

6. В. С. Илюхин, П. Ф. Похил и др. Докл. АН СССР, 1960, 131, 4, 793.
7. В. Н. Зубарев, Т. С. Телегин. Докл. АН СССР, 1962, 147, 5, 1122.
8. W. Friederich. Zs. ges. Schiess-Spr., 1933, 28, 2, 51, 80, 113.
9. S. J. Jacobs, T. P. Liddiard a. o. IX-th Symp. Comb., Itaca, N.-Y., 1962.
10. А. Н. Дремин, С. А. Колдунов, К. К. Шведов. ПМТФ, 1963, 6, 131.
11. G. E. Sealy, L. B. See, Jr. J. Appl. Phys., 1961, 32, 6.
12. N. L. Coleburn, T. P. Liddiard. J. Chem. Phys., 1966, 44, 5.

## О ДВИЖЕНИИ ГАЗА ЗА ПЛОСКОЙ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ, ИДУЩЕЙ ПО ЦИЛИНДРУ ВВ

В. А. Дворников, Л. В. Комаровский

Пусть взрывчатое вещество цилиндрической формы с постоянной плотностью  $\rho_0$  помещено в вакуум. В момент  $t=0$  поверхность правого торца инициирует. При этом будем считать, что продукты взрыва описываются уравнением состояния  $p = \text{const} \cdot \rho^\gamma$ , а детонация протекает в режиме Чепмена — Жуге. От плоскости инициирования будет распространяться с постоянной скоростью  $D$  нормальная детонационная волна. Образующиеся продукты детонации под действием контакта с вакуумом будут формировать осесимметричное нестационарное газовое облако, которое в начальный момент можно разбить на две качественно различные области — одномерного потока и боковой волны разрежения (рис. 1: 1 —  $p=0$ , 2 —  $72 \cdot 10^{-8}$ , 3 —  $58 \cdot 10^{-6}$ , 4 —  $19 \cdot 10^{-4}$ , 5 — 0,017, 6 — 0,047, 7 — 0,135, 8 — 0,18, 9 — 0,277).

Как следует из [1], в одномерной области течение описывается центрированной волной Римана, а для нахождения течения газа в бо-

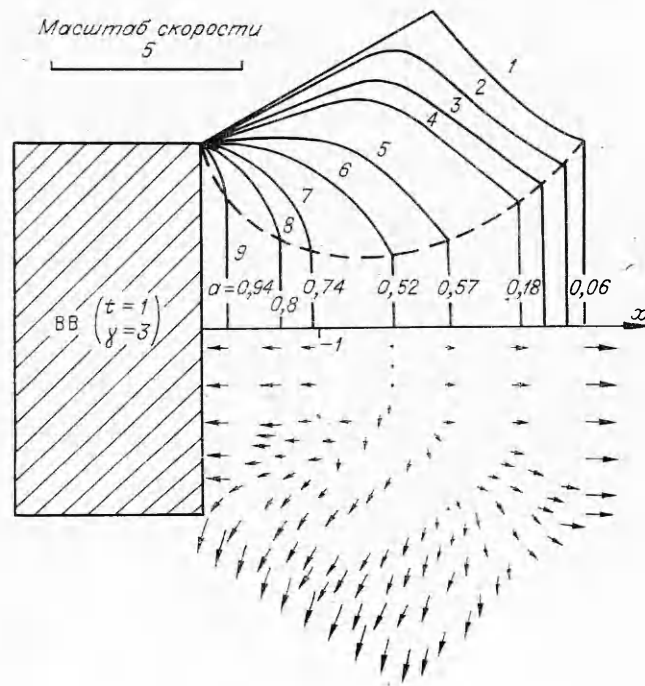


Рис. 1.

ковой волне разрежения необходимо решать систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + 2a/(\gamma-1) \cdot \frac{\partial a}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + 2a/(\gamma-1) \cdot \frac{\partial a}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial y} + (\gamma-1)/2 \cdot a (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + v/y) &= 0, \\ a^2 &= \gamma p / \rho. \end{aligned} \quad (1)$$

Система (1) записана в безразмерных переменных. За основные единицы масштаба выбраны:  $D$  — скорость детонационной волны,  $d$  — радиус инициированного цилиндра,  $\rho_*$  — плотность в критической точке. При этом система координат жестко связывается с идущей по цилиндру детонационной волной. В этой системе координат центрированная волна Римана будет описываться следующими соотношениями:

$$x/t = u - a, \quad u = 2/(\gamma-1) [(\gamma+1)/2 - a]. \quad (2)$$

Характеристическая поверхность  $f$ , отделяющая волну Римана от бокового течения разрежения, находится из интегрирования общего дифференциального уравнения для характеристик

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \pm \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}$$

с граничным условием (2) и условием, что эта поверхность сходится с торца цилиндра

$$\begin{aligned} f &= [(y-1)/t]^2 - (\gamma+1)/(3-\gamma) \{ [1-x/t \cdot (\gamma-1)/(\gamma+1)]^2 - \\ &- [1-x/t \cdot (\gamma-1)/(\gamma+1)]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) нетрудно найти время и место касания этой поверхностью оси симметрии.

На рис. 2 построены графики зависимости координаты и времени касания  $t^*$  этой поверхностью оси симметрии в зависимости от  $\gamma$  ( $x_b$ ,  $x_g$  — соответственно положение фронта свободного разлета в одномерной области и детонационной волны при  $t=t^*$ ). Из физической картины течения ясно, что кромка цилиндра, где плотность газа меняется в зависимости от плотности в примыкающем одномерном потоке до нуля, должна представлять собой особенность в решении, описывающем это течение. В работе [2] были получены аналитические решения, описывающие гладкие осесимметричные течения газа и имеющие особенность на круговом контуре. Стыкуя эти решения с центрированной волной Римана вдоль характеристики (3) и ограничиваясь первыми тремя членами, получим следующие выражения радикальной  $N$  и тангенциальной  $T$  компонент скорости газа и скорости звука

$$\begin{aligned} N(\theta, t, r) &= h \sin \alpha + N_1(t, \theta) r + N_2(t, \theta) r^2, \\ T(\theta, t, r) &= \cos \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial \theta} r + \frac{1}{3} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} r^2, \end{aligned} \quad (4)$$

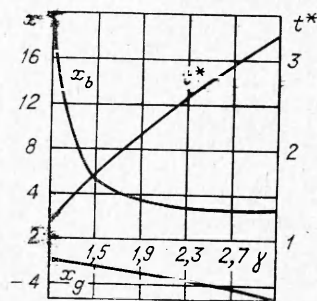


Рис. 2.

$$\alpha(\theta, t, r) = \left\{ \cos^2 \alpha + (1 - \gamma) \left[ \left( h \sin \alpha \cdot N_1(t, \theta) + \frac{1}{2} \cos \alpha \frac{\partial N_1}{\partial \theta} \right) r + \right. \right. \\ \left. \left. + (h \sin \alpha \cdot N_2(t, \theta) + \frac{1}{2} N_1^2(t, \theta) + \frac{1}{3} \cos \alpha \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial N_1}{\partial \theta} \right)^2 \right) r^2 \right] \right\}^{1/2},$$

где

$$\alpha = \theta/h + \pi/2h, \quad h = \sqrt{(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}, \\ N_1(t, \theta) = \sin^{1/2} \alpha \cdot \cos \frac{h^2 + 2}{2} \alpha \int_{-\pi/2}^{\theta} \frac{ah (h \sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta)}{2 \sin^{3/2} \alpha \cos \frac{h^2 + 2}{2} \alpha} d\theta, \\ N_2(t, \theta) = h \sin \alpha \cdot \cos^{h^2 + 1} \alpha \left\{ \int_{-\pi/2}^{\theta} \frac{\left( \frac{2\gamma - 1}{\gamma - 1} N_1 + h \sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta + \right)}{2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^{h^2 + 2} \alpha} d\theta \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N_1}{\partial \theta^2} \right) \frac{(1 - \gamma)}{2} \left( 2h \sin \alpha N_1 + \cos \alpha \frac{\partial N_1}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{4} \frac{\partial N_1}{\partial \theta} \left( 2h \sin \alpha N_1 + \right. \\ \left. + \cos \alpha \frac{\partial N_1}{\partial \theta} \right)' + \left( N_1 \sin \theta + \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial \theta} \cos \theta \right) \cos^2 \alpha - (h \sin \alpha \cdot \sin \theta + \\ \left. + \cos \alpha \cdot \cos \theta) \cos^2 \alpha - \left[ \frac{\sin \alpha \cdot 2\gamma}{h(\gamma - 1)} \left( N_1^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial \theta} \right)^2 \right) + \frac{\cos \alpha}{2} \left( N_1^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial N_1}{\partial \theta} \right)^2 \right)' \right] \right\} d\theta + \frac{5}{3(\gamma + 1)t^2} \Bigg\},$$

а переменные  $r, \theta$  имеют следующую связь с декартовыми координатами:

$$x = r \cos \theta, \quad y = (r \sin \theta + 1) \cos \varphi, \quad z = (r \sin \theta + 1) \sin \varphi.$$

Из (4) на самой кромке цилиндра имеем

$$N(\theta, t, 0) = h \sin \alpha, \quad T(\theta, t, 0) = \cos \alpha, \quad \alpha(\theta, t, 0) = \cos \alpha. \quad (5)$$

Таким образом, на кромке цилиндра устанавливается течение Прандтля — Майера с критической скоростью набегающего потока. Для левой крайней характеристической поверхности, где скорость звука равна нулю, имеем из (5) следующий предельный угол разворота:

$$\theta^* = \pi/2(h - 1). \quad (6)$$

Вдоль характеристической поверхности выполняется соотношение

$$\sqrt{(du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2} + 2/(\gamma - 1) \cdot da = 0. \quad (7)$$

На предельной характеристической поверхности с углом разворота (6) имеем  $da = 0$ , тогда из (7) на ней получим постоянство проекций скорости газа. Значение проекций скорости найдем из (5), положив  $\theta = \theta^*$ . Таким образом, приходим к следующему результату: предельная характеристическая поверхность является усеченным конусом с углом раствора  $2\theta^*$ , а газ на этой поверхности имеет только радиальную составляющую компоненту скорости  $N = h$ . Для нахождения течения газа во всей области бокового разлета решений (4) будет недостаточно, так как их применимость падает с ростом  $r$ . С другой стороны, при

использовании во всей области истечения одних только разностных методов возникнут значительные трудности в расчете течения непосредственно около кромки цилиндра.

Выделим некоторую окрестность точки  $r=0$  поверхностью  $r=\psi(t, \theta)$ , параметры потока на которой будем брать из (4). Эта поверхность и характеристика (3), сходящая с кромки цилиндра, будут ограничивать рассматриваемую область. Для определения течения газа в выделенной области бокового разлета необходимо решить смешанную задачу с исходными данными на характеристике (3) и поверхности  $r=\psi(t, \theta)$ .

Перейдем в (1) к новым независимым переменным

$$x=x, \quad t=t, \quad \xi=[u-1+tf_1(x/t)]/[kx+tf_1(x/t)], \quad (8)$$

где  $f_1(x/t) = \left(\frac{\gamma+1}{3-\gamma}\right)^{1/2} \left[ \left(1 - \frac{x}{h^2 t}\right)^2 - \left(1 - \frac{x}{h^2 t}\right)^{h^2} \right]^{1/2};$

$k$  — произвольный параметр.

В итоге получим

$$\begin{aligned} du/\partial t + u du/\partial x + R du/\partial \xi + 2a/(\gamma-1) \cdot \partial a/\partial x + 2ap_1/(\gamma-1) \cdot da/\partial \xi &= 0, \\ \partial v/\partial t + u \partial v/\partial x + R \partial v/\partial \xi + 2ap_1/(\gamma-1) Q \cdot \partial a/\partial \xi &= 0, \\ 2/(\gamma-1) [\partial a/\partial t + u \partial a/\partial x + R \partial a/\partial \xi] + \\ + a [\partial u/\partial x + p_1 \partial u/\partial \xi + p_1/Q \cdot \partial v/\partial \xi] + avF &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} R &= \frac{(f_1 - f'_{1\eta} \cdot \eta)(1 - \xi) + u [f'_{1\eta}(1 - \xi) - k\xi] + v}{kx + tf_1}; \\ p_1 &= \frac{f'_{1\eta}(1 - \xi) - k\xi}{kx + tf_1}; \quad Q = f'_{1\eta}(1 - \xi) - k\xi; \end{aligned}$$

$$F = 1/[\xi(kx + tf_1) - tf_1 + 1]; \quad \eta = x/t.$$

Преобразование (8) возможно только при  $\gamma \geq 5/3$ . Угол разворота предельной характеристики определяется выражением (6); следовательно, для  $\gamma \geq 5/3$  отобразить область истечения в пространство  $\xi, t, x$  не возможно. Для этого и вводится параметр  $k$ , смысл которого в формулах (8) — тангенс угла разворота поверхности усеченного конуса, ограничивающим отображаемую область. Для части области истечения, лежащей между поверхностями двух усеченных конусов с углами разворота  $\theta^*$  и  $\arctg k$  и не попадающей под отображение (8) при  $0 \leq \xi \leq 1$ , вводятся новые переменные по формулам

$$t=t, \quad x=y-1, \quad \xi = (kx - \bar{y})/\bar{y}(B-1), \quad (10)$$

где  $\bar{y} = y - 1$ ;  $B = k/\tg \theta^*$ ; а искомые функции переобозначаются

$$\bar{u} = v, \quad \bar{v} = u, \quad \bar{x} = y, \quad \bar{y} = x.$$

Тогда систему (1) в этих переменных можно будет записать в виде (9).

Поверхность  $r=\psi(\theta, t)$  выберем так, чтобы она представляла собой плоскость  $x=k_1 \cdot t$ . В итоге можно сказать, что смешанная задача с криволинейными поверхностными границами при любом  $\gamma$  с помощью преобразования координат (8), (10) сводится к смешанной задаче с плоскими границами. При построении разностной схемы численного расчета использовался сеточно-характеристический метод [3, 4].

В качестве линейных характеристических элементов, выходящих из узловой точки, были рассмотрены прямые, образованные пересечением

характеристических плоских элементов, параллельных оси  $o\xi$ , с плоским характеристическим элементом, параллельным оси  $ox$  [3].

При построении численного алгоритма использовались характеристические прямые

$$\begin{aligned} dx/dt &= u \pm a, \quad d\xi/dt = R, \\ dx/dt &= u, \quad d\xi/dt = R, \end{aligned} \quad (11)$$

вдоль которых выполняются условия совместности

$$\begin{aligned} d/dt [u \pm 2/(\gamma-1) \cdot a] &= - [\pm ap_1 du/d\xi \pm ap_1/Q \cdot dv/d\xi + \\ &+ 2a/(\gamma-1) \cdot p_1 \cdot da/d\xi + aFv], \quad dv/dt = -ap_1/Q \cdot da/d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Заменой в (11), (12) полных производных  $d/dt$ ,  $d/d\xi$  конечно-разностными соотношениями была получена алгебраическая система уравнений, решение которой проводилось методом последовательных приближений. Параметры в рассчитываемой узловой точке считались найденными, если в двух последовательных приближениях абсолютная разница между вычисленными значениями искомых функций была меньше  $10^{-5}$ . Счет велся по слоям  $t = \Delta t n$ . На слое  $t = \Delta t$  была первоначально введена сетка с шагами по осям, соответственно равным  $\Delta\xi$ ,  $\Delta x$ . При переходе на более высокий уровень по  $t$  шаг  $\Delta x$  увеличивается с таким расчетом, чтобы количество разбиений вдоль оси  $ox$  оставалось постоянным. Для определения свободной границы разлета на слое  $t = \text{const}$  использовались условия:

$$a = 0, \quad da \equiv da/d\xi \cdot d\xi + \partial a/\partial x = 0.$$

Полученная разностная схема при  $F=0$  в (9) будет рассчитывать плоскопараллельное течение газа. Это позволило апробировать искомый численный алгоритм на задаче [5]. В результате были выбраны именно характеристические прямые (11) и более оптимально подобранные соотношения между шагами разбиения  $\Delta\xi$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ .

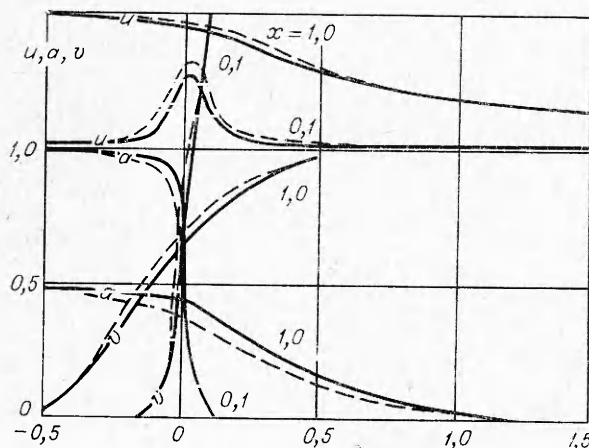


Рис. 3.

В качестве примера на рис. 1 приводится разлет продуктов детонации при  $\gamma=3$ . Поле скоростей и эпюры давления построены на момент времени  $t=1$ . На рис. 3 показаны имеющиеся расхождения величин  $u$ ,  $v$ ,  $a$  в момент  $t=1$  при осесимметричном и плоскопараллельном разлете продуктов детонации ( $\gamma=3$ ,  $t=1$ ; сплошные линии — плоскопараллельный поток).

Из сравнения областей разлета следует, что эффект осесимметричности не отражается на форме

границы свободного разлета, на распределении параметров газа на кромке цилиндра и на форме одномерной области и в основном имеет место только в центральной части области боковой волны разрежения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. К. П. Станюкович. Неустановившееся движение сплошной среды. М., «Наука», 1971.
2. В. А. Дворников. Неустановившееся двумерное течение газа в ТГУ, окрестности излома линии тока. Тр. НИИ ПММ, т. 4, Томск, Изд-во ТГУ, 1974.
3. Р. Зауэр. Нестационарные задачи газодинамики. М., «Мир», 1969.
4. П. И. Чушкин. Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений газа. М., изд-ние ВЦ АН СССР, 1968.
5. В. А. Сучков. ПММ, 1971, 35, 6.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕСЖАТОЙ ДЕТОНАЦИИ В ГАЗЕ

*В. И. Манжалей, В. А. Субботин*

В нормальных условиях детонационная волна представляет собой трехмерный газодинамический процесс, в котором газ сжигается в поперечных волнах, переднем фронте, при столкновении поперечных волн и при горении с поверхности непрореагировавших островков газа, прошедших зону интенсивной химической реакции [1, 2]. Для определения границ области устойчивости необходимо ставить эксперименты при экстремальных условиях: высокой температуре [3—5], повышенном начальном давлении [6], в пересжатых детонационных волнах [7—10].

При сильном пересжатии детонационной волны тепловыделение в зоне реакции становится отрицательным [11, 12], и, следовательно, плоский детонационный фронт должен быть устойчив к поперечным возмущениям. В работе [13] показано, что при заданном тепловыделении устойчивость слабо зависит от пересжатия и почти полностью определяется критериями  $Q/RT_-$  и  $E/RT_-$ , где  $E$  — эффективная энергия активации в индукционном периоде,  $T_-$  — температура перед ударным фронтом. Отсюда возникает возможность проверки теории устойчивости, так как, пересжимая детонационные волны, можно получать какие угодно значения  $Q/RT_-$ , в том числе и отрицательные.

Кратко опишем имеющиеся экспериментальные данные. В опытах [8] следовым методом была обнаружена многофронтная структура при пересжатии по скорости в 1,75 раза в смеси  $2C_2H_2 + 3O_2 + 15Ar$ , а расчет для подобных смесей [12] показывает, что уже при пересжатии в 1,45 раза тепловой эффект становится отрицательным. По-видимому, результат [8] неточен, так как неустойчивость получена при слишком большой отрицательной величине теплового эффекта. В [9] интерферометрическим методом показана неоднородность зоны реакции пересжатой детонации, которая трактуется как «турбулентность». Однако скорость самоподдерживающейся детонации не приведена, поэтому нельзя судить о величине пересжатия, при котором еще наблюдается неоднородность. В работе [10] была получена плоская детонационная волна и приведены параметры, характеризующие переход к одномерной зоне реакции. Ширина зоны в [10] была примерно равна поперечному размеру трубы, поэтому полученные результаты, возможно, частично соответствуют теоретическому выводу [14] об устойчивости детонации в узкой трубе и не могут быть перенесены на случай безграничной детонации.

Таким образом, ни одна из известных в настоящее время экспериментальных работ не дает ответа на вопрос, при каких величинах критериев устойчивости фронт безграничной детонации (в том смысле, что толщина зоны реакции много меньше поперечных размеров детонационной трубы) становится гладким.