

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГАЗА,  
ОБТЕКАЮЩЕГО РЕШЕТКУ ПЛАСТИН

В. Б. Курзин

(Новосибирск)

Методом склеивания решается задача о собственных колебаниях газа, обтекающего решетку пластин. Дополнительно при условии пространственной периодичности потока рассматриваются собственные колебания газа в безграничной плоскости, моделирующие собственные колебания газа в кольцевом канале.

Интерес к исследованию этого вопроса был вызван результатами ряда работ о колебаниях решеток пластин в дозвуковом потоке газа [1-4]. В них было установлено, что при определенном сочетании параметров решетки и набегающего потока нестационарные аэродинамические характеристики пластин резко зависят от этих параметров. По физическому смыслу такие явления нашли свое объяснение как акустический резонанс возмущений газа, вызванных колебаниями профилей, с собственными колебаниями газа в рассматриваемой решетчатой области. При этом было отмечено, что на режимах резонанса существенно понижается аэродинамическое демпфирование колебаний решетки.

В работе [5], этот факт был отмечен при исследовании колебаний в осевых компрессорах. В этой работе впервые приведены соотношения, определяющие значения собственных частот колебаний газа в кольцевом канале в окружном направлении. Эти же соотношения, но в иной форме и другими методами получены и в работах [6,7].

1. Сначала рассмотрим задачу о собственных колебаниях потока газа в безграничной плоскости. Периодические решения этой задачи будут некоторой моделью собственных колебаний газа в кольцевом канале. Математически задача сводится к определению ограниченного во всей плоскости решения уравнения для амплитуды нестационарной составляющей потенциала скорости  $\varphi$  потока. В безразмерной декартовой системе координат  $x, y$ , отнесенных к некоторой характерной длине  $c$ , оно имеет вид

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2kMj \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k^2 \varphi = 0 \quad (1.1)$$

$$\varphi' = \varphi(x, y) e^{j\omega t}, \quad M = \frac{U}{a}, \quad k = \frac{\omega c}{a}$$

Здесь  $\omega$  — частота колебаний газа,  $U$  — скорость невозмущенного потока газа вдоль оси  $x$ ,  $a$  — скорость звука в невозмущенном потоке.

Поворотом осей  $x, y$  на угол  $\beta$  перейдем к новым безразмерным координатам  $\xi, \eta$

$$\xi = x \cos \beta - y \sin \beta, \quad \eta = x \sin \beta + y \cos \beta \quad (1.2)$$

В этой системе координат уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$\Delta \varphi - M^2 \cos^2 \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - M^2 \sin^2 \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} - M^2 \sin 2\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} - 2kMj \cos \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - 2kMj \sin \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + k^2 \varphi = 0 \quad (1.3)$$

Ищем общее решение уравнения (1.3) в классе периодических в направлении  $\eta$  функций с периодом  $L$ , равным длине окружности соответствующего кольцевого канала, также отнесенной к  $s$ . Тогда функция  $\varphi$  представима рядом Фурье

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(\xi) \exp \frac{j2\pi n \eta}{L} \quad (1.4)$$

а частное периодическое решение уравнения (1.3) может быть представлено в виде

$$\varphi_n = \exp (\lambda_n \xi + j 2\pi n \eta / L) \quad (1.5)$$

Подставив функцию (1.5) в уравнение (1.3), получим характеристическое уравнение для определения  $\lambda_n$ , решение которого имеет вид

$$\lambda_n = j\lambda_{1n} \pm \lambda_{2n}, \quad \lambda_{1n} = \frac{M \cos \beta}{1 - M^2 \cos^2 \beta} \left[ k + \frac{2\pi n}{L} M \sin \beta \right] \quad (1.6)$$

$$\lambda_{2n} = \frac{1}{1 - M^2 \cos^2 \beta} \left[ \left( \frac{2\pi n}{L} \right)^2 (1 - M^2) - 2k \frac{2\pi n}{L} M \sin \beta - k^2 \right]^{1/2}$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условию периодичности в направлении оси  $\eta$ , имеет вид

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \frac{j2\pi n \eta}{L} [a_n \exp (j\lambda_{1n} + \lambda_{2n}) \xi + b_n \exp (j\lambda_{1n} - \lambda_{2n}) \xi] \quad (1.7)$$

Если подкоренное выражение в формуле (1.6) для  $\lambda_{2n}$  меньше или равно нулю, то соответствующий член ряда (1.7)

$$\varphi_n = \exp [j (\lambda_{1n} \xi + 2\pi n \eta / L)] \cos [\lambda_{2n}' (\xi + \delta)] \quad (\lambda_{2n} = j\lambda_{2n}') \quad (1.8)$$

где  $\delta$  — некоторое произвольное число, будет собственной функцией рассматриваемой задачи. Она удовлетворяет уравнению (1.3) и ограничена во всей плоскости. Подобные решения уравнения Гельмгольца для бесконечной плоскости приведены, например, в книге Куранта и Гильберта [8].

Выделим из решения (1.8) множитель  $\exp (j\lambda_{1n} \xi)$ , характеризующий снос возмущения газа потоком в направлении  $\xi$ , полагая  $\varphi_n = \exp (j\lambda_{1n} \xi) \varphi_n^*$ . Тогда функция  $\varphi_n^* \exp (j\omega t)$  будет представлять собой наложение двух бегущих волн, распространяющихся в симметричных относительно оси  $\eta$  направлениях. В предельном случае, когда  $\lambda_{2n} = 0$ , функция  $\varphi_n^* \exp (j\omega t)$  представляет собой бегущую волну, распространяющуюся только в направлении оси  $\eta$ .

Введем обозначения

$$L = Nh, \quad n = n_1 N + m, \quad \mu = 2\pi m / N \quad (1.9)$$

( $m = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

где  $N$  — некоторое натуральное число. Тогда

$$\frac{2\pi n}{L} = \frac{2\pi n_1 + \mu}{h} \quad (1.10)$$

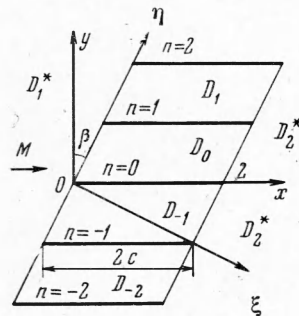
и можно заметить, что условие  $\lambda_{2n} = 0$  совпадает с условием акустического резонанса собственных колебаний газа в бесконечной плоскости с возмущениями, вызванными пульсирующей цепочкой диполей [7], расположенных по оси  $\eta$  с шагом  $h$

$$2\pi n_1 + \mu = \frac{kh}{1 - M^2} [M \sin \beta \pm \sqrt{1 - M^2 \cos^2 \beta}] \quad (n_1 = 0, \pm 1, \dots) \quad (1.11)$$

С физической точки зрения это означает, что цепочка диполей, излучающая возмущения, резонирует с теми собственными колебаниями газа, которые не содержат волн, приходящих слева или справа из бесконечности к оси  $\eta$ .

Как было отмечено в работах [2-5], условие (1.11) определяет также некоторые особенности нестационарного течения газа через плоскую решетку профилей. В этом случае параметр  $h$  представляет собой безразмерный шаг решетки, отнесенный к полухорде профиля  $c$ , параметр  $\beta$  — угол выноса решетки. Как и пульсирующая цепочка диполей, решетка является источником возмущения газа и при синхронных колебаниях ее профилей с одинаковыми амплитудами и постоянным сдвигом фаз  $\mu$  возбуждает соответствующую форму собственных колебаний в бесконечной плоскости. При этом взаимодействие профилей решетки с газом резко уменьшается, в том числе уменьшается и аэродинамическое демпфирование колебаний профилей. Называя это явление при обтекании решеток акустическим резонансом, необходимо отметить определенную его условность, так как собственные колебания газа в «решетчатой» области в общем случае не совпадают с рассмотренными собственными колебаниями.

2. В случае обтекания решетки пластин дозвуковым потоком газа задача о собственных значениях состоит в определении нетривиального решения уравнения (1.3) при условии ограниченности решения в бесконечном удалении за и перед решеткой (фиг. 1)



Фиг. 1

$$\varphi < \infty \quad \text{при } |\xi| \rightarrow \infty \quad (2.1)$$

и при однородном условии непротекания газа через пластины

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = nh \cos \beta \\ nh \sin \beta &< x < nh \sin \beta + 2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ограничимся рассмотрением таких течений, в которых вихревые следы за пластинами отсутствуют. Будем искать эти решения с помощью метода склеивания [9]. Следуя этому методу, область течения разобьем на области  $D_1^*$  и  $D_2^*$  (расположенные соответственно слева и справа от решетки и ограниченные линиями, соединяющими передние и задние кромки пластин) и области  $D_n$  (заклученные между пластинами (фиг. 1)). В областях  $D_1^*$  и  $D_2^*$  в соответствии с представлением периодических функций (1.7) самое общее выражение для собственных функций, с учетом подстановки (1.11) имеет вид

$$\varphi = \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left(j\mu \frac{\eta}{h}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(j2\pi n \frac{\eta}{L} + \lambda_{1n} \xi\right) [a_{mn} e^{\lambda_{2n} \xi} + b_{mn} e^{-\lambda_{2n} \xi}] \quad (2.3)$$

В дальнейшем будет показано, что любая искомая функция в этих областях описывается одним из членов суммы по  $m$ . Кроме того, из условия (2.1) и из условия отсутствия волн, приходящих из бесконечности, следует, что коэффициенты  $a_{mn}$  равны нулю в области  $D_2^*$ , а коэффициенты  $b_{mn}$  — в области  $D_1^*$ . Поэтому принимаем для области  $D_1^*$

$$\varphi_1^* = \exp\left(j\mu \frac{\eta}{h}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left[(j\lambda_{1n} + \lambda_{2n}) \xi + j2\pi n \frac{\eta}{h}\right] \quad (2.4)$$

для области  $D_2^*$

$$\varphi_2^* = \exp\left(j\mu \frac{\eta}{h}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp\left[(j\lambda_{1n} - \lambda_{2n}) (\xi - 2 \cos \beta) + j2\pi n \frac{\eta}{h}\right] \quad (2.5)$$

В выражениях (2.4) и (2.5), а также и в дальнейшем индексы 1 и  $n_1$  в константах  $a_{mn_1}$ ,  $b_{mn_1}$  опущены.

Функции  $\varphi_1^*$  и  $\varphi_2^*$  и их первые производные будут непрерывными в областях  $D_1^*$  и  $D_2^*$ , исключая, быть может, значения  $\eta = sh$  и  $\eta = 2 \sin \beta + sh$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) на их границах, соответствующие координатам кромок профилей. Из теории тонкого крыла известно, что в этих точках производная от функции потенциала скорости может иметь особенность типа  $(r-r_s)^{-1/2}$ , где  $r_s$  — координата одной из кромок  $s$ -го профиля, а  $r$  — радиус-вектор текущей координаты. Однако несмотря на эти особенности, коэффициенты  $a_n'$  и  $b_n'$  рядов для производных от функции  $\varphi_1^*$  и  $\varphi_2^*$ , аналогичных рядам выражений (2.4) и (2.5), при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, а именно

$$a_n' |_{n \rightarrow \infty} = \frac{2}{h} \int_0^h \left[ \frac{c_0}{\sqrt{\eta(h-\eta)}} + f(\eta) \right] \exp \left( j 2\pi n \frac{\eta}{h} \right) d\eta = \frac{2\pi c_0}{h} J_0(nh) + o(n^{-1}) \rightarrow 0$$

Здесь в виде  $c_0 / \sqrt{\eta(h-\eta)}$  выделен член с особенностью из производных функций  $\varphi_1^*$  ( $0, \eta$ ),  $\varphi_2^*$  ( $2 \cos \beta, \eta$ ). Следовательно, ряды для первых производных функций потенциала скорости сходятся при любом значении  $\eta$ , исключая координаты кромок профилей.

В областях  $D_n$  общее выражение собственных функций будет определяться решением смешанных задач вида

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi_1^* & \text{при } \xi = 0, & & \varphi_n &= \varphi_2^* & \text{при } \xi = 2 \cos \beta \\ \partial \varphi_n / \partial y &= 0 & \text{при } y = nh \cos \beta, & & y &= (n+1)h \cos \beta \end{aligned} \quad (2.6)$$

Функции  $\varphi_n$  будем искать в виде бесконечного ряда решений уравнения (1.1), каждое из которых удовлетворяет условию непротекания. Учитывая, что первые два условия (2.6) для различных областей отличаются лишь множителем  $\exp(jn\mu)$ , общее выражение для функции  $\varphi_n$  может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= e^{j(\sigma x + n\mu)} \sum_{m=0}^{\infty} [c_m e^{\lambda_m(x-2)} + d_m e^{-\lambda_m x}] \cos \left[ \pi m \left( \frac{y}{h \cos \beta} - n \right) \right] \\ \lambda_m &= \frac{1}{1-M^2} \left[ \left( \frac{\pi m}{h \cos \beta} \right)^2 (1-M^2) - k^2 \right]^{1/2}, & \sigma &= \frac{kM}{1-M^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Константы  $a_n$ ,  $b_n$  функций (2.4) и (2.5), а также константы  $c_m$  и  $d_m$  функции (2.7) будем определять в соответствии с методом склеивания из условия непрерывности искомой функции и ее нормальной производной на линиях  $\xi = 0$  и  $\xi = 2 \cos \beta$ , исключая, быть может, точки, соответствующие координатам кромок профилей. При этом автоматически выполняются первые два условия (2.6) для функции (2.7).

Следует отметить, что склеивание функций (2.4) и (2.5) с функцией (2.7) достаточно провести лишь на промежутке одного шага  $h$ . На остальных участках линий  $\xi = 0$  и  $\xi = 2 \cos \beta$  оно осуществится в силу условия периодичности. А поскольку выражения (2.4) и (2.5) на промежутке одного шага описывают произвольную функцию искомого решения, то можно утверждать, что суммирование по индексу  $m$  в выражении (2.3) не дает более общего представления искомого решения и может быть опущено.

Итак, приравняв функции (2.4) и (2.5) и их производные в направлении  $\xi$  к функции (2.7) и ее производной на линиях  $\xi = 0$  и  $\xi = 2 \cos \beta$  соответственно, получим четыре соотношения, которые связывают неизвестные константы.

Для краткости выпишем лишь два этих соотношения, выполняющих условия непрерывности на линии  $\xi = 0$

$$\begin{aligned} \exp \frac{j\mu\eta}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp \frac{j2\pi n\eta}{h} &= \quad (2.8) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} [c_m e^{\lambda_m(\eta \sin \beta - 2)} + d_m e^{-\lambda_m \eta \sin \beta}] e^{j\sigma \eta \sin \beta} \cos \frac{\pi m \eta}{h} \\ \exp \frac{j\mu\eta}{h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (j\lambda_{1n} + \lambda_{2n}) \exp \frac{j2\pi n\eta}{h} &= \\ = \sum_{m=0}^{\infty} e^{j\sigma \eta \sin \beta} \left\{ \cos \beta [c_m (\lambda_m + j\sigma) e^{\lambda_m(\eta \sin \beta - 2)} + d_m (-\lambda_m + j\sigma) e^{-\lambda_m \eta \sin \beta}] \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{\pi m \eta}{h} + \frac{\pi m}{h} \operatorname{tg} \beta [c_m e^{\lambda_m(\eta \sin \beta - 2)} + d_m e^{-\lambda_m \eta \sin \beta}] \sin \frac{\pi m \eta}{h} \right\} \end{aligned}$$

Для определения неизвестных констант от системы (2.8) перейдем к бесконечной системе алгебраических уравнений. С этой целью полученные соотношения умножим слева и справа на функцию  $\exp [-j(2\pi n + \mu) \times \eta / h] (n = 0, 1, 2, \dots)$  и проинтегрируем по  $\eta$  от 0 до  $h$ . Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{m=0}^{\infty} [c_m e^{-2\lambda_m} A_{nm} + d_m B_{nm}] \quad (2.9) \\ (j\lambda_{1n} + \lambda_{2n}) a_n &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ c_m e^{-2\lambda_m} \left[ (\lambda_m + j\sigma) \cos \beta - \frac{(\pi m)^2 \operatorname{tg} \beta}{i\theta_{nm}'} \right] A_{nm} + \right. \\ &\quad \left. + d_m \left[ (-\lambda_m + j\sigma) \cos \beta - \frac{(\pi m)^2 \operatorname{tg} \beta}{h\theta_{nm}''} \right] B_{nm} \right\} \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{\theta_{nm}'}{\theta_{nm}'^2 + (\pi m)^2} [(-1)^m \exp(\theta_{nm}') - 1] \\ B_{nm} &= \frac{\theta_{nm}''}{\theta_{nm}''^2 + (\pi m)^2} [(-1)^m \exp(\theta_{nm}'') - 1] \\ \theta_{nm}' &= j(\sigma h \sin \beta - 2\pi n - \mu) + \lambda_m h \sin \beta \\ \theta_{nm}'' &= j(\sigma h \sin \beta - 2\pi n - \mu) - \lambda_m h \sin \beta \end{aligned}$$

Из каждой пары системы (2.9) легко исключаются константы  $a_n$ . Проведем аналогичные операции для соотношений, выполняющих условия непрерывности на линии  $\xi = 2 \cos \beta$ , систему уравнений для определения неизвестных констант  $c_m$  и  $d_m$  получим в виде

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ c_m \left[ \cos \beta (\lambda_m + j\sigma) - \frac{(\pi m)^2 \operatorname{tg} \beta}{i\theta_{nm}'} - (j\lambda_{1n} + \lambda_{2n}) \right] A_{nm} e^{-2\lambda_m} + \right. \\ \left. + d_m \left[ \cos \beta (-\lambda_m + j\sigma) - \frac{(\pi m)^2 \operatorname{tg} \beta}{i\theta_{nm}''} - (j\lambda_{1n} + \lambda_{2n}) \right] B_{nm} \right\} = 0 \\ \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ c_m \left[ \cos \beta (\lambda_m + j\sigma) - \frac{(\pi m)^2 \operatorname{tg} \beta}{h\theta_{nm}'} - (j\lambda_{1n} - \lambda_{2n}) \right] A_{nm} + \right. \quad (2.10) \\ \left. + d_m \left[ \cos \beta (-\lambda_m + j\sigma) - \frac{(\pi m)^2 \operatorname{tg} \beta}{h\theta_{nm}''} - (j\lambda_{1n} - \lambda_{2n}) \right] B_{nm} e^{-2\lambda_m} \right\} = 0 \\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$



Так как система (2.10) будет однородной, то существование ее нетривиального решения возможно лишь при условии равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных константах. Таким образом, рассматриваемая задача свелась к определению собственных значений бесконечной системы алгебраических уравнений (2.10).

Следует отметить, что приближенные значения собственных чисел системы (2.10) с наперед заданной точностью могут быть определены из усеченной системы, т. е. для ее решения применим метод редукции. Однако и эта задача в общем случае представляет собой значительные вычислительные трудности. Для иллюстрации ниже проведен некоторый анализ собственных колебаний газа в решетчатой области на простейшем примере обтекания решетки без выноса.

3. В случае решетки без выноса ( $\beta = 0$ ) бесконечная система алгебраических уравнений существенно упрощается. Действительно, при  $\beta = 0$  коэффициенты  $A_{nm} = B_{nm}$ ,  $\theta_{nm} = \theta_{n_m}$ ,  $\sigma = \lambda_{1n}$ , и система уравнений (2.10) принимает вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} [c_m (\lambda_m - \lambda_{2n}) e^{-2\lambda_m} - d_m (\lambda_m + \lambda_{2n})] A_{nm} = 0$$

$$\sum_{m=0}^m [c_m (\lambda_m + \lambda_{2n}) - d_m (\lambda_m - \lambda_{2n}) e^{-2\lambda_m}] A_{nm} = 0$$

( $n=0, \pm 1, \pm 2 \dots$ )

Отсюда следует, что  $c_m = d_m$ , и система (2.10) таким образом приводится к виду

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m [\lambda_m + \lambda_{2n} - e^{-2\lambda_m} (\lambda_m - \lambda_{2n})] A_{nm} = 0 \quad (n=0, 1, 2 \dots) \quad (3.1)$$

Прежде всего отметим, что при  $\mu = 0$  коэффициенты  $A_{nm} = 0$ , если  $m \neq 2n$ . Но так как  $\lambda_m = \lambda_{2n}$  при  $m = 2n$ , то из системы (3.1) вытекает, что все константы  $c_m$  и  $d_m$ , а следовательно, и  $a_n, b_n$  в этом случае равны нулю. Таким образом, при  $\mu = 0$  нетривиального решения системы (3.1) не существует. Далее нетрудно заметить, что если величина  $\lambda_m$  при некотором фиксированном значении  $m$  обращается в нуль, то два столбца определителя системы совпадают.

Таким образом, условие  $\lambda_m = 0$  определяет сочетание параметров

$$k = \frac{\pi m}{h} \sqrt{1 - M^2} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

при котором газ, обтекающий решетку пластин без выноса, может совершать собственные колебания. Соответствующие этим колебаниям собственные функции уравнения (1.1) имеют вид

$$\varphi = \exp(j\sigma x) \cos(m\pi y / h) \quad (3.3)$$

Следует отметить, что формула (3.2) совпадает с соотношением (1.11) при  $\beta = 0$  и  $\mu = \pi$ , т. е. в этом частном случае собственные колебания газа в решетчатой области совпадают с собственными колебаниями газа в безграничной плоскости.

При вынужденных колебаниях решетки с частотой, удовлетворяющей условию (3.2), период колебаний кратен времени, за которое волна возмущения из некоторой точки профиля дойдет до соответствующей точки соседнего профиля и, отразившись, вернется в исходную точку. Если колебания соседних профилей при этом совершаются в противофазе, то возмущения, вызванные каждым из профилей, складываются, и будет иметь место акустический резонанс.

Однако собственные колебания газа, возникающие при условии ((3.2), не исчерпывают весь спектр представляющих практический интерес собственных колебаний для случая решетки пластин без выноса. Рассмотренные собственные колебания включают в себя лишь колебания в поперечном направлении (в направлении фронта решетки). В соответствии с известными в акустике результатами для открытых резонаторов [10] можно ожидать собственные колебания газа и в продольном направлении, так как межпрофильные каналы, по существу, являются такими резонаторами.

В первом приближении собственные частоты таких колебаний будут определены из условия [6]

$$k = (1 - M^2) \pi m / 2 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

соответствующего случаю полного отражения плоской волны малого возмущения от открытых концов.

В действительности плоская волна полностью не отражается от открытого конца, а взаимодействует с окружающим пространством, в том числе и с соседними межпрофильными каналами. Поэтому соответствующая собственная функция будет представ-

лать собой не простую плоскую волну, локализованную в одном канале, а некоторую сложную функцию во всей плоскости течения, учитывающую это взаимодействие. При этом и собственные частоты колебаний будут отличаться от значений, определяемых выражением (3.4).

Введем параметр  $\alpha_m$ , учитывающий поправку на открытый конец в формуле (3.4), так что значение приведенной собственной частоты продольных колебаний газа

$$k_m = (1 - M^2) \pi m (1 + \alpha_m) / 2 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

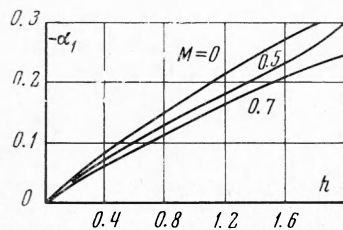
Величина параметра  $\alpha_m$ , а также собственная функция искомых колебаний могут быть определены с помощью решения системы (3.1).

Рассмотрим пример расчета для  $m = 1, \mu = \pi$ . В этом случае выражения для собственных функций (2.4), (2.5) и (2.7) преобразуются к виду

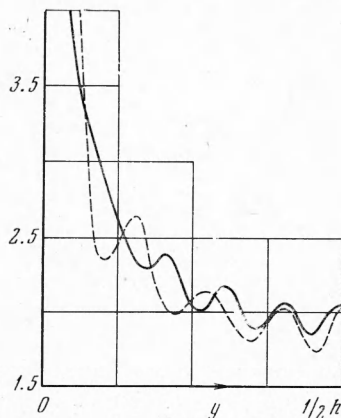
$$\begin{aligned} \varphi_1^* &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp[(j\sigma + \lambda_{2n})x] \sin \frac{(2n+1)\pi y}{h} \\ \varphi_2^* &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp[(j\sigma - \lambda_{2n})(x-2)] \sin \frac{(2n+1)\pi y}{h} \\ \varphi_n &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{j\sigma x} [c_m \exp \lambda_m (x-2) + d_m \exp(-\lambda_m x)] \cos \frac{2\pi m y}{h} \\ \lambda_m &= \frac{1}{1-M^2} \left[ \left( \frac{2\pi m}{h} \right)^2 (1-M^2) - k^2 \right]^{1/2}, \\ \lambda_{2n} &= \frac{1}{1-M^2} \left[ \left( \frac{2n+1}{h} \right)^2 \pi^2 (1-M^2) - k^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Следуя методу редукции, система (3.1) была усечена при расчете до  $N = 30$  уравнений. Равенство нулю определителя усеченной системы при фиксированных значениях  $M, h$  рассматривалось как приближенное условие определения параметра  $\alpha_1$ .

Результаты расчета параметра  $\alpha_1$  в зависимости от безразмерного шага  $h$  при значениях числа  $M = 0, 0.5$  и  $0.7$  приведены на фиг. 2. Анализируя эту зависимость, интересно отметить, что  $\alpha_1 \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . С физической точки зрения этот результат



Фиг. 2



Фиг. 3

можно объяснить тем, что с увеличением длины канала доля кинетической энергии возмущенного газа, излучаемой из открытого конца, уменьшается относительно энергии колеблющегося газа внутри канала и в пределе для бесконечно длинного канала стремится к нулю.

Приводим результаты вычисления значений первых десяти искомых коэффициентов  $a_n$  и  $c_n$ , нормированных по  $a_0$ , при  $h = 1$  и  $M = 0.7$ .

|          |        |          |        |        |        |        |
|----------|--------|----------|--------|--------|--------|--------|
| $n =$    |        | 0        | 1      | 2      | 3      | 4      |
| $a_n =$  |        | 1.0      | 0.1660 | 0.0761 | 0.0462 | 0.0320 |
| $-c_n =$ | -0.69- | $j$ 3.12 | 0.2480 | 0.0898 | 0.0489 | 0.0316 |
| $n =$    | 5      | 6        | 7      | 8      | 9      | 10     |
| $a_n =$  | 0.0241 | 0.0191   | 0.0157 | 0.0132 | 0.0114 | 0.0101 |
| $c_n =$  | 0.0224 | 0.0168   | 0.0132 | 0.0107 | 0.0089 | 0.0075 |

Эти значения с точностью до третьего знака совпадают с соответствующими коэффициентами, рассчитанными из системы, усеченной до 20 уравнений, что свидетельствует о хорошей сходимости метода редукции в данном случае. Однако, насколько можно судить по убыванию коэффициентов, сходимость производных от искомых функций плохая.

Этот факт иллюстрирует фиг. 3, на которой представлены зависимости нормальных производных функций  $\varphi_0$  (сплошная линия) и  $\varphi_1^*$  (пунктирная) от  $y$  на линии  $x = 0$ . Из этих зависимостей видно, что нормальные производные искомых функций слева и справа от линии склеивания отличаются друг от друга на величину порядка ошибки аппроксимации их конечным тригонометрическим рядом. (Склеивание самих функций  $\varphi_0$  и  $\varphi_1^*$  в рассматриваемом случае осуществляется с точностью до 3—4 значащих цифр.) В соответствии с порядком убывания коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$  у кромок пластин имеет место явно выраженная особенность производных от искомых функций. При этом по построению решения эти особенности имеются у обоих концов пластин.

Следует отметить, что такие решения физически осуществимы, видимо, лишь при  $M = 0$ . В потоке при  $M \neq 0$  наибольший практический интерес представляют собой решения в классе с ограниченными производными у задних кромок пластин. Эти решения в общем случае необходимо искать с учетом вихревых следов, а соответствующие собственные значения — среди комплексных чисел.

Автор выражает признательность за ценные замечания при обсуждении работы Г. Ю. Степанову и Р. А. Шипову.

Поступила 2 VI 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Wollston D. S., Runyan H. L. Some considerations on the air forces on a wing oscillating between two walls for subsonic compressible flow. *J. Aeronaut. Sci.*, 1955, vol. 22, No. 1.
2. Курзин В. Б. Расчет нестационарного обтекания решетки тонких профилей дозвуковым потоком газа методом интегральных уравнений. ПМТФ, 1964, № 2.
3. Горелов Д. Н., Доминас Л. В. Решетка пластин в дозвуковом нестационарном потоке газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
4. Горелов Д. Н., Доминас Л. В. Определение нестационарных аэродинамических сил для пространственной решетки пластин в дозвуковом потоке газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
5. Söhnngen H., Quick A. W. Schwingungen in Verdichtern. *Comptes Rendus des Journees Intern. de Sciences Aeronautiques*, 27—29 mai, 1957. Paris, pt 1, Paris, 1957.
6. Курзин В. Б. Об аэродинамической интерференции профилей в дозвуковом нестационарном потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
7. Самойлович Г. С. О резонансных явлениях в аэродинамической решетке, обтекаемой до- или сверхзвуковым потоком. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
8. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1951.
9. Курзин В. Б. Об одном методе склеивания решения линейных краевых задач. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1969, № 5.
10. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. М., «Сов. радио», 1966.