

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдразаков А., Жайнаков А., Жеенбаев Ж., Конавко Р. И., Энгельнт В. С. Изучение струи плазмы зондовым и теневыми методами. — В кн.: Применение плазмотрона в спектроскопии. (Материалы Всесоюз. симпоз.). Фрунзе: Илим, 1970.
2. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Т. 1. М.: Наука, 1971.

УДК 532.517.4

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОДНОТОЧЕЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СКОРОСТИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В. А. Сабельников

(Москва)

Предлагается и анализируется полуэмпирическое уравнение для одноточечного распределения вероятностей скорости в турбулентных потоках. Силы инерции в уравнении точно выражаются через распределение вероятностей. Остальные члены, связанные с силами давления и вязкости, не выражаются точно через искомое распределение вероятностей, и для их аппроксимации привлекаются полуэмпирические выражения. Основной произвол возникает при аппроксимации члена с давлением. В работе она выбрана из условия совпадения соответствующих членов в уравнениях для вторых моментов, следующих из уравнения для распределения вероятностей и используемых в существующих полуэмпирических теориях.

Одним из основных свойств полученного уравнения является его нелокальный характер, что, по крайней мере качественно, согласуется с современными представлениями о закономерностях турбулентного переноса. Важную роль в уравнении играет скорость диссипации энергии — фундаментальная характеристика турбулентности. Она пропорциональна коэффициенту диффузии в фазовом пространстве.

В тех областях потока, где баланс энергии турбулентного движения в основном сводится к порождению и диссипации, решением уравнения является нормальное распределение. Этот вывод находится в удовлетворительном качественном соответствии с опытными данными в логарифмическом слое.

1. Основные уравнения. Точное незамкнутое уравнение для одноточечного распределения вероятностей, полученное в [1—4] из уравнений Навье — Стокса, имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial P}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_u P - \nu \frac{\partial^2 P}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = 0,$$

где $P(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ — распределение вероятностей скорости; t — время; x_k — координаты точки ($k = 1, 2, 3$); u_k — гидродинамическая скорость; $\varepsilon_{ij} = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}$ — тензор мгновенных скоростей диссипации энергии; ν — коэффициент молекулярной вязкости; $\pi_k = \langle \partial p / \partial x_k \rangle_u P$; p — кинематическое давление; символами $\langle \rangle$, $\langle \rangle_u$ обозначено соответственно полное (безусловное) осреднение и осреднение при заданном значении \mathbf{u} . По повторяющимся индексам здесь и далее производится суммирование от 1 до 3.

Первые два члена в (1.1) описывают силы инерции, третий — силы давления и последние два — вязкие силы. Существенно, что силы инерции точно выражаются через искомое распределение вероятностей. В этом состоит основное преимущество использования распределений вероятностей по сравнению с существующими полуэмпирическими теориями для вторых моментов. Как известно, аппроксимация третьих моментов в этих уравнениях представляет наибольшие трудности. Силы давления и вязкости не выражаются точно через $P(\mathbf{u})$, и поэтому, как и в полуэмпирических теориях для вторых моментов, аппроксимация этих членов требует привлечения нестрогих соображений. В [5—7] для этой цели использовалась аналогия с кинетической теорией. В [8] содержатся общие сообра-

жения о замыкании уравнений для конечно-мерных распределений вероятностей. В данной работе используется другой вариант замыкания, основанный на результатах [3, 4].

Рассмотрим вначале силы вязкости. При больших числах Рейнольдса и вне областей, непосредственно прилегающих к стенкам (условиях, предполагаемых выполненными во всем дальнейшем изложении), последний член в (1.1), описывающий диффузию осредненных характеристик из-за молекулярной вязкости, можно опустить. Для величины $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{\mathbf{u}}$, следуя [3, 4], примем гипотезу

$$(1.2) \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle_{\mathbf{u}} = (1/3)\langle \varepsilon \rangle \delta_{ij}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{\alpha\alpha},$$

где $\langle \varepsilon \rangle$ — скорость диссипации энергии турбулентности.

Величина $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{\mathbf{u}}$ замерялась в опытах [9], где установлено, что (1.2) является хорошим приближением и отмечается, что гипотеза (1.2) применима лишь в полностью турбулентной жидкости. Следовательно, учет перемежаемости несколько изменит уравнение для распределения вероятностей. Уравнения для этого случая получены в [10]. Согласно [9], влияние перемежаемости на распределение вероятностей скорости слабое, поэтому будем использовать (1.2) во всех точках потока.

Перейдем к аппроксимации функций π_k . Выделим в них в явном виде градиент среднего давления $\pi_k = (\partial \langle p \rangle / \partial x_k) P + \delta \pi_k$.

Функции $\delta \pi_k$ связаны только с пульсациями давления и характеризуют три процесса: 1) перераспределение энергии турбулентного движения между различными компонентами вектора пульсационной скорости из-за нелинейного взаимодействия пульсаций скорости самих с собой (вклад этого процесса в $\delta \pi_k$ обозначим $\pi_k^{(1)}$); 2) перераспределение энергии между направлениями, но уже из-за деформации турбулентности в сдвиговом осредненном течении (соответствующий вклад обозначим $\pi_k^{(2)}$); 3) перенос энергии по пространству. В уравнении энергии турбулентности последний процесс описывается выражением $\partial \langle p' v_{\alpha} \rangle / \partial x_{\alpha}$, $p' = p - \langle p \rangle$, $v_k = (u_k - \langle u_k \rangle)$ — компоненты вектора пульсационной скорости. Вклад этого процесса в $\delta \pi_k$ обозначим $\pi_k^{(3)}$. Таким образом, $\delta \pi_k = \pi_k^{(1)} + \pi_k^{(2)} + \pi_k^{(3)}$. Третий процесс наиболее важен в свободных турбулентных течениях. Он имеет существенно нелокальный характер, что вызывает серьезные затруднения при его аппроксимации. В то же время, согласно экспериментальным данным (см., например, [11]), вкладом третьего процесса в суммарный баланс энергии турбулентного движения в ряде случаев можно пренебречь. В качестве первого приближения далее считается, что $\pi_k^{(3)} = 0$.

Следуя [12], предположим, что связь между $\delta \pi_k$ и P описывается дифференциальным соотношением, в которое входят производные от P по u_k , но не выше первого порядка. Последнее ограничение обусловлено тем, что в противном случае порядок уравнения (1.1) будет выше второго и качественная структура его решений будет определяться членом $\delta \pi_k / \partial u_{\alpha}$, а не $(1/3)\langle \varepsilon \rangle \partial^2 P / \partial u_{\alpha}^2$, что не соответствует современным представлениям о важной роли скорости диссипации энергии. Далее, связь $\delta \pi_k$ с P должна быть такой, чтобы тождественно удовлетворялись следующие условия:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right\rangle &= \int \delta \pi_k d^3 \mathbf{u} = 0, \quad \left\langle v_{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial x_{\alpha}} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial p' v_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \right\rangle - \left\langle p' \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} \right\rangle = \\ &= \int v_{\alpha} \delta \pi_{\alpha} d^3 \mathbf{u} = \int v_{\alpha} \pi_{\alpha}^{(3)} d^3 \mathbf{u} = 0. \end{aligned}$$

Перечисленные требования еще не позволяют однозначно связать $\delta \pi_k$ с P . Окончательный выбор выражения для $\delta \pi_k$ сделаем из условия, чтобы выражение для корреляции $\langle p' (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) \rangle$, следующее из него, совпадало с используемым в существующих полуэмпирических теориях для вторых моментов (см., например, [13]). Тогда (выражение для $\pi_k^{(1)}$ приводилось ранее в [6]) имеем

$$(1.3) \quad \delta\pi_k = \pi_k^{(1)} + \pi_k^{(2)}, \quad \pi_k^{(1)} = T^{-1} \left(v_k P + \sigma^2 \frac{\partial P}{\partial v_k} \right),$$

$$\pi_k^{(2)} = A \frac{\partial U_k}{\partial x_\alpha} \sigma^2 \frac{\partial P}{\partial n_\alpha} + \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} \left(D_1 T_{k\beta} \frac{\partial P}{\partial v_\alpha} + D_2 T_{k\alpha} \frac{\partial P}{\partial n_\beta} + C T_{\alpha\beta} \frac{\partial P}{\partial v_k} \right),$$

$$D_1 + D_2 + 3C = 0, \quad U_k = \langle u_k \rangle,$$

где $T_{ij} = \langle v_i v_j \rangle$ — тензор напряжений Рейнольдса; $\sigma^2 = T_{\alpha\alpha}/3$; $T = R^{-1} \langle \varepsilon \rangle^{-1} \sigma^2$ — временной масштаб турбулентности; R, A, D_1, D_2, C — эмпирические постоянные. Их можно связать со вторыми моментами в логарифмическом слое, выписав для последних уравнения (для этого уравнение (1.1) надо умножить на $v_i v_j$ и проинтегрировать по нему v) при использовании принятой аппроксимации для $\delta\pi_k$ (1.3), (1.2) (как известно [11], в логарифмическом слое диффузия и конвекция энергии пренебрежимо малы). После несложных выкладок получим

$$D_1 = 1 - R(2\langle u^2 \rangle + \langle v^2 \rangle - 3\sigma^2)/\sigma^2, \quad D_2 = -R(\langle u^2 \rangle + 2\langle v^2 \rangle - 3\sigma^2)/\sigma^2,$$

$$A = [\langle v^2 \rangle (1 - D_1) - \langle u^2 \rangle D_2]/\sigma^2 - 2Ru_*^4/\sigma^4, \quad C = -(D_1 + D_2)/3,$$

где $v_1 = u, v_2 = v, v_3 = w, u_*$ — скорость трения.

В дальнейшем удобно рассматривать распределение вероятностей для вектора пульсационной скорости \mathbf{v} . Обозначим это распределение также через $P(\mathbf{v})$. Уравнение для $P(\mathbf{v})$ получается из (1.1) после перехода к новой переменной $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{U}$. Используя осредненное уравнение импульсов

$$(1.4) \quad DU_i/Dt = -\partial \langle p \rangle / \partial x_i - \partial T_{i\alpha} / \partial x_\alpha,$$

$$D/Dt = \partial / \partial t + U_\alpha \partial / \partial x_\alpha$$

и принятые аппроксимации для $\langle \varepsilon_{ij} \rangle_{\mathbf{u}}$ и $\delta\pi_k$, получим

$$(1.5) \quad \frac{DP}{Dt} + v_\alpha \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} + \left(\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - v_\alpha \frac{\partial U_\beta}{\partial x_\alpha} - T^{-1} U_\alpha \right) \frac{\partial P}{\partial v_\alpha} = \bar{D}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 P}{\partial n_\alpha \partial v_\beta} + 3T^{-1} P,$$

$$D_{ij} = \left(T^{-1} \sigma^2 + C \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \langle \varepsilon \rangle \right) \delta_{ij} + \frac{1}{2} A \sigma^2 \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} T_{i\beta} \left(D_1 \frac{\partial U_j}{\partial x_\beta} + D_2 \frac{\partial U_\beta}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} T_{j\beta} \left(D_1 \frac{\partial U_i}{\partial x_\beta} + D_2 \frac{\partial U_\beta}{\partial x_i} \right), \quad D_{ij} = D_{ji}.$$

Здесь \bar{D}_{ij} — тензор коэффициентов диффузии в фазовом пространстве. К уравнениям (1.4), (1.5) необходимо добавить еще уравнение неразрывности поля средней скорости $\text{div } \mathbf{U} = 0$.

Скорость диссипации энергии турбулентности $\langle \varepsilon \rangle$ входит в (1.5) как внешний параметр, поэтому для ее определения необходимо использовать соответствующие экспериментальные данные или решать полуэмпирическое уравнение. Последнее имеет вид [13]

$$(1.6) \quad \frac{D \langle \varepsilon \rangle}{Dt} = \frac{2 \langle \varepsilon \rangle}{3\sigma^2} (C_{\varepsilon 1} g - C_{\varepsilon 2} \langle \varepsilon \rangle) + C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{3\sigma^2}{2 \langle \varepsilon \rangle} T_{\alpha\beta} \frac{\partial \langle \varepsilon \rangle}{\partial x_\beta} \right),$$

$$g = -\langle v_\alpha v_\beta \rangle \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\beta}, \quad C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 2} - k^2 (1.5\sigma^2)^2 \langle v^2 \rangle C_\varepsilon u_*^{-6}.$$

Здесь $C_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$ — эмпирические постоянные (связь между ними получена из рассмотрения логарифмического слоя); k — постоянная Кармана.

Свойства уравнения (1.5) существенно зависят от знакоопределенности матрицы D_{ij} и от направления вектора \mathbf{v} , так как эти параметры определяют направление переноса информации в фазовом пространстве. Направление \mathbf{v} известно заранее, а знакоопределенность матрицы D_{ij} , вообще говоря, зависит от координат x_k . Поверхности, на которых меняется знакоопределенность матрицы \bar{D}_{ij} , могут в принципе являться особыми. В данном случае, однако, поскольку D_{ij} не зависит от \mathbf{v} , никаких ограничений на решение на указанных поверхностях не существует.

Проанализируем на основе (1.5) распределение вероятностей в од-

нородной турбулентности ($\langle u_k \rangle = 0$). Уравнение в этом случае имеет вид

$$(1.7) \quad \partial P / \partial t - T^{-1} \partial v_k P / \partial v_k = (R - 1/3) \langle \varepsilon \rangle \partial^2 P / \partial v_\alpha^2.$$

Согласно оценке, приведенной в п. 2, $(R - 1/3) > 0$, и, следовательно, (1.7) — параболическое уравнение с положительным коэффициентом диффузии. Если же считать $\delta \pi_k = 0$, как это принято в [3, 4], то (1.7) превратится в параболическое уравнение с отрицательным коэффициентом диффузии, для которого, как известно, задача Коши является некорректной. Учет π_k , таким образом, регуляризует задачу.

Общее решение уравнения (1.7) описывается соотношением

$$(1.8) \quad P(\mathbf{v}, t) = \int G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0, t, t_0) P(\mathbf{v}_0, t_0) d^3 \mathbf{v}_0,$$

$$G = (2\pi)^{-3/2} (\langle u^2 \rangle_\delta \langle v^2 \rangle_\delta \langle w^2 \rangle_\delta)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(u - u_0 \varphi)^2}{\langle u^2 \rangle_\delta} + \frac{(v - v_0 \varphi)^2}{\langle v^2 \rangle_\delta} + \frac{(w - w_0 \varphi)^2}{\langle w^2 \rangle_\delta} \right] \right\}, \quad \langle v_i^2 \rangle_\delta = \langle v_i^2 \rangle - \langle v_i^2 \rangle_0 \varphi^2,$$

$$\varphi = \exp \left[-R \int_{t_0}^t \sigma^{-2} \langle \varepsilon \rangle dt \right], \quad \frac{1}{2} \frac{d \langle v_i^2 \rangle}{dt} = -T^{-1} \langle v_i^2 \rangle + \left(R - \frac{1}{3} \right) \langle \varepsilon \rangle,$$

$$\langle v_i^2 \rangle |_{t=t_0} = \langle v_i^2 \rangle_0.$$

Из (1.8) следует, что нормальное распределение сохраняет свою форму в процессе вырождения турбулентности. Как легко видеть, для нормального распределения $\delta \pi_k = 0$. В однородной изотропной турбулентности нормальное распределение является единственным ограниченным для всех конечных t решением уравнения (1.7) при $\delta \pi_k = 0$ [3, 4], что связано с обратнo-параболическим типом уравнения в этом случае.

Наиболее важный вывод, который следует из (1.8), состоит в том, что при $t \rightarrow \infty$ главный член в асимптотическом разложении распределения вероятностей описывается автомодельной зависимостью $(\langle \varepsilon \rangle t)^{-3/2} F[|\mathbf{u}| \times (\langle \varepsilon \rangle t)^{-1/2}]$, где F — изотропное нормальное распределение, а $\delta \pi_k$ сказывается в последующих членах этого разложения. В связи с полученным результатом отметим, что предложенное в [5] уравнение не обладает этим важным свойством и информация о начальном распределении проявляется в главном члене на всех временах.

Укажем простое решение уравнения (1.5) для случая, когда баланс энергии турбулентности в основном сводится к порождению и диссипации. В (1.5) можно тогда пренебречь всеми членами с пространственными производными. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что в этом приближении решением (1.5) является нормальное распределение, моменты которого связаны уравнениями для вторых моментов с опущенными конвективными и диффузионными членами (для упрощения выкладок удобно перейти к характеристической функции). Полученный результат качественно удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными в логарифмическом слое [14, 15].

2. Установившееся течение в канале. Рассмотрим установившееся турбулентное течение в плоском канале, стенки которого совпадают с плоскостями $y = 0$ и $y = H$, а компоненты средней скорости равны $\langle u_1 \rangle = U(y)$, $\langle u_2 \rangle = \langle u_3 \rangle = 0$. Уравнения (1.4) — (1.6) в данном случае принимают вид

$$(2.1) \quad 0 = -\partial \langle p \rangle / \partial x - d \langle uv \rangle / dy, \quad 0 = -\partial \langle p \rangle / \partial y - d \langle v^2 \rangle / dy;$$

$$(2.2) \quad v \partial P / \partial y + (d \langle uv \rangle / dy - v d U / dy - T^{-1} u) \partial P / \partial u + (d \langle v^2 \rangle / dy - T^{-1} v) \partial P / \partial v - T^{-1} w \partial P / \partial w = D_{\alpha\beta} \partial^2 P / \partial v_\alpha \partial v_\beta + 3T^{-1} P;$$

$$(2.3) \quad \frac{2 \langle \varepsilon \rangle}{3\sigma^2} (C_{\varepsilon 1} g - C_{\varepsilon 2} \langle \varepsilon \rangle) + C_\varepsilon \frac{d}{dy} \left(\frac{3\sigma^2}{2 \langle \varepsilon \rangle} \langle v^2 \rangle \frac{d \langle \varepsilon \rangle}{dy} \right) = 0.$$

Отличные от нуля компоненты тензора D_{ij} равны выражениям

$$D_{11} = \left(R - \frac{1}{3}\right) \langle \varepsilon \rangle - (D_1 + C)g, \quad D_{22} = \left(R - \frac{1}{3}\right) \langle \varepsilon \rangle - (D_2 + C)g,$$

$$D_{33} = \left(R - \frac{1}{3}\right) \langle \varepsilon \rangle - Cg, \quad D_{12} = D_{21} = \frac{1}{2} \frac{dU}{dy} (D_1 \langle v^2 \rangle + D_2 \langle u^2 \rangle + A\sigma^2).$$

Распределение напряжения сдвига $\langle uv \rangle$, входящего в (2.2), (2.3) и в выражения для компонент тензора D_{ij} , находится из (2.1):

$$(2.4) \quad \langle uv \rangle = u_{*0}^2 [(1 + \omega)y/H - 1], \quad \omega = (u_{*1}/u_{*0})^2.$$

Индексы 0 и 1 в (2.4) относятся к разным стенкам канала.

Градиент скорости dU/dy в (2.2) (тем самым дефект скорости) определяется из условия $I_u = \int uPd^3\mathbf{u} = 0$, следующего из определения распределения вероятностей пульсаций скорости. Чтобы показать это, умножим (2.2) последовательно на I , u и v и проинтегрируем. В результате получим соотношения

$$\frac{dI_v}{dy} = 0, \quad \frac{dI_{uv}}{dy} - I_0 \frac{d\langle uv \rangle}{dy} + \frac{dU}{dy} I_v = -\frac{1}{T} I_{uv},$$

$$\frac{d\langle v^2 \rangle}{dy} - I_0 \frac{d\langle v^2 \rangle}{dy} = -\frac{1}{T} I_v, \quad I_v = \int vPd^3\mathbf{u}, \quad I_0 = \int Pd^3\mathbf{u},$$

$$I_{uv} = \int uvPd^3\mathbf{u}.$$

Поскольку (в силу граничных условий) $I_v = 0$ при $y = 0$, $y = H$, то из первого и третьего соотношений следует, что $I_v = 0$, $I_0 = 1$, $0 \leq y \leq H$. Нетривиальным остается лишь условие $I_u = 0$, которое позволяет определить dU/dy (отметим также, что при $I_u = 0$ интеграл I_{uv} тождественно равен выражению для $\langle uv \rangle$ (2.4)).

Для решения уравнения (2.2) необходимо задать распределение вероятностей при $y = 0$ и $y = H$. Поскольку в логарифмическом слое имеет место локальное равновесие между диссипацией и порождением энергии турбулентности, то, согласно результатам п. 1, распределение вероятностей при $y = 0$ и $y = H$ является нормальным. Из условия существования моментов любого конечного порядка имеем также

$$\lim_{|\mathbf{v}| \rightarrow \infty} |\mathbf{v}|^k P = 0, \quad |\mathbf{v}| \rightarrow \infty \text{ при любом } k > 0.$$

Распределение вероятностей P зависит от четырех переменных, что приводит к существенным затруднениям при численном решении (2.2), связанным с возможностями ЭВМ. Выйти из этого положения позволяет специфическая структура уравнения (2.2). Оказывается, что (2.2) эквивалентно бесконечной системе уравнений для функций меньшей размерности. Для определения средней скорости и вторых моментов достаточно первых четырех уравнений из системы. Эти уравнения, как и (2.2), являются нелинейными интегродифференциальными уравнениями, а все остальные — линейны (интересно, что похожая ситуация встречается и в кинетической теории газов при рассмотрении модельных уравнений, см., например, [16]). Все сказанное применимо и к полуэмпирическому уравнению для распределения вероятностей, полученному в [5], которое использовалось ранее в [17] при расчете плоского течения Куэтта, когда $|\langle u, v \rangle| = u_*^2 = \text{const}$ (решением (2.2) в этом случае является нормальное распределение).

Первые четыре функции связаны с распределением вероятностей следующими соотношениями:

$$P_2(v) = \int Pdudw, \quad J(v) = \int uPdudw = \langle u \rangle_v P_2,$$

$$H_1(v) = \int u^2Pdudw = \langle v^2 \rangle_v P_2, \quad H_3(v) = \int w^2Pdudw = \langle w^2 \rangle_v P_2.$$

Интегрируя (2.2), умноженное на $u^l w^m$ ($l = 0, m = 0; l = 1, m = 0; l = 2, m = 0; l = 0, m = 2$), получим для них уравнения

$$(2.5) \quad \begin{aligned} L(P_2) &= T^{-1}P_2, \quad L(J) = -S_1 \partial P_2 / \partial v + S_2 P_2, \\ L(H_1) &= -T^{-1}H_1 - 2S_1 \partial J / \partial v + 2S_2 J + S_3 P_2, \\ L(H_3) &= -T^{-1}H_3 + S_4 P_2, \quad S_1 = dU/dy [D_1 \langle v^2 \rangle + D_2 \langle u^2 \rangle + \\ &\quad + A\sigma^2], \\ S_2 &= (d\langle uw \rangle / dy - v dU/dy), \quad S_3 = 2\langle \epsilon \rangle [R - 1/3 - g(D_1 + \\ &\quad + C) / \langle \epsilon \rangle], \\ S_4 &= 2\langle \epsilon \rangle \left[R - \frac{1}{3} - gC / \langle \epsilon \rangle \right], \quad L = v \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{d\langle v^2 \rangle}{dy} - T^{-1}v \right) \frac{\partial}{\partial v} - D_{22} \frac{\partial^2}{\partial v^2}, \\ \langle u^2 \rangle &= \int H_1 dv, \quad \langle v^2 \rangle = \int v^2 P_2 dv, \quad \langle w^2 \rangle = \int H_3 dv. \end{aligned}$$

Система уравнений (2.3), (2.5), если к ней добавить условие для определения градиента скорости $I_u = \int u P d^3 \mathbf{v} = \int J dv = 0$, является замкнутой. Моменты, не выражающиеся через введенные функции, находятся из других уравнений в системе, но уже после решения уравнений (2.3), (2.5). Например, для определения $\langle u^3 \rangle$ надо ввести функцию $\int u^3 P dudv$, уравнение для которой, как указывалось выше, будет линейным.

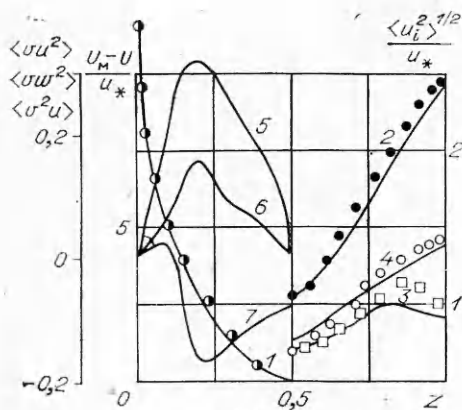
Существенное значение для выбора алгоритма численного решения уравнений (2.5) имеет тот факт, что коэффициент перед производной по координате y меняет знак. Следовательно, несмотря на то, что (2.5) — параболические уравнения, оба направления по координате y для них равноправны. Этим объясняется постановка двух граничных условий по координате y (теория уравнений такого типа интенсивно развивается в последние годы, см., например, [18]).

Для численного решения уравнения (2.5) применялась схема с разностями против потока (со вторым порядком аппроксимации во внутренних точках области), позволяющая достаточно просто учесть отмеченное равноправие по координате y . Подобная задача для распределения вероятностей концентрации ранее решалась в [19]. В отличие от [19] в данном случае коэффициент диффузии D_{22} , вообще говоря, может менять знак при некоторых значениях y , что необходимо учесть при конечно-разностной аппроксимации уравнений. Полученная нелинейная система конечно-разностных уравнений решалась итерационным методом.

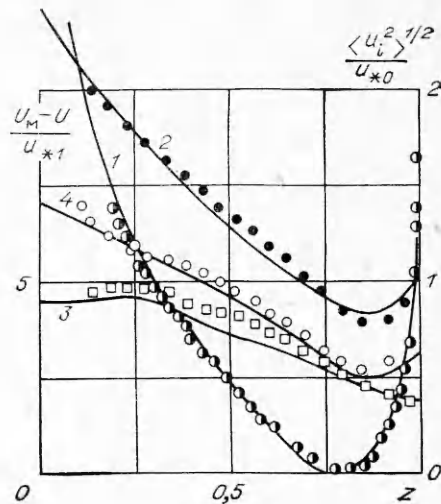
При проведении расчетов система (2.3), (2.5) обезразмеривалась: величины размерности скорости относились к u_{*0} , а размерности длины — к H . Краевое условие, соответствующее $|v| \rightarrow \infty$, ставилось при $|v|_m = = 3\langle v^2 \rangle_0^{1/2}$. В случае $\omega = 1$, благодаря симметрии задачи, решение искалось на отрезке $0 \leq y/H \leq 0,5$. Разностная сетка по переменной v бралась равномерной, по координате y — неравномерной, со сгущением вблизи стенок, а для случая $\omega = 0,2$ и в окрестности точки нулевого сдвига ($y_0/H = 0,83$). Число узлов по координате y равнялось 51. Для $\omega = 1$ расчеты выполнены при двух шагах сетки по v — $\Delta v = |v|_m/45$ и $\Delta v = = |v|_m/90$ и дали практически совпадающие между собой результаты. Для $\omega = 0,2$ расчеты проводились при $\Delta v = |v|_m/45$.

Для эмпирических постоянных в расчетах принимались следующие значения: $R = 0,8$ — на основании опытов [20]; $C_{e2} = 2$; $C_e = 0,13$ — согласно рекомендациям [22]; $k = 0,41$ — стандартное значение постоянной Кармана. Постоянные A , D_1 , D_2 , C и C_{e1} задавались, исходя из опытных данных для вторых моментов в логарифмическом слое, полученных в [14].

Следует отметить, что во всех проведенных расчетах в установившемся решении коэффициент диффузии D_{22} больше нуля, хотя в итерационном процессе он неоднократно менял знак.



Фиг. 1

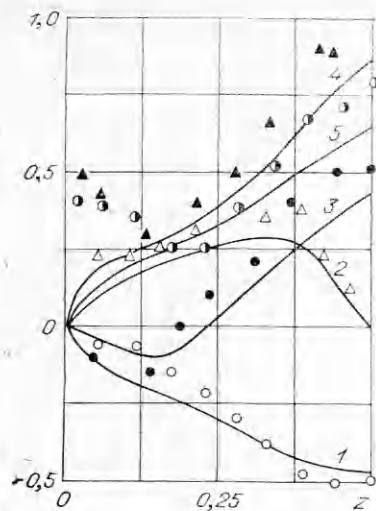


Фиг. 2

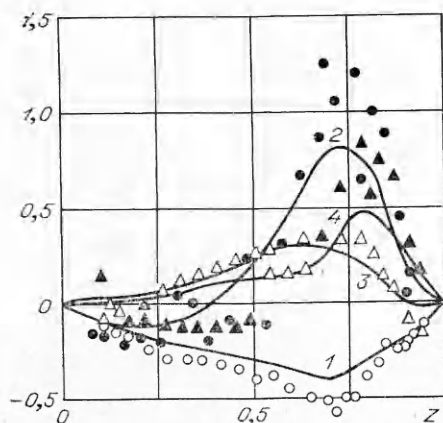
На фиг. 1, 2 приведено сопоставление между расчетными и экспериментальными данными для средней скорости и вторых моментов в симметричном ($\omega = 1$) [14] и несимметричном каналах ($\omega = 0,2$) соответственно ($1 - (U_m - U)/u_*$, U_m — максимальное значение скорости; $2 - \langle u^2 \rangle$; $3 - \langle v^2 \rangle$; $4 - \langle w^2 \rangle$). Видно, что в расчетах количественно верно описывается разница в положениях точки нулевого сдвига ($y_0/H = 0,83$) и точки нулевого градиента скорости ($y_m/H = 0,73$) для несимметричного канала (что приводит к явлению «отрицательной» вязкости). Этот эффект ранее расчетным путем получен в [21] с помощью уравнения для напряжения сдвига $\langle uv^2 \rangle$, в котором третий момент аппроксимировался градиентным образом $\langle uv^2 \rangle \sim -(\sigma^4/\langle \epsilon \rangle) d\langle uv \rangle / dy$. Заметим, что расчет всех вторых моментов по существующим полуэмпирическим уравнениям для течений в каналах, по-видимому, еще не проводился, по крайней мере соответствующие данные в литературе отсутствуют.

Перейдем теперь к результатам расчета моментов третьего и четвертого порядков и их сопоставлению с экспериментальными данными. На фиг. 1 представлены результаты расчета третьих моментов в симметричном канале ($5 - \langle uv^2 \rangle$, $6 - \langle vw^2 \rangle$, $7 - \langle v^2 u \rangle$). Соответствующие экспериментальные данные в литературе обнаружить не удалось. Результаты сопоставления расчетных и экспериментальных данных для симметричного канала [14] по коэффициентам асимметрии и эксцесса приведены на фиг. 3 ($1 - A_u$; $2 - A_v$; $3 - E_u$; $4 - E_v$; $5 - E_w$, A и E — соответственно коэффициенты асимметрии и эксцесса, смысл нижнего индекса устанавливается из принятых обозначений для пульсаций скорости). На фиг. 4, 5 представлены расчетные и экспериментальные данные в несимметричном канале [22] (на фиг. 4 $1 - \langle uv^2 \rangle$; $2 - \langle vw^2 \rangle$; $3 - \langle v^2 u \rangle$; на фиг. 5 обозначения совпадают с обозначениями фиг. 3). Приведенные на фиг. 1—3 экспериментальные данные из [14] получены при числе Рейнольдса $Re = U_p H / 2\nu = 230\,000$ (U_p — средняя скорость, определенная по расходу), а из [22] — при $Re = U_m H / 2\nu = 56\,000$, на фиг. 4, 5 из [22] — при $Re = 36\,500$.

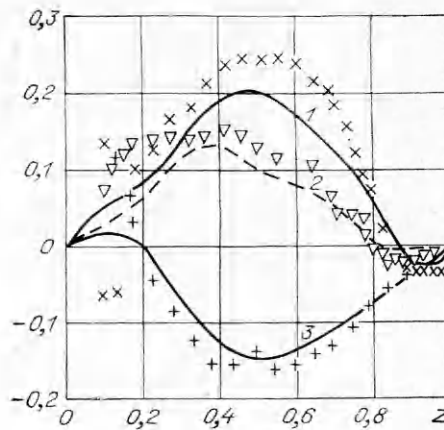
Анализ фиг. 1—5 показывает, что в целом совпадение расчетных и экспериментальных данных можно считать вполне удовлетворительным. Представленные данные по моментам, а также анализ рассчитанных распределений вероятностей показывают, что в рассмотренной задаче они достаточно близки к нормальным. Но сам факт отличия распределений от нормального закона является принципиальным, поскольку только благодаря этому отличию происходит перераспределение энергии турбулентности по y . Результаты сопоставления расчетных и экспериментальных



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

данных позволяют сделать вывод, что предложенное уравнение для распределения вероятностей качественно верно описывает это отличие. Результаты, полученные в работе, позволяют в принципе ставить и решать и более сложные, чем рассмотренные, задачи, например, такие как описание неравновесных турбулентных течений со значительными отклонениями распределения вероятностей от нормального распределения. Дополнительные трудности в первую очередь будут связаны с возможностями ЭВМ. Основные качественные особенности и математические свойства полученного уравнения для распределения вероятностей скорости проанализированы в данной работе. Этот анализ является необходимым предварительным шагом перед решением более сложных задач. Автор выражает В. М. Иевлеву свою искреннюю признательность за доброжелательную критику, ценные советы и поддержку и благодарит В. Р. Кузнецова за ряд критических замечаний.

Поступила 20 IV 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С. Уравнения турбулентного движения.— ПММ, 1967, т. 31, № 6.
2. Lundgren T. S. Distribution functions in the statistical theory of turbulence.— Phys. Fluids, 1967, vol. 10, N 5.
3. Кузнецов В. Р. О плотности вероятности разности скоростей в двух точках однородного изотропного потока.— ПММ, 1967, т. 31, № 6.
4. Улинич Ф. Р., Любимов Б. Я. К статической теории турбулентности несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса.— ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 3(9).
5. Lundgren T. S. Model equation for non-homogeneous turbulence.— Phys. Fluids, 1969, vol. 12, N 3.
6. Chung P. M. A simplified statistical model of turbulent chemically reacting shear flows.— AIAA J., 1969, vol. 7, N 10.
7. Онуфриев А. Т. О модельном уравнении для плотности вероятности в полуэмпирической теории турбулентного переноса.— В сб.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1977.
8. Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сред. М.: Наука, 1975.
9. Кузнецов В. Р., Расщупкин В. И. Распределение вероятностей и условное осреднение в турбулентных потоках.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 6.

10. Сабельников В. А. Уравнения для распределений вероятностей скорости и концентрации в турбулентной и нетурбулентной областях свободных течений.— Учен. зап. ЦАГИ, 1980, т. XI, № 6.
11. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: ИЛ, 1959.
12. Кузнецов В. Р. Распределение вероятностей разности скоростей в инерционном интервале спектра турбулентности.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 3.
13. Reynolds W. C. Computation of turbulent flows.— In: Annual Rev. Fluid Mech. Vol. 8. Palo Alto, 1976.
14. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М.: Мир, 1968.
15. Букреев В. И., Зыков В. В., Костомача В. А. Распределение вероятностей флуктуаций скорости в свободных и пристенных турбулентных течениях.— В сб.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1977.
16. Шахов Е. М. Метод исследования движений разреженного газа. М.: Наука, 1974.
17. Srinivasan R., Giddens D. P., Bangert L. H., Wu J. S. Turbulent plane Couette flow using probability distribution functions.— Phys. Fluids, 1977, vol. 20, N 4.
18. Кислов Н. В. Краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольной области.— ДАН СССР, 1980, т. 255, № 1.
19. Сабельников В. А. Распределение вероятностей концентрации в турбулентном диффузионном факеле.— В сб.: Горение газов и натуральных топлив. Материалы VI Всесоюз. симпозиума по горению и взрыву. Черноголовка, 1980.
20. Uberoi M. S. Equipartition of energy and local isotropy in turbulent flows.— J. Appl. Phys., 1957, vol. 28, N 10.
21. Hanjalić K., Launder B. E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flow.— J. Fluid Mech., 1972, vol. 52, pt 4.
22. Hanjalić K., Launder B. E. Fully developed asymmetric flow in a plane channel.— J. Fluid Mech., 1972, vol. 51, pt 2.

УДК 532.526

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ПОДОБИЯ К РАСЧЕТУ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В. В. Зябриков
(Ленинград)

1. Вывод универсального уравнения турбулентного пограничного слоя. В интегральных методах расчета турбулентного пограничного слоя используется произвольный выбор конкурирующего семейства профилей скорости или напряжения трения. Если в расчетах используется двухслойная полуэмпирическая схема, то при проведении вычислений в каждом отдельном случае необходимо осуществлять трудоемкий процесс сращивания внутреннего и внешнего решений. Метод обобщенного подобия позволяет выполнить сращивание один раз навсегда.

Уравнение Рейнольдса плоского турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости примем в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y},$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow \bar{U}(x) \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_0(y) \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

где ψ — функция тока осредненного движения; U — скорость на внешней границе пограничного слоя; τ — напряжение суммарного (молекулярной и молярной природы) трения; x, y — соответственно продольная и поперечная координаты; $u_0(y)$ — профиль продольной скорости в каком-то, принимаемом за начальное, сечении $x = x_0$; ρ — плотность.

Выберем $U(x)$ за масштаб продольных скоростей в различных сечениях пограничного слоя, а за масштаб поперечных координат — толщину