

УДК 534

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПОСТРОЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОРТРЕТОВ МАТРИЦ

В. Б. Курзин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: kurzin@hydro.nsc.ru

Рассмотрен ряд важных свойств колебаний линейных систем (качество устойчивости систем, их обусловленность по отношению к собственным значениям матриц, а также возможность моделирования систем с большим числом степеней свободы ее подсистемами с меньшим числом степеней свободы), которые могут быть определены с помощью нового математического аппарата “Одномерные спектральные портреты матриц”, созданного под руководством С. К. Годунова. Приведен пример построения одномерных спектральных портретов для матриц, описывающих аэроупругие колебания гидродинамических решеток.

Ключевые слова: колебания, матрица, спектр, портрет, собственные значения.

Введение. Любая механическая система, подверженная колебательным движениям, обладает индивидуальными свойствами, которые определяют характер ее колебаний под действием заданного внешнего воздействия. В совокупности параметры системы или связанные с этими параметрами некоторые общие закономерности, описывающие указанные свойства, являются характеристиками колебательных движений данной системы как часть ее динамических характеристик. В теории колебаний к таким характеристикам относятся амплитудно-частотные, частотные и фазовые характеристики, которые могут быть определены как теоретически, так и экспериментально. Чисто теоретическими характеристиками являются дискретные спектральные портреты матриц, описывающие линейные колебания систем. Мнимые части собственных значений этих матриц определяют условия резонанса вынужденных колебаний систем под действием периодических сил, а вещественные части — демпфирующие свойства и устойчивость их колебательных движений.

Однако ряд важных свойств систем, определяющих как устойчивость, так и условия резонанса, указанные выше характеристики не описывают. Как известно, теорема Ляпунова определяет характер колебаний механических систем при их начальном возмущении относительно положения равновесия лишь в асимптотическом приближении и не дает оценку уровня соответствующих колебаний во всем промежутке времени. Кроме того, не выяснено, какое влияние на точность определения условий резонанса оказывает погрешность исходных данных. Такая погрешность может быть обусловлена неточностью теоретических моделей, технологической неточностью изготовления деталей соответствующих конструкций и неизбежным изменением параметров этих конструкций в процессе эксплуатации. Оценка влияния погрешности в исходных данных на точность определения динамических характеристик механических систем особенно необходима при описании колебаний неконсервативных систем, соответствующие матрицы которых не являются нор-

мальными. Известно большое количество примеров, когда это влияние весьма значительно. Иными словами, в указанных случаях матрицы плохо обусловлены по отношению к их собственным значениям. В частности, в работе [1] приводится пример, когда обусловленность матрицы практически равна бесконечности, так что для определения собственных значений не хватает точности расчетов персональных компьютеров.

Поиску решения проблем устойчивости и обусловленности произвольных матриц посвящен цикл работ, проведенных в СО РАН под руководством С. К. Годунова. Результаты этих работ обобщены в [2, 3]. С помощью решения матричного уравнения Ляпунова в работах [2, 3] получена максимальная оценка уровня асимптотически устойчивых колебаний во всем промежутке времени, разработан алгоритм и создана программа расчета. Что касается решения полной проблемы собственных значений, то в работах [2, 3] отмечена целесообразность изучения не точного их спектра, а так называемого ε -спектра, представляющего собой пятна на комплексной плоскости. Совокупность этих пятен образует двумерный спектральный портрет матриц, дающий наглядное представление о точности, с которой могут быть определены собственные значения при заданной погрешности исходных данных. Следует отметить, что одновременно и независимо на целесообразность введения ε -спектра указал Л. Н. Третьяков [4].

Для инженерных приложений введены одномерные спектральные портреты, разработан алгоритм и созданы соответствующие программы. Пример применения таких портретов для анализа колебаний механических систем рассмотрен в работе [5].

Целью данной работы является описание свойств колебаний систем, которые содержатся в одномерных спектральных портретах и не содержатся в известных в теории колебаний динамических характеристиках. Возможность получения дополнительной информации о характере колебаний механических систем с помощью одномерных спектральных портретов соответствующих матриц показана на примере задачи об аэроупругих колебаниях гидродинамических решеток.

1. Спектральные портреты матриц. В теории колебаний спектральным портретом матрицы A , описывающей линейные колебания системы, называется множество дискретных собственных значений этой матрицы, представленное в комплексной плоскости. Точные собственные значения должны удовлетворять характеристическому уравнению

$$\det [A - \lambda J] = 0. \quad (1.1)$$

Допуская определенную вычислительную погрешность при определении собственных значений, а также вероятную погрешность в исходных данных, равенство (1.1) целесообразно заменить на равенство

$$\|(\lambda J - A)^{-1}\| = \infty,$$

где $(\lambda J - A)^{-1}$ — резольвента матрицы A .

Собственные значения возмущенной матрицы $A_1 = A + \Delta$ ($\|\Delta\| \leq \varepsilon \|A\|$) принадлежат множеству Λ_ε ($\lambda \in \Lambda_\varepsilon(A)$), которое удовлетворяет условию

$$\|(\lambda J - A)^{-1}\| \leq 1/(\varepsilon \|A\|). \quad (1.2)$$

На комплексной плоскости множество $\Lambda_\varepsilon(A)$ представляет собой совокупность пятен ε -спектра, в каждом из которых содержится одно или несколько собственных значений матрицы A_1 , удовлетворяющих условию (1.2). Границы этих пятен могут быть определены как линии, для которых выполняется соотношение

$$\|(\lambda J - A)^{-1}\| = 1/(\varepsilon \|A\|).$$

Графическое представление спектральных пятен на комплексной плоскости при различных значениях ε называется двумерным спектральным портретом, который полностью характеризует локализацию собственных значений матрицы при заданном ее возмущении.

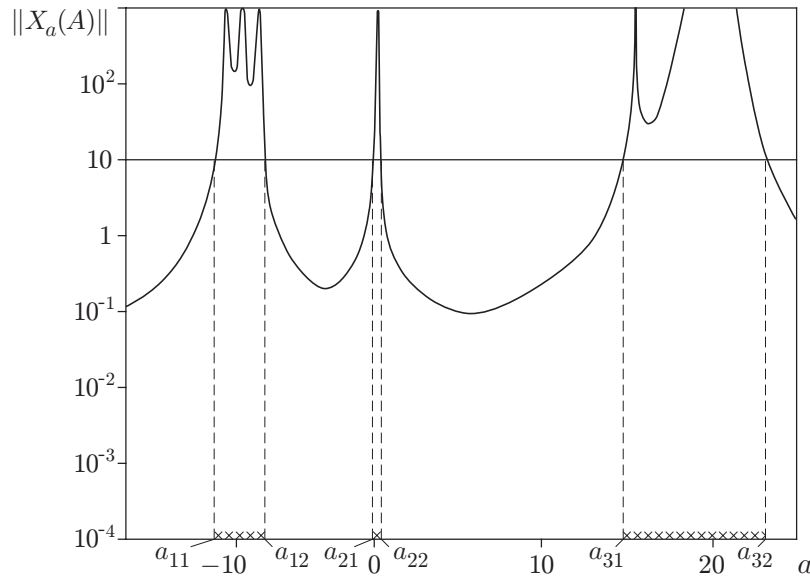


Рис. 1. Спектральный портрет матрицы A [3]

В теории колебаний индивидуальные свойства механических систем, определяющих уровень вынужденных колебаний ее элементов под действием заданных сил, описываются с помощью амплитудно-частотных характеристик. Условия резонанса при вынужденных колебаниях и оценка устойчивости свободных колебаний содержатся в дискретных спектральных портретах матрицы A . Покажем, что некоторые важные динамические свойства системы, отсутствующие в указанных выше характеристиках, содержатся в одномерных спектральных портретах. Следует отметить, что информация о собственных значениях матрицы, которую дает дискретный спектральный портрет, содержится и в ее одномерных спектральных портретах. Действительно, при прохождении контура интегрирования γ в (1.3) через точку $\lambda = \lambda_j$ (λ_j — собственные значения матрицы A) подынтегральное выражение (1.3) имеет особенность порядка удвоенной кратности λ_j . Отсюда следует, что при $\|X_a\| \rightarrow \infty$ и $\|H_R\| \rightarrow \infty$ предельные значения a и R в выражениях (1.4) определяют вещественные части и модули собственных значений матрицы A . При этом зависимость $\|H_R\|$ от R качественно согласуется с амплитудно-частотной характеристикой системы.

2.1. Первое свойство систем, содержащееся в одномерных спектральных портретах и не содержащееся в обычных динамических характеристиках систем, связано с критерием устойчивости их колебаний. Условие Ляпунова, согласно которому все собственные значения матрицы A должны находиться в левой полуплоскости относительно мнимой оси, является критерием устойчивости лишь в асимптотическом приближении, при $t \rightarrow \infty$. В [6] получена оценка вида

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(0)\| \sqrt{\|X\| \|X^{-1}\|} \exp\{-t(2\|C^{-1}\| \|X\|)\}, \tag{2.2}$$

где матрица X — решение матричного уравнения Ляпунова

$$XA + A^*X + C = 0.$$

Для устойчивой матрицы A модуль функции X на ее одномерном спектральном портрете равен

$$\|X\| = \|X_a(A)\|, \quad a = 0.$$

Важность этой оценки состоит в том, что она содержит свойство некоторых систем возбуждать интенсивные колебания отдельных элементов в процессе устойчивых по Ляпунову колебаний при достаточно умеренных начальных данных. Например, таким свойством могут обладать системы, совмещающие жесткие и массивные элементы с существенно менее жесткими и массивными. Полная механическая энергия таких систем, полученная в начальный момент времени, при определенных связях элементов в процессе колебаний может перераспределиться, так что основная часть этой энергии перейдет к менее жестким и массивным элементам. В результате может произойти существенное увеличение интенсивности колебаний последних.

2.2. Второе свойство систем, содержащееся в одномерных спектральных портретах матриц A из уравнения (2.1), описывающих их колебания, состоит в зависимости частотных и демпфирующих характеристик систем от величины возмущения параметров. Определение этой зависимости сводится к оценке обусловленности соответствующих матриц по отношению к их собственным значениям.

Для оценки чисел обусловленности отделенных друг от друга собственных значений матрицы A рассмотрим возмущенную матрицу $A_1 = A + \Delta$ ($\|\Delta\| \leq \varepsilon\|A\|$). С учетом (1.3), (1.4) на одномерных спектральных портретах матрицы A проведем линии, параллельные оси абсцисс и пересекающие оси ординат при

$$\|X_a(A)\| = \frac{1}{\pi\varepsilon\|A\|}, \quad \|H_R(A)\| = \frac{R}{\pi} \left[\varepsilon\|A\| + \frac{2}{\pi} \varepsilon\|A\|^2 \right]^{-1}. \quad (2.3)$$

Значения a и R , при которых эти линии пересекают кривые зависимостей $\|X_a(A)\|$ от a и $\|H_R(A)\|$ от R , обозначим согласно правилу

$$a_{11} < a_{12} < a_{21} < a_{22} < \dots < a_{j1} < a_{j2} < \dots < a_{n1} < a_{n2}$$

($n \leq N$; N — порядок матрицы).

Участки $[a_{j1}, a_{j2}]$ образуют одномерные спектральные пятна, в которых содержатся вещественные части собственных значений матрицы A , участки $[R_{j1}, R_{j2}]$ образуют одномерные спектральные пятна, в которых содержатся значения их модулей. На рис. 1 заштрихованы участки $[a_{j1}, a_{j2}]$ на оси абсцисс, представляющие собой спектральные пятна, соответствующие значениям $\varepsilon = 10^{-1}/(\pi\|A\|)$.

С учетом рассмотренных дополнительных построений на одномерных спектральных портретах докажем справедливость следующего утверждения, характеризующего обусловленность матрицы A по отношению к ее собственным значениям.

Утверждение. Для любого собственного значения λ_j матрицы A найдется собственное значение λ_{1k} возмущенной матрицы $A_1 + \Delta$ ($\|\Delta\| \leq \varepsilon\|A\|$), причем для вещественных частей и модулей этих собственных значений выполняются неравенства

$$|\operatorname{Re}(\lambda_j) - \operatorname{Re}(\lambda_{1k})| \leq L_{aj}, \quad \|\lambda_j| - |\lambda_{1k}|| \leq L_{Rj}, \quad (2.4)$$

где $L_{aj} = a_{j2} - a_{j1}$; $L_{Rj} = R_{j2} - R_{j1}$.

Для доказательства утверждения используем неравенства, которые следуют из теоремы 4.2 в [3]:

$$\begin{aligned} \max_t \|[(a + it)J - A]^{-1}\| &\leq \pi \|X_a(A)\|, \\ \max_\varphi \|(Re^{i\varphi} J - A)^{-1}\| &\leq \frac{\pi}{2R} \sqrt{\|H_R(A)\|^2 + \frac{4}{\pi^2} \|H_R(A)\|}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

а также неравенство

$$\|(A - \lambda J)^{-1}\| \geq 1/(\varepsilon\|A\|), \quad (2.6)$$

которому должно удовлетворять собственное значение λ матрицы A_1 согласно определению двумерных спектральных пятен. С учетом (2.3) и при условии

$$a \notin L_{aj}, \quad R \notin L_{Rj} \quad (2.7)$$

имеют место неравенства

$$\|X_a(A)\| < \frac{1}{\pi\varepsilon\|A\|}, \quad \|H_R(A)\| < \frac{R}{\pi} \left[\varepsilon\|A\| + \frac{2}{\pi} (\varepsilon\|A\|)^2 \right]^{-1}.$$

Отсюда следует, что при условии (2.7) неравенства (2.5), (2.6) несовместны, т. е. выполняются только при $a \in L_{aj}$, $R \in L_{Rj}$. Утверждение доказано.

Для описания свойства матриц, характеризующего их обусловленность по отношению к собственным значениям, величины L_{aj} и L_{Rj} в неравенствах (2.4) при фиксированных значениях $\varepsilon = \varepsilon_0$ представим в виде

$$L_{aj} = k_{aj}\varepsilon_0, \quad L_{Rj} = k_{Rj}\varepsilon_0. \quad (2.8)$$

Отметим, что в общем случае коэффициенты k_{aj} и k_{Rj} зависят от ε . Для собственных значений, каждое из которых находится в соответствующем пятне ε_0 -спектра, при $\varepsilon < \varepsilon_0$ имеет место представление

$$k_{aj} = c_{0j} + c_{1j}\varepsilon + c_{2j}\varepsilon^2 + \dots, \quad k_{Rj} = d_{0j} + d_{1j}\varepsilon + d_{2j}\varepsilon^2 + \dots. \quad (2.9)$$

Согласно методу возмущений для существенно различающихся собственных значений коэффициенты k_{aj} и k_{Rj} в выражениях (2.8) с учетом (2.9) дают оценку возмущений соответствующих компонент собственных значений с точностью до величин первого порядка малости ε_0 во всем диапазоне значений параметра $\varepsilon < \varepsilon_0 \ll 1$. В соответствии с терминологией теории возмущений эти коэффициенты называются соответствующими числами обусловленности матрицы A .

Однако в случае, когда пятно ε -спектра содержит несколько собственных значений (такое пятно принято называть кластером), представление (2.9) для соответствующих коэффициентов выражений (2.8) некорректно, так как при уменьшении параметра ε относительно ε_0 может произойти расщепление пятна (см. рис. 1). В общем случае коэффициенты k_{aj} и k_{Rj} в выражениях (2.8) характеризуют обусловленность матрицы A по отношению к соответствующим компонентам собственных значений лишь для фиксированных значений параметра $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Следует отметить важную для практических приложений закономерность, которая имеет место в спектральных портретах: обусловленность близких собственных значений, содержащихся в одном кластере, как правило, значительно хуже обусловленности собственных значений, в соответствующем кластере которых других собственных значений не содержится. Различить собственные значения, содержащиеся в одном кластере, иногда практически невозможно. В этом случае колебания в окрестности резонанса имеют непредсказуемую совокупность соответствующих мод.

2.3. Третье свойство системы, которое позволяет выявить радиальный спектральный портрет матрицы A , состоит в зависимости главных мод колебаний системы от различных обобщенных координат. При слабой зависимости некоторых главных мод колебаний системы от каких-либо ее обобщенных координат последние могут быть отброшены. В этом случае исследование колебаний исходной системы по соответствующим модам приближенно сводится к исследованию колебаний системы с меньшим числом степеней свободы. Иными словами, возникает возможность моделирования механической системы, описываемой матрицей высокого порядка, системами с матрицами более низкого порядка. Для выявления этого свойства при создании алгоритмов построения одномерных спектральных портретов проводится предварительная процедура приведения матрицы A к "клеточно-диагональному" виду. Согласно такой форме представления матрицы на спектральном

портрете имеет место расслоение спектра на кластеры. Каждому кластеру соответствует клетка-подматрица, с помощью которой можно моделировать спектральный портрет полной матрицы на соответствующем участке кластера. Точность моделирования с помощью таких подматриц определяется глубиной впадины между кластерами в зависимостях $\|H_R(A)\|$ от R .

3. Применение одномерных спектральных портретов для определения характеристик аэроупругих колебаний гидродинамических решеток. Рассмотрим изгибно-крутильные колебания решеток лопастей в потоке газа. Для плоской модели геометрически однородной решетки система дифференциальных уравнений, описывающих малые изгибно-крутильные колебания лопастей, имеет вид

$$\begin{aligned} m\ddot{h}_n + S_\alpha\ddot{\alpha}_n + K_h h &= qbL_n + cbF_n, \\ S_\alpha\ddot{h}_n + J_\alpha\ddot{\alpha}_n + K_\alpha\alpha_n &= qb^2M_n \quad (n = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $h_n(t)$ — величина поступательного перемещения характерного сечения n -й лопасти вследствие ее изгиба; $\alpha_n(t)$ — угол поворота сечения n -й лопасти относительно некоторой фиксированной точки; m , J_α — погонная масса и момент инерции сечения относительно упругой оси; K_h , K_α — коэффициенты изгибной и крутильной жесткостей соответственно; S_α — статический момент сечения лопасти относительно упругой оси; N — число лопастей в решетке; q — скоростной напор набегающего потока; b — хорда сечения лопасти; c — коэффициент жесткости. Правые части уравнений этой системы определяют нестационарные аэродинамические силы и моменты, действующие на лопасти, а также силы упругой связи между лопастями.

Согласно теории решеток в нестационарном потоке [7] безразмерные величины L_n , M_n , определяющие аэродинамические силы и моменты, действующие на n -ю лопасть, могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{r=1}^N \left(l'_{r-n,h} \frac{h_r}{b} + l''_{r-n,h} \frac{\dot{h}_r}{\omega b} + l'_{r-n,\alpha} \alpha_r + l''_{r-n,\alpha} \frac{\dot{\alpha}_r}{\omega} \right), \\ M_n &= \sum_{r=1}^N \left(m'_{r-1,h} \frac{h_r}{b} + m''_{r-n,h} \frac{\dot{h}_r}{\omega b} + m'_{r-n,\alpha} \alpha_r + m''_{r-n,\alpha} \frac{\dot{\alpha}_r}{\omega} \right). \end{aligned}$$

Здесь ω — собственная частота колебаний решетки в пустоте; коэффициенты при h_r , \dot{h}_r , α_r , $\dot{\alpha}_r$, определяющие аэродинамическое взаимодействие лопастей, приведены в [8].

Силы F_n упругой связи лопастей в решетке в рассматриваемой модели определяются по формуле

$$F_n = (h_{n-1} + h_{n+1} - 2h_n)/b.$$

Введем безразмерные переменные

$$\gamma = \frac{S_\alpha}{mb}, \quad \eta = \frac{S_\alpha}{J_\alpha}, \quad \nu = \frac{\omega_\alpha^2}{\omega_h^2}, \quad \varepsilon_0 = \frac{q}{m\omega^2}, \quad \sigma = \frac{c}{m\omega^2}, \quad z_n = \frac{h_n}{b} \quad (3.2)$$

($\omega_h^2 = K_h/m$, $\omega_\alpha^2 = K_\alpha/J_\alpha$ — квадраты парциальных собственных частот изгибных и крутильных колебаний лопастей в пустоте соответственно).

С учетом (3.2) система (3.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \ddot{z}_n + \gamma\ddot{\alpha}_n + \omega_h^2 z_n &= \omega^2(\varepsilon_0 L_n + \sigma F_n), \\ \ddot{\alpha}_n + \eta\ddot{z}_n + \omega_\alpha^2 \alpha_n &= \omega^2 \varepsilon_0 M_n \quad (n = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Записав систему (3.3) в виде системы $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений Гамильтона первого порядка, ее можно представить в форме (2.1).

Для расчета одномерных спектральных портретов матрицы A в качестве исходных параметров были взяты следующие величины, от которых зависят аэродинамические коэффициенты влияния: параметры $\gamma, \eta, \nu, \sigma, \varepsilon_0$, определяющие жесткостные и массовые характеристики лопастей, аэродинамическую и упругую связность их колебаний; геометрические параметры решетки (τ — густота, β — угол выноса, f — прогиб средней линии профиля лопасти, отнесенный к его хорде); а также число Струхала $k = \omega b/V$.

На рис. 2–5 представлены одномерные спектральные портреты матриц, описывающих колебания решетки тонких лопастей в потоке идеальной несжимаемой жидкости, при $N = 10, \tau = 1,5; \beta = 30^\circ, f = 0,025, k = 0,5, \varepsilon_0 = 0,01$ и различных значениях параметров $\gamma, \eta, \nu, \sigma$.

На рис. 2,а,б представлены линейные спектральные портреты матриц при $\nu = 2, \sigma = 0$ и $\gamma = \eta = -0,003; -0,300$ соответственно. Результаты сравнения значений $\|X_a(A)\|$ при $a = 0$ на рис. 2,а,б показывают, что согласно (2.2) качество устойчивости аэроупругих колебаний лопаток существенно зависит от положения их упругих осей относительно центра тяжести. Этот вывод согласуется с известной закономерностью для флаттерных характеристик решеток.

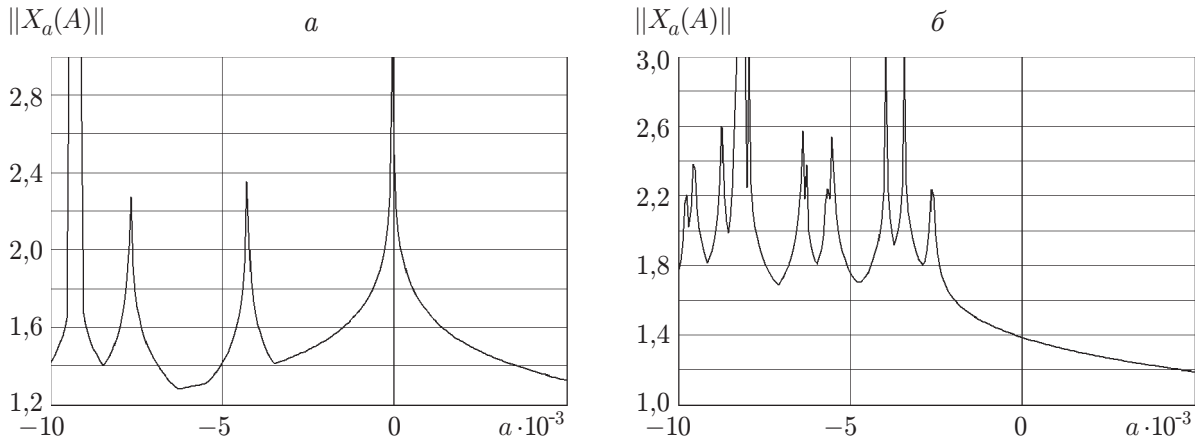


Рис. 2. Зависимость $\|X_a(A)\|$ от a при $\nu = 2, \sigma = 0$:
 а — $\gamma = \eta = -0,003$; б — $\gamma = \eta = -0,3$

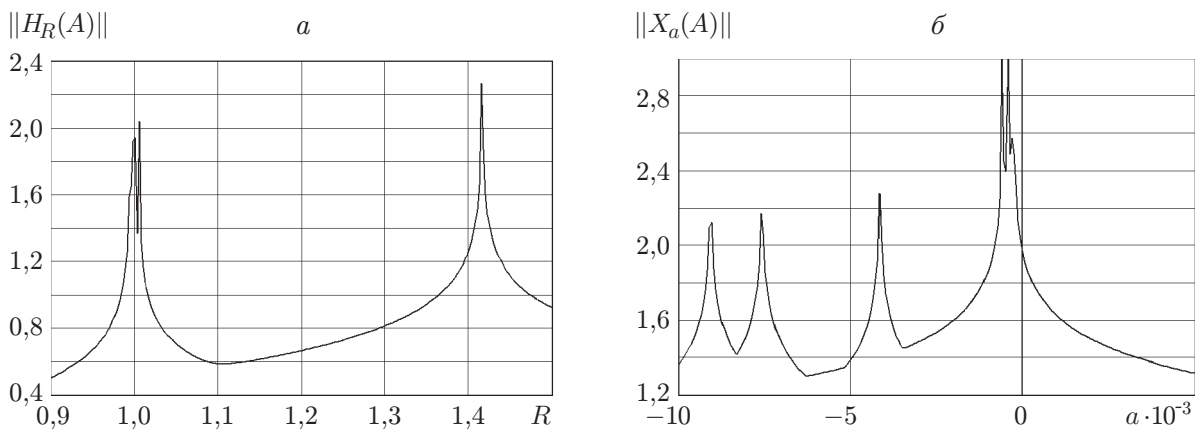


Рис. 3. Зависимости $\|H_R(A)\|$ от R (а) и $\|X_a(A)\|$ от a (б) при $\gamma = \eta = -0,03, \nu = 1, \sigma = 0$

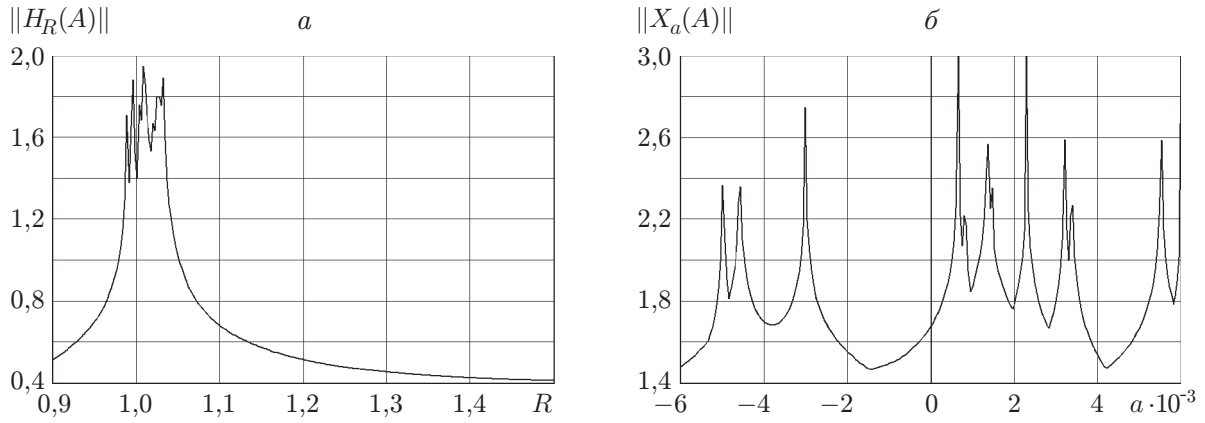


Рис. 4. Зависимости $\|H_R(A)\|$ от R (а) и $\|X_a(A)\|$ от a (б) при $\gamma = \eta = 0,03$, $\nu = 1$, $\sigma = 0,02$

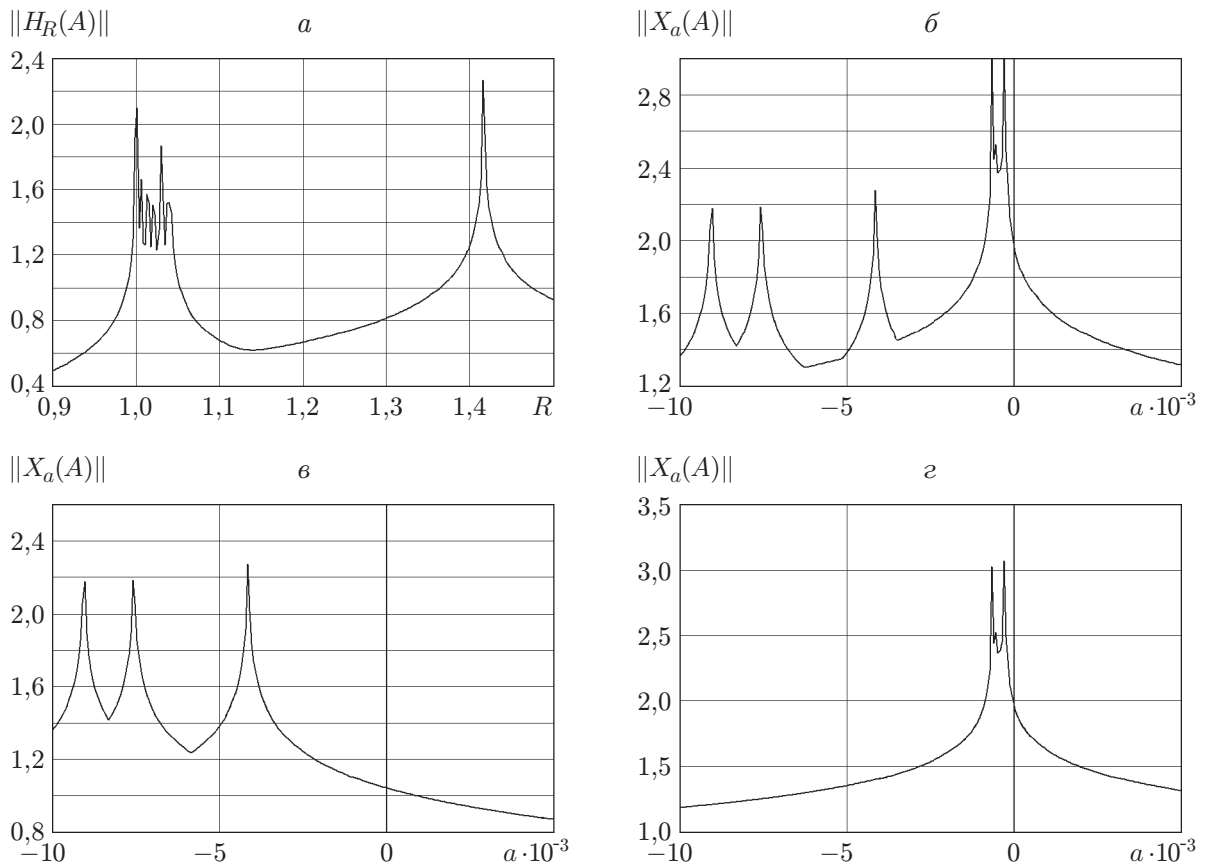


Рис. 5. Зависимости $\|H_R(A)\|$ от R (а) и $\|X_a(A)\|$ от a (б-г) для полной матрицы (а, б) в случае $\gamma = \eta = -0,03$, $\nu = 2$, $\sigma = 0,02$ и для ее подматриц (в, г), соответствующих кластерам спектрального портрета, представленного на рис. 5,а

На рис. 3, 4 представлены одномерные спектральные портреты матриц при $\gamma = \eta = -0,03$, $\nu = 1$, $\sigma = 0$ (вариант 1) и $\gamma = \eta = 0,03$, $\nu = 1$, $\sigma = 0,02$ (вариант 2) соответственно. Сравнение радиальных портретов матриц показывает, что согласно (2.4) обусловленность этих матриц по отношению к собственным значениям в первом варианте (рис. 3,а) лучше, чем во втором (рис. 4,а). Рассматривая матрицу аэродинамических коэффициентов влияния как возмущенную составляющую общей матрицы A , можно сделать вывод, что возмущения собственных значений, в том числе их вещественных частей, во втором варианте больше, чем в первом. Из результатов сравнения рис. 3,б и рис. 4,б следует, что вариант 2 соответствует меньшему запасу устойчивости системы.

Свойство матриц, определяющее возможность моделирования системы с большим числом степеней свободы ее подсистемами с меньшим числом степеней свободы, описывают одномерные спектральные портреты, представленные на рис. 5. На рис. 5,а,б приведены одномерные спектральные портреты матрицы, соответствующей системе с параметрами $\gamma = \eta = -0,03$, $\nu = 2$, $\sigma = 0,02$ и имеющей размерность $N_1 = 20$. На ее радиальном спектральном портрете (рис. 5,а) выделяются два кластера с достаточно глубокой впадиной между ними. Согласно третьему свойству (см. подп. 2.3) это позволяет моделировать исходную систему двумя подсистемами с размерностями $N_1 = 10$. На рис. 5,в,г представлены линейные спектральные портреты соответствующих подматриц, которые хорошо согласуются с портретом на рис. 5,б.

Заключение. В данной работе показано, что созданный под руководством С. К. Годунова новый математический аппарат “Одномерные спектральные портреты матриц” может быть использован для расчета динамических характеристик механических систем, которые в настоящее время не могут быть определены другими способами.

Автор выражает благодарность С. К. Годунову за внимание к работе и полезные замечания, а также А. А. Сайтгалину за помощь в проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1994. Т. 1.
2. Годунов С. К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Науч. кн., 1997.
3. Годунов С. К. Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Новосибирск: Науч. кн., 2002.
4. Trefethen L. N. Pseudospectra of matrices // Numerical analysis. S. l., 1991.
5. Godunov S. K., Kurzin V. B., Bunkov V. G., Sadkane M. Application of a new mathematical tool “One-dimensional spectral portraits of matrices” to the problem of aeroelastic vibrations of turbine-blade cascades // Turbomachines: aeroelasticity, aeroacoustics, and unsteady aerodynamics. M.: Torus Press Ltd., 2006. P. 9–23.
6. Булгаков А. Я. Эффективно вычисляемый параметр качества устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 3. С. 339–347.
7. Горелов Д. Н. Аэродинамика решеток в нестационарном потоке / Д. Н. Горелов, В. Б. Курзин, В. Э. Сарен. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1971.
8. Горелов Д. Н. Атлас нестационарных аэродинамических характеристик решеток профилей / Д. Н. Горелов, В. Б. Курзин, В. Э. Сарен. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1974.

*Поступила в редакцию 19/І 2007 г.,
в окончательном варианте — 19/ІІІ 2007 г.*