактной области известны, а сам участок —

Таблица 1

$P_0/\mu$	$x$						
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,99
0,2	0,0318	0,0325	0,0347	0,0398	0,0531	0,0730	0,2257
	0,0304	0,0322	0,0346	0,0403	0,0542	0,0747	0,2373
0,4	0,0637	0,0650	0,0694	0,0796	0,1062	0,1460	0,4514
	0,0609	0,0648	0,0675	0,0812	0,1094	0,1517	0,4847
	0,0955	0,0974	0,1041	0,1194	0,1593	0,2190	0,6771
0,6	0,0905	0,0967	0,1040	0,1233	0,1656	0,2308	0,7182
	0,1272	0,1292	0,1388	0,1592	0,2124	0,2920	0,9028
0,8	0,1241	0,1261	0,1374	0,1656	0,2202	0,3108	0,9421

параллельный оси  $ox$  прямолинейный отрезок  $[ab]$ , при этом  $n = 1$ ,  $\delta(x) = 0$ .

Искомое решение уравнений (1.19), согласно (1.20)–(1.23), имеет вид

$$(2.1) \quad F(x) = C/\sqrt{(x-a)(b-x)},$$

где  $C$  — произвольная действительная постоянная. Для ее определения внесем (2.1) в (1.12), (1.13) и проследим за асимптотическим поведением полученных выражений при больших  $|z|$ . Тогда с учетом (1.7)

$$(2.2) \quad C = \frac{P_0}{4\pi} \left[ \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)} \right].$$

Подставляя (2.2) в (2.1), из (1.25), (1.26) имеем значения  $N(x)$  на контактной области. Приводим данное выражение в случае одного и того же материала при  $a < x < b$ :

$$(2.3) \quad N(x) = \frac{2\mu(\lambda + \mu) \left\{ \exp \left[ \frac{P_0(\lambda + 2\mu)}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \right] - 1 \right\}}{\lambda + \mu + \mu \exp \left[ \frac{P_0(\lambda + 2\mu)}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \right]}.$$

Особенностью этой формулы (по сравнению с линейным классическим аналогом) является то, что в окрестности концевых точек контактной области она дает хотя достаточно большие ( $\lim N(x) = 2(\lambda + \mu)$  при  $x \rightarrow a^+$ , или  $x \rightarrow b^-$ ), но все-таки конечные значения  $2(\lambda + \mu)$ . Кроме того, распределение контактных напряжений существенно зависит от упругих свойств контактируемых материалов.

В табл. 1 представлены значения  $N(x)/2\mu$  в различных точках контактной области при разных значениях отношений  $P_0/2\mu$  ( $\mu$  — модуль сдвига для рассматриваемого материала). Причем сначала приводятся значения по линейной теории, а затем — по нелинейной (принимается, что  $a = -1$ ,  $b = 1$ , а на штамп действует приложенная в центре симметрии сила  $P_0$ ).

Как видно из табл. 1, по нелинейной теории примерно на участке  $[-0,5; 0,5]$  под штампом контактное нормальное напряжение уменьшается по сравнению с линейным классическим случаем, а вне участка, напротив, наблюдается тенденция повышения значения напряжений. Но примечательно, что эта разница между данными по линейной и нелинейной теориям невелика. Даже в точке  $x = 0,99$  она не превосходит 5 %.

Заметим, что и в общем случае (при различных упругих материалах) наблюдается аналогичная ситуация: поле напряжений на замкнутой контактной области не имеет особенностей. Следовательно, построено точное решение задачи в замкнутой области.

Для определения функции  $\varphi'(z)$  соотношения (2.1), (2.2) учтем в (1.12), (1.13):

$$\varphi'(z) = \exp [(\lambda + 2\mu)P_0/(8\pi\mu(\lambda + \mu)\sqrt{(z-a)(b-z)})].$$

Таблица 2

$\lambda/\mu$	$x$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
1	0,1636	0,1628	0,1608	0,1498	0,1227	0
	0,1632	0,1612	0,1544	0,1424	0,1218	0
4	0,2087	0,2072	0,2008	0,1627	0,1553	0
	0,2040	0,2015	0,1931	0,1545	0,1541	0
	0,2335	0,2309	0,2247	0,2021	0,1723	0
16	0,2203	0,2176	0,2084	0,1932	0,1668	0

Пример 2. Рассмотрим случай одного участка соприкасания, когда  $S_1$  и  $S_2$  ограничены окружностями радиусов  $R_1$  и  $R_2$  соответственно, где  $R_1$  и  $R_2$  — достаточно большие (по сравнению с размером участка соприкасания) величины. С приемлемой точностью можно полагать

$$\delta(x) = \varepsilon x, \quad \varepsilon = 1/R_1 + 1/R_2.$$

Теперь мы должны искать ограниченное на концах контактной области решение уравнения (1.18) при условии (1.24). Ниже приводим результаты вычислений при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ,  $R_1 = R_2 = R$ ;  $a = -l$ ,  $b = l$ :

$$(2.4) \quad l = \sqrt{\frac{P_0 R}{\pi} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)}}, \quad F(x) = \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{R},$$

$$N(x) = \frac{2\mu(\lambda + \mu) [\exp(\sqrt{l^2 - x^2}/R) - 1]}{\lambda + \mu + \mu \exp(\sqrt{l^2 - x^2}/R)}.$$

Учитывая (2.4) в (1.12), (1.13), получим

$$\varphi'(z) = \exp((\sqrt{l^2 - z^2} + iz)/R).$$

Отсюда, согласно (2.3), следует, что контактное напряжение обращается в нуль в конечных точках контактной области.

В табл. 2 представлены значения  $N(x)/\mu$  в различных точках контактной области при разных значениях  $\lambda/\mu$  и при  $P_0/\pi\mu = 1/10$ . Из (2.4) видно, что разница между значениями  $N(x)/\mu$  по нелинейной и линейной теориям мала. В частности, для приведенных максимальных напряжений (при  $x = 0$ ) она не превосходит 6 %.

Аналогичным образом можно построить эффективное решение для случая двух участков соприкасания как при известной, так и при неизвестной области контакта. Проведя соответствующие вычисления, убеждаемся, что в первом случае контактные напряжения остаются ограниченными на всей замкнутой области, а во втором — обращаются в нуль в конечных точках участков соприкасания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // *Communs Pure Appl. Math.*— 1960.— V. 13, N 2.
2. Мухелишвили П. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
3. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости.— М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
4. Доборджинидзе Л. Г. Плоская контактная задача нелинейной теории упругости для упругой полуплоскости из материала гармонического вида // *Изв. АН СССР. МТТ.*— 1987.— № 4.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.

г. Тбилиси

Поступила 5/IV 1989 г.