

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
И ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ
В ПОЛУЗАМКНУТОМ ОБЪЕМЕ ПОВЕРХНОСТИ
С УВЕЛИЧЕННОЙ МЕСТНОЙ СКОРОСТЬЮ
ГАЗООБРАЗОВАНИЯ**

В. М. Бобылев, С. В. Бриль, Л. К. Гусаченко,
Г. И. Долматов
(Томск, Москва)

Увеличение местной скорости газообразования применяется для увеличения общей газообразующей поверхности, которая в стационарном случае имеет форму, показанную на рис. 1. В [1] для такой системы рассмотрена возможность автоколебаний, связанных с искажением конической формы поверхности, приведены подтверждающие такую возможность результаты численного счета и аналитически получено условие устойчивости к малым возмущениям (дефектам) формы поверхности. Позднее В. М. Бобылев и С. В. Бриль подтвердили экспериментально существование колебаний давления с природой, описанной в [1].

1. В [1] использовалось равенство секундного массового прихода G_+ и расхода G_- газов

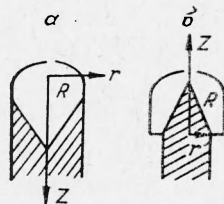


Рис. 1.

$$G_+ = G_-, \quad (1)$$

$$G_- \sim pR, \quad (2)$$

$$G_+ \sim \int_0^R \partial z / \partial t r dr. \quad (3)$$

Здесь R — радиус камеры, p — давление в ней, z , r — координаты поверхности газообразования (горения). Уравнение в системе координат, связанной с камерой, имеет вид

$$\partial z / \partial t = v \sqrt{1 + (\partial z / \partial r)^2}, \quad (4)$$

где v — нормальная скорость горения. Граничное условие к (4) задается на оси камеры, где местная скорость v_1 газообразования увеличена (за счет введения быстрогорящего тонкого стержня или иного устройства):

$$(r=0) \quad \delta z / \delta t = v_1(p). \quad (5)$$

После введения малых колебаний давления типа $\Delta p \sim \exp(\omega t)$ и линеаризации из (1) — (5) было получено уравнение частот

$$\beta = n^2 / [1 - (n+1) \exp(-n)]. \quad (6)$$

Здесь

$$n = \omega t_s, \quad t_s = [1 - (v/v_1)^2]^{-1/2} R/v,$$

$$\beta = 2(v_1 - v)/(1 - v), \quad v_1 = d \ln v_1 / d \ln p, \quad v = d \ln v / d \ln p. \quad (7)$$

В области устойчивости все найденные из (6) значения безразмерной

частоты n удовлетворяют условию $\text{Re } n < 0$. Это выполняется при

$$-3,603 < \beta < 2. \quad (8)$$

Ниже приводится ряд обобщений и видоизменений системы (1)–(5), позволяющих исследовать устойчивость более широкого класса устройств.

1. Снимем предположение (2) с линейной зависимости массового расхода G_- газа из камеры от давления p в ней. Нелинейность $G_-(p)$ может появиться, например, при истечении закрученного потока, при дозвуковом истечении и при неполном горении. Можно показать, что в этом случае после линеаризации (1)–(5) уравнения частот и условие устойчивости имеют прежний вид (6), (8), где под β в отличие от (7) следует понимать

$$\beta = 2(v_1 - v) / (v_- - v), \quad (v_- = d \ln G_- / d \ln p).$$

Область устойчивости (незаштрихованная) изображена на рис. 2.

2. Иногда необходимо (для сокращения времени установления при запуске и при изменении давления) вводить в заряд не один, а несколько тонких быстрогорящих стержней. В этом случае поверхность состоит из системы круговых конусов меньшего размера. Линии их пересечения не лежат в одной плоскости (полученной поперечным сечением конусов), но их проекция на эту плоскость разбивает ее на правильные шестиугольники. Радиус R вписанной окружности такого шестиугольника равен половине расстояния между соседними стержнями. Ввиду симметричности картины рассмотрим только один конус. Поскольку уравнение движущейся поверхности имеет тот же вид, что и в [1] и получается линеаризацией и решением уравнений (4), (5)

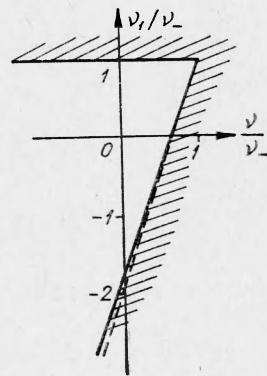


Рис. 2.

$$\Delta z = (v_1/\omega) (\Delta p/p) \left[v + (v_1 - v) \exp \left(-\frac{r}{R} n \right) \right]. \quad (9)$$

Отличие от [1] появляется в выражении для газоприхода. Вместо (3) имеем

$$G_+ \sim \iint \partial z / dtrdr d\varphi = 12 \int_0^{\pi/6} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \partial z / dtrdr. \quad (10)$$

В стационарном случае (10) дает $2\sqrt{3}v_1R^2$. Подставляя (9) в (10) и используя (1), (2), можно получить уравнение для частоты n

$$n^2/\beta = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \sqrt{3} \int_0^{\pi/6} (1 + n/\cos \varphi) \exp(-n/\cos \varphi) d\varphi,$$

из которого при $\text{Re } n < 0$ можно получить условие устойчивости

$$-3,658 < \beta < 2.$$

Сравнивая с (8), видим, что введение дополнительных (равномерно распределенных) быстрогорящих стержней практически не меняет условия устойчивости.

3. Рассмотрим случай, когда повышенная местная скорость горения v_1 создается прижатием к топливу торца тонкостенного металли-

ческого цилиндра радиуса R (цилиндр нагревается продуктами сгорания, и ускоренное горение в районе контакта происходит в режиме пиролиза [2]). Аналогичная картина (форма поверхности) получается и при горении пастообразного топлива, выдавливаемого со скоростью v_1 из канала радиуса R со смазанными стенками (см. [3], рис. 1, б). Предположение о смазке делается, чтобы можно было движение пасты считать квазитвердым.

В системе координат, связанной с цилиндром (каналом), уравнение поверхности вместо (4) имеет вид

$$\partial z / \partial t = v_1 - v [1 + (\partial z / \partial r)^2]^{1/2}. \quad (11)$$

Граничное условие ставится на периферии

$$r = R, \quad \partial z / \partial r = 0. \quad (12)$$

Уравнения (1), (2) остаются в силе, вместо (3) имеем:

$$G_+ \sim \int_0^R (v_1 - \partial z / \partial t) r dr. \quad (13)$$

Тогда уравнение для безразмерной частоты n примет вид:

$$\beta = n^2 [n - 1 + \exp(-n)],$$

а условие устойчивости $\text{Re } n < 0$ для него $\beta < 2$ или $v_1 < 1$, $v < 1$. В случае применения квадратного цилиндра или отверстия все уравнения и последние условия остаются прежними, только под R следует понимать половину стороны квадрата.

4. Если увеличить число быстрогорящих стержней (уменьшить R), то характерное время t_0 перестройки поверхности может оказаться сравнимым с характерным временем t_k камеры. В этом случае вместо (1) следует писать уравнение баланса массы

$$dM/dt = G_+ - G_-, \quad (14)$$

где M — масса газов в камере. Предполагаем

$$M \sim \rho. \quad (15)$$

Проводя линеаризацию системы (2) — (5), (14), (15), можно получить уравнение для частоты

$$\gamma_n = -1 + (\beta/n^2) [1 - (n+1) \exp(-n)].$$

Здесь $\gamma = (1/1-v) (t_k/t_s)$, $t_k = M/G$. Область неустойчивости $\text{Re } n > 0$ заштрихована на рис. 3 в координатах (β, γ) . Представляет интерес существование области устойчивости при $\gamma < 0$, ($v > 1$).

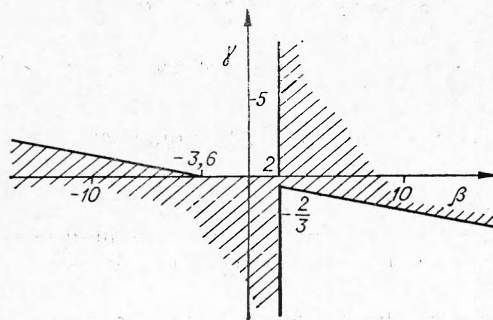


Рис. 3.

В области $t_s \sim t_k$ устойчивость можно объяснить тем, что при изменениях давления поверхность горения успевает существенно измениться за время релаксации камеры и препятствует изменению давления.

Аналогично при продавливании пастообразного топлива через узкие каналы процесс описывается уравнениями (2),

(11) — (15). Уравнение для частот малых возмущений имеет вид

$$\gamma_n = -1 + (\beta/n^2) [n-1 + \exp(-n)].$$

Область устойчивости изображена на рис. 4.

5. Для топливных композиций, описанных в [4], радиус R_1 центрального (быстрогорящего) стержня составляет заметную долю от общего радиуса R камеры и должен учитываться. Поверхность (торца) центрального стержня остается плоской, остальная подчиняется уравнению (4). Граничное условие ставится при $r=R_1$:

$$\partial z/\partial t = v_1(p).$$

Линеаризованное решение, в отличие от (9), имеет вид

$$\Delta z = (v_1/\omega) (\Delta p/p) \left[v + (v_1 - v) \exp\left(-n \frac{r-R_1}{R}\right) \right], \quad r > R_1. \quad (16)$$

Вместо (3) следует использовать

$$G_+ = G_1 + G_2 \sim 2 \int_{R_1}^R \partial z/\partial t r dr + v_1 R_1^2. \quad (17)$$

Из (1), (2), (16), (17) следует уравнение для частоты

$$n^2/\beta_1 = nb + 1 - (n+1) \exp[n(b-1)].$$

Здесь

$$b = R_1/R, \quad \beta_1 = 2(v_1 - v) / [1 - b^2 v_1 - (1 - b^2)v]. \quad (18)$$

Область устойчивости ($\text{Re } n < 0$) для различных значений $b = R_1/R$ изображена на рис. 5 и 6.

При некоторых условиях может стать необходимым учет разнородности газов от периферийного заряда и центрального стержня, а также учет возможной реакции между этими газами. Поскольку зона смешения не прилегает к поверхности какой-либо части заряда, и поверхности горения не обдуваются сколько-нибудь заметными потоками, естественно предположить, что возможное тепловыделение в зоне смешения не влияет на скорости v, v_1 горения, которые зависят только от давления. (Рассматривается заряд, составленный из горючей и окислительной частей, способных по отдельности к самостоятельному горению). Предполагаем также, что все процессы, связанные со смешением газов, успевают завершиться до их сгущения из камеры

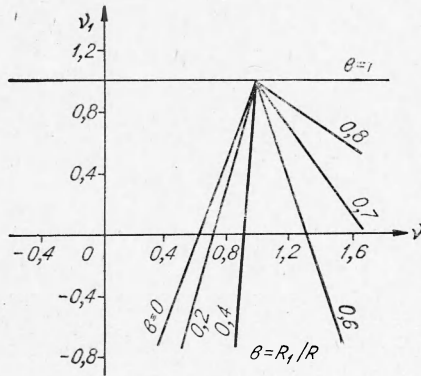


Рис. 5.

(в противном случае параметры процесса должны сложным образом зависеть от конструкции камеры и заряда). При сделанных предположениях массовый расход G_- из камеры является функцией от давления в камере и отношения массовых газоприходов G_1/G_2 от центральной и периферийной частей заряда. Эту функцию считаем найденной из опыта

$$p = p(G_1, G_2) \text{ или } G_- = G_-(p, G_1/G_2), \quad G_1 + G_2 = G_-, \quad (19)$$

$$\frac{\Delta G_1}{G_1} \left(\frac{G_1}{G_-} \right) + \frac{\Delta G_2}{G_2} \left(\frac{G_2}{G_-} \right) = v - \frac{\Delta p}{p} + \mu \left(\frac{\Delta G_1}{G_1} - \frac{\Delta G_2}{G_2} \right).$$

Здесь

$$v_- = \partial \ln G_- / \partial \ln p, \quad \mu = \partial \ln G_- / \partial \ln \left(\frac{G_1}{G_2} \right).$$

Полагая плотность топлив одинаковой, заменяем в (19)

$$\frac{G_1}{G_-} = b^2, \quad \frac{G_2}{G_-} = 1 - b^2. \quad (20)$$

Из (16), (17), (19), (20) следует уравнение для частоты, совпадающее с (18), если заменить в нем β_1 на β_2 , где

$$\frac{1}{\beta_2} = \frac{1 - b^2}{2} \left(1 + \frac{v_- - v_1}{(v_- - v)(1 + \mu - b^2)} \right).$$

Для определения области устойчивости можно использовать рис. 6.

6. Рассмотрен случай, когда v_1 выгорания тонкого центрального стержня зависит не только от давления, но и от скорости его изменения и от интеграла его отклонения от стационарного значения

$$v_1 = v_1 \left(p, dp/dt, \int_0^t \Delta p dt \right).$$

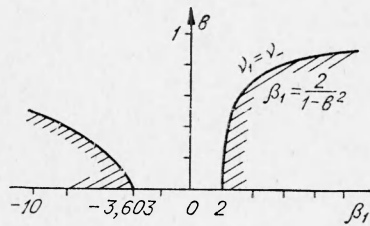


Рис. 6.

* Зависимость v_1 от dp/dt может оказаться существенной, например, в случае теплопроводного центрального стержня с большим временем перестройки теплового режима. Уравнение для частоты n

легко может быть получено обобщением случая $v_1 = v_1(p)$. В самом деле, частное уравнение (6) в обозначениях (7) можно получить без всяких предположений относительно v_1 . При этом входящий в $v_1 = d \ln v_1 / d \ln p$ полный дифференциал $d \ln v_1$ примет вид

$$d \ln v_1 = (v_1 + v_2 n + v_3 / n) \Delta p / p. \quad (21)$$

Здесь

$$v_1 = \partial \ln v_1 / \partial \ln p, \quad v_2 = \frac{p}{t_s} \frac{\partial \ln v_1}{\partial p}, \quad v_3 = p t_s \frac{\partial \ln v_1}{\partial (\int \Delta p dt)}. \quad (22)$$

Подставляя (21) в (6), (7), получим частное уравнение

$$n^2 = (\beta + n\delta + \sigma/n) [1 - (n+1) \exp(-n)]. \quad (23)$$

Здесь

$$\beta = 2(v_1 - v) / (1 - v), \quad \delta = 2v_2 / (1 - v), \quad \sigma = 2v_3 / (1 - v),$$

v_1 берется из (22). Полагая в (23) $\text{Re } n < 0$, можно найти (численно) область устойчивости. На рис. 7 эта область изображена для случая $\sigma = 0$ в координатах (β, δ) и для случая $\delta = 0$ в координатах (σ, β) .

II. Приведенные выше условия устойчивости могут оказаться недостаточным для того, чтобы отсутствовали значительные колебания давления в камере.

Переходные процессы изменения давления в рассматриваемой динамической системе при выполнении условия устойчивости могут иметь колебательный характер. Причем, как показывают численные расчеты и эксперимент, амплитуда колебаний давления может быть соизмерима с его установившимся значением, а время затухания колебаний — с полным временем газообразования.

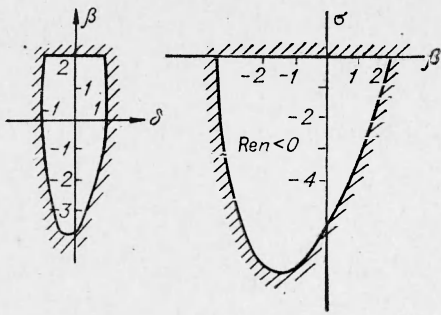


Рис. 7.

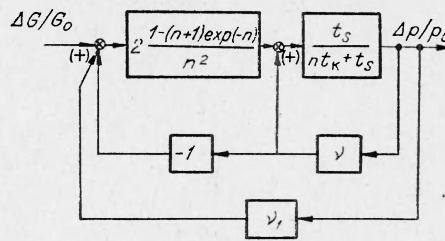


Рис. 8.

Необходимым и достаточным условием качества переходного процесса является совокупность устойчивости с малостью амплитуды колебаний

$$\left(\frac{\Delta p}{p_0 - p_H} \right)_{\max} < \varepsilon,$$

где ε — максимально допустимая амплитуда колебаний, отнесенная к разности установившегося и начального значений давления в камере. Вместо этого могут быть использованы более жесткие условия аперидичности или условие монотонности переходного процесса, вообще исключающее возможность колебаний относительно стационарного значения. Для получения упомянутых условий можно воспользоваться методами теории автоматического регулирования.

Полученное ранее [1] уравнение динамики прихода газов при наличии увеличенной местной скорости горения можно записать в виде

$$\Delta G/G = v \Delta p/p + (v_1 - v) W_s(n) \Delta p/p,$$

где

$$\begin{aligned} W_s(n) &= \frac{L \Delta S/S}{L \Delta v_1/v_1 - L \Delta v/v} = 2 \frac{1 - (n+1) \exp(-n)}{n^2} = \\ &= 2/n^2 - 2 \frac{(n+1) \exp(-n)}{n^2}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$L \Delta S/S = \int_0^{\infty} \exp(-n\tau) \Delta S/S(\tau) d\tau,$$

$$\tau = t/t_s.$$

Передаточная функция $W_s(n)$ процесса формирования поверхности горения при переменных местной или нормальной (собственной) скорости горения является отношением преобразованных по Лапласу изменений поверхности горения к соответствующему изменению скорости горения.

Физически первое слагаемое в выражении (24) характеризует возрастание поверхности, соответствующей каждому элементарному участку образующей коноида поверхности горения по мере увеличения радиуса с течением времени, а второе — изменение длины образующей. Динамические свойства процесса изменения давления в полузакнутом объеме при наличии увеличенной местной скорости горения в линейном приближении можно наглядно представить структурной схемой (рис. 8).

Исходя из приведенной структурной схемы, передаточная функция рассматриваемой динамической системы, характеризующая динамику изменения давления при некотором внешнем воздействии

$$\Delta G/G = \Delta v_1/v_1 - \Delta \sigma_k/\sigma_k + \dots,$$

вызванном каким-либо нарушением баланса прихода или расхода газов в камере (например, местной скорости горения $\Delta v_1/v_1$, площади критического сечения сопла $\Delta \sigma_k/\sigma_k$ и т. п.), после преобразований будет иметь вид

$$W_p(n) = \frac{L\Delta p/p}{L\Delta G/G} = \frac{2}{1-\nu} \frac{W_s}{2(1+\gamma n) + \beta W_s}. \quad (25)$$

Следует отметить, что это выражение для передаточной функции может быть получено также путем L -преобразований линеаризованной системы уравнений при нулевых начальных условиях. Если с целью упрощения конечных результатов исследования в выражении для передаточной функции (24) экспоненциальную функцию заменить разложением в ряд

$$\exp(-n) \approx \frac{\frac{n^2}{8} - \frac{n}{2} + 1}{\frac{n^2}{8} + \frac{n}{2} + 1},$$

указанная передаточная функция может быть представлена дробно-рациональной зависимостью

$$W_s(n) = \frac{1 - \frac{n}{4}}{\frac{n^2}{8} + \frac{n}{2} + 1}.$$

Тогда в свою очередь передаточная функция системы (25)

$$W_p(n) = \frac{\frac{1}{1-\nu} \left(1 - \frac{n}{4}\right)}{\frac{t_k n^3}{8(1-\nu_1)t_s} + \frac{(1-\nu)t_s + 4t_k}{8(1-\nu_1)t_s} n + \frac{(1-\nu)(1+\beta/4)t_s + 2t_k}{2(1-\nu_1)t_s} n + 1}, \quad (26)$$

откуда характеристическое уравнение динамики изменения давления в камере (с учетом времени релаксации камеры t_k) примет вид

$$\frac{t_k}{8(1-\nu_1)t_s} n^3 + \frac{(1-\nu)t_s + 4t_k}{8(1-\nu_1)t_s} n^2 + \frac{(1-\nu)(1+\beta/4)t_s + 2t_k}{2(1-\nu_1)t_s} n + 1 = 0. \quad (27)$$

Поскольку в данном случае динамика системы приближенно описывается линейным дифференциальным уравнением третьего порядка, условия устойчивости определяются известными критериями Рауса-Гурвица.

Указанные условия могут быть наглядно представлены в плоскости двух параметров

$$X = \frac{(1-\nu)t_s^2 + 4t_k}{2(1-\nu_1)^3 \sqrt{t_k^2 t_s / (1-\nu)^2}}, \quad Y = \frac{(1-\nu)(1+\beta/4)t_s + 2t_k}{(1-\nu_1)^3 \sqrt{t_k^2 t_s / (1-\nu)^2}}$$

на диаграмме Вышнеградского, которая позволяет также судить о качестве переходного процесса (см. [5]).

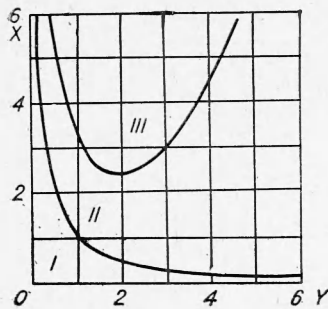


Рис. 9.

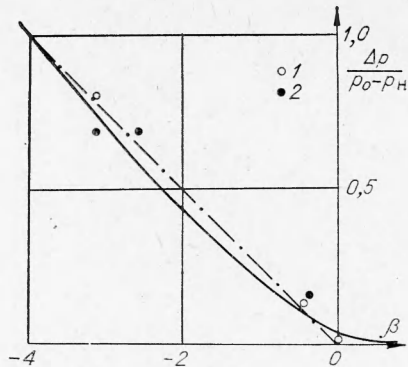


Рис. 10.

На диаграмме (рис. 9) граница устойчивости, отвечающая уравнению $XU=1$, отделяет устойчивые области II и III ($XU>1$) от неустойчивой I ($XU<1$). Область монотонных переходных процессов III на диаграмме отделена от области колебательных процессов II кривыми, отвечающими уравнениям $2X^3-9XU+27=0$ (при $X<3$) и $X^2U^2-4(X^3+U^3)+18XU-27=0$ (при $X>3$). При $t_k \ll t_s$ уравнение (27) становится уравнением второго порядка:

$$(1-\nu)n^2/8(1-\nu_1) + (1-\nu)(1+\beta/4)n/2(1-\nu_1) + 1 = 0.$$

Условиями устойчивости в этом случае являются

$$\nu < 1, \quad \nu_1 < 1, \quad \beta > -4.$$

Полученное условие (штриховая линия на рис. 2) количественно мало отличается от ранее найденного условия (8), что позволяет надеяться на небольшое отличие приближенных условий, определяющих характер переходного процесса, от точных.

Переходный процесс по давлению в камере будет в рассматриваемом случае описываться зависимостью

$$p = p_n + (p_0 - p_n) \left[1 - \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \sqrt{1-\xi^2} t/T + \cos \sqrt{1-\xi^2} t/T \right) \right] \exp(-\xi t/T), \quad (28)$$

где

$$T = \frac{t_s}{2\sqrt{2(1-\nu_1)/(1-\nu)}}, \quad \xi = \sqrt{2(1+\beta/4)/2\sqrt{(1-\nu_1)/(1-\nu)}}.$$

Коэффициент демпфирования ξ однозначно определяет характер переходного процесса и амплитуду колебаний. При $\xi < 1$ имеют место колебательные переходные процессы, причем амплитуда колебаний и время их затухания возрастает с уменьшением ξ вплоть до границы устойчивости ($\xi=0$), где колебания становятся незатухающими. При $\xi > 1$, что соответствует отсутствию колебаний, переходный процесс становится аperiodическим.

На рис. 10 дана зависимость максимальной амплитуды колебаний от β (сплошная линия). Здесь же приведены точки, полученные упомянутым выше численным решением нелинейной системы уравнений (1) и экспериментальные точки (2). Из графика видно, что, хотя приближенное условие аperiodичности переходного процесса $\beta > 0,66$ яв-

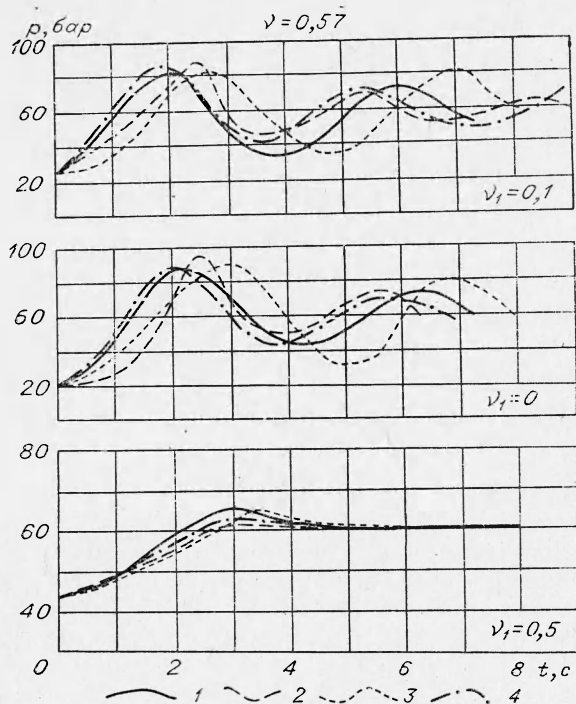


Рис. 11.

ляется более жестким, чем точное $\beta > 0$. количественные результаты, относящиеся к амплитуде колебаний, мало отличаются от приближенных и приемлемо согласуются с экспериментом. Количественные расхождения для критерия малых амплитуд колебаний могут быть сведены к минимуму, если рассматриваемую зависимость аппроксимировать выражениями

$$\frac{\Delta p}{p_0 - p_H} = -\beta/4 \quad (\text{при } \nu_1 < \nu)$$

$$\text{и } \frac{\Delta p}{p_0 - p_H} = 0 \quad (\text{при } \nu_1 > \nu).$$

При этом условии малых амплитуд колебаний примет вид

$$\beta > -4\epsilon.$$

Зависимость, отвечающая этому критерию, показана штриховой линией на рис. 10.

На рис. 11 приведены графики переходных процессов $p(t)$, полученных экспериментально (1), численным расчетом, исходя из системы нелинейных уравнений (2), методом трапецеидальных характеристик [6], исходя из точной передаточной функции системы (26) (3), а также (4) на основании приближенной передаточной функции (26) по формуле (28). Из графиков рис. 11 видно, что все расчетные результаты хорошо согласуются с экспериментальными.

Таким образом, необходимыми и достаточными условиями отсутствия значительных колебаний в переходных процессах изменения давления при горении твердого топлива с увеличенной местной скоростью горения в полузакнутом объеме являются условия устойчивости и условие малых амплитуд колебаний.

Поступила в редакцию
19/XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. К. Гусаченко. Горение и взрыв. М., «Наука», 1972.
2. РЖ «Авиационные и ракетные двигатели», 1972, 9, 131 п.
3. РЖ «Авиационные и ракетные двигатели», 1970, 2, 123 п.
4. Ю. И. Медведев, Н. П. Медведева, Л. Н. Ревягин. ФГВ. 1971, 7, 2.
5. Теория автоматического регулирования. Под ред. В. В. Солодовникова, Кн. 1. М., «Машиностроение», 1967.
6. В. В. Солодовников, Ю. И. Топчешев, Г. В. Крутикова. Частный метод построения переходных процессов с применением таблиц и номограмм. М., «Гостехиздат», 1955.