потока и давления; K_w связана с s как $K_w = (3/2)^{2/3}(\gamma+1)^{2/3}(s^{3/2}-1)^{-1}$. Эта зависимость показана на рис. 3.

3. Такая многозначность полученных зависимостей в трансзвуковом диапазоне скоростей принципиально отличается от хорошо известных вполне однозначных соотношений для сверхзвукового режима течения, когда возмущения малы по сравнению с величиной $M_1^2 - 1$, т. е. $|M_2 - M_1| \ll M_1 - 1$.

Для слабых скачков уплотнения это условие равносильно предположению, что разница между углом наклона скачка и характеристики много меньше, чем угол отклонения скачка уплотнения от вертикали β_1 (см. рис. 1, *а*). Это условие дает дополнительную связь между двумя параметрами (M_1 и M_2), приводит к замыканию системы (1.1)—(1.3) и обеспечивает однозначную зависимость коэффициентов от M_1 для всех углов отклонения потока, если они невелики. Поэтому зависимость оптимального коэффициента проницаемости стенки от М в сверхзвуковом потоке получается универсальной [1].

Для сверхзвукового течения, но в трансзвуковом режиме уже нет единой зависимости для оптимального коэффициента проницаемости, он в каждом случае течения есть переменная по длине стенки трубы величина и различная для каждого эксперимента. Для иллюстрации этого приведем пример расчета обтекания тонкого клина под нулевым углом атаки потоком газа, скорость которого немного больше, чем скорость звука. Угол полураствора клина $\theta = 1°22'$.

На рис. 4 показано, как меняется величина R_{opt}, отнесенная к $\sqrt{M_1^2 - 1}$, с изменением M_1 в области над клином за скачком уплотнения. Расчеты выполнены по точным газодинамическим соотношениям и таблицам [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гродзовский Г. Л., Никольский А. А., Свищев Г. П., Таганов Г. И.** Сверхзвуковые течения газа в перфорированных границах.— М.: Машиностроение, 1967.
2. **Овсянников Л. В.** Лекции по газовой динамике.— М.: Наука, 1981.
3. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1973.
4. **Ферри А.** Аэродинамика сверхзвуковых течений.— М.: ГИТТЛ, 1953.

г. Жуковский *Поступила 12/X 1989 г., в окончательном варианте — 27/IX 1990 г.*

УДК 533.69

Н. Ф. Воробьев

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О КОНЦЕВОМ ЭФФЕКТЕ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Задача обтекания сверхзвуковым потоком тонкого крыла конечного размаха, рассматриваемая в линейной постановке, сводится к решению волнового уравнения для потенциала скорости. Условия непротекания с поверхности крыла при этом сносятся на базовую плоскость, а в остальной части этой плоскости (вне проекции крыла) на газодинамические параметры потока накладываются некоторые условия. Решение задачи, когда потенциал скорости определяется через нормальную производную в базовой плоскости Φ'_η, а вне проекции крыла ставится условие обращения потенциала в нуль, дано в [1]. Газодинамические параметры потока (давление, скос потока вне крыла), получаемые из этого решения, в окрестности дозвуковой передней кромки принимают физически не оправданные бесконечные значения. В [2] выражения для потенциала скорости и его производных представлены через первые и вторые производные потенциала на базовой плоскости, что дает возможность ставить дополнительные граничные условия и получать решения задачи обтекания, в которых газодинамические параметры потока находятся в классе ограниченных функций.

В данной работе приводятся формулы для вычисления газодинамических параметров потока в случае, когда потенциал скорости определяется [2] через первую производную Φ'_η и вторую $\Phi''_{\eta\xi}$ (кривизну поверхности в направлении скорости набегающего потока) в базовой плоскости, а на части базовой плоскости вне проекции крыла ставится условие непрерывности производной Φ'_ξ (давления).

1. Потенциал скорости в точке $M(x, y, z)$, лежащей в возмущенной области над крылом, находится через значение нормальной производной Φ'_η в базовой плоскости $\eta = 0$ из формулы [1]

$$\Phi = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{s+\sigma} \Phi'_\eta(\xi, \zeta)\,\varphi\, d\xi\, d\zeta, \tag{1.1}$$

где $\varphi = r^{-1}$; $r = \sqrt{(x-\xi)^2 - (z-\zeta)^2 - y^2}$; $(s+\sigma)$ — область зависимости точки M на плоскости $\eta = 0$ (рис. 1). Часть области зависимости $s(COO_1D_1M_0C)$ совпадает с проекцией крыла S на базовую плоскость. Часть $\sigma(O_1DD_1O_1)$ принадлежит возмущенной области Σ плоскости $\eta = 0$, лежащей вне проекции крыла в зоне влияния боковой кромки. В области S значение Φ'_η определено геометрией крыла: $\Phi'_\eta(\xi, \zeta) \sim \alpha(\xi, \zeta)$ ($\alpha(\xi, \zeta)$ — угол наклона поверхности крыла к базовой плоскости в направлении оси x). В области Σ (на щели) производная Φ'_η заранее неизвестна и подлежит определению.

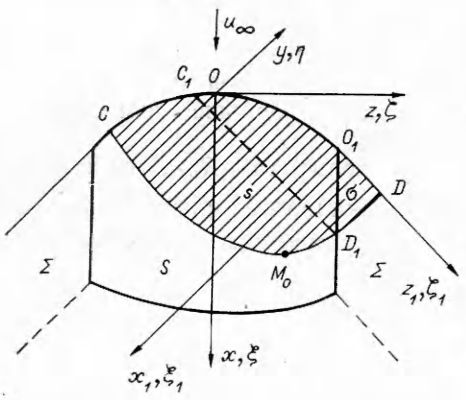

Рис. 1

После интегрирования по частям по переменной ξ с учетом соотношений

$$\int \varphi\, d\xi = \ln\{[(x-\zeta) - r]/\sqrt{(z-\zeta)^2 + y^2}\},$$

$$\left(\int \varphi\, d\xi\right)_{\xi=\rho(\zeta)} = 0$$

($\xi = \rho(\zeta) = x - \sqrt{(z-\zeta)^2 + y^2}$ — линия пересечения характеристического конуса с вершиной в точке M с плоскостью $\eta = 0$) формулу (1.1) для потенциала можно записать как [2]

$$\Phi = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \left(\Phi'_\eta \int \varphi d\xi\right)_{\xi=\psi^-(\zeta)} d\zeta + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{s+\sigma} \Phi''_{\eta\xi}\int \varphi d\xi ds \tag{1.2}$$

($\xi = \psi^-(\zeta)$ — уравнение границы возмущенной области $L(COO_1D)$). При выводе формулы (1.2) использовалось условие непрерывности производной Φ'_η на боковой кромке (границе областей S и Σ) — условие схода.

Согласно (1.2), с учетом соотношения $\partial\varphi/\partial x = -\partial\varphi/\partial\xi$ производные потенциала Φ представляются в виде

$$\Phi'_x = -\frac{1}{\pi}\int\limits_L (\Phi'_\eta\varphi)_{\xi=\psi^-(\zeta)} d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{s+\sigma} \Phi''_{\eta\xi}\varphi ds; \tag{1.3}$$

$$\Phi'_z = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \left(\Phi'_\eta \int \frac{\partial\varphi}{\partial z} d\xi\right)_{\xi=\psi^-(\zeta)} d\zeta + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{s+\sigma} \Phi''_{\eta\xi}\int \frac{\partial\varphi}{\partial z} d\xi\, ds, \tag{1.4}$$

где $\int \frac{\partial\varphi}{\partial z} d\xi = \frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{r[(z-\zeta)^2 + y^2]}$. При дифференцировании выражения (1.2) члены от дифференцирования по переменным пределам, зависящим от переменных x и z, обращаются в нуль.

Для точек $M(x, y, z)$ в зоне отсутствия концевого эффекта (область $\sigma = 0$) в (1.3), (1.4) значения Φ'_η и $\Phi''_{\eta\xi}$ задаются геометрией крыла и газодинамические параметры потока вычисляются непосредственно по этим формулам.

В случае влияния концов на участке линии L, совпадающем с проекцией передней кромки крыла COO_1, производная определена геометрией крыла $\left(\Phi'_\eta \sim \alpha\left[\psi^-(\zeta),\ \zeta\right]\right)$, на участке O_1D (следе головной характеристической поверхности) $\Phi'_\eta|_{O_1D} = 0$, в части области зависимости s производная $\Phi''_{\eta\xi}$ определена геометрией крыла, а на σ значение $\Phi''_{\eta\xi}$ заранее неизвестно и подлежит определению.

В [1] задача обтекания крыла с учетом концевого эффекта (нахождение Φ'_η в области Σ) решалась при условии $\Phi(M \in \Sigma) = 0$ (потенциал Φ представлен в форме (1.1)). Решение этого интегрального уравнения в характеристической системе координат (x_1, z_1) с началом в точке O_1 (см. рис. 1), совпадающей с точкой перехода сверхзвуковой передней кромки в дозвуковую (боковую), записывается в виде

$$\Phi'_y(x_1, z_1) = -\frac{1}{\pi\sqrt{z_1 - f(x_1)}} \int\limits_{\psi(x_1)}^{f(x_1)} \alpha(x_1, \zeta_1) \frac{\sqrt{f(x_1) - \zeta_1}}{z_1 - \zeta_1}\, d\zeta_1 \tag{1.5}$$

($z_1 = \psi(x_1)$, $z_1 = f(x_1)$ — уравнения передней и боковой кромок, $\Phi'_\eta(x_1, \zeta_1) = \alpha(x_1, \zeta_1)$ — определенная геометрией крыла функция).

Вторая производная $\Phi''_{yx}(M \in \Sigma)$ на щели получена согласно [2] из решения интегрального уравнения $\Phi'_x(M \in \Sigma) = 0$ (при записи Φ'_x в виде (1.3)), представляющего условие непрерывности давления в области Σ:

$$\Phi''_{yx}(x_1, z_1) = -\frac{1}{\pi\sqrt{z_1 - f(x_1)}} \times \tag{1.6}$$

$$\times\left\{\int\limits_{\psi(x_1)}^{f(x_1)} \alpha'_\xi(x_1, \zeta_1) \frac{\sqrt{f(x_1) - \zeta_1}}{z_1 - \zeta_1}\, d\zeta_1 + \alpha\left[x_1, \psi(x_1)\right]\cdot\psi'_{x_1}(x_1) \frac{\sqrt{f(x_1) - \psi(x_1)}}{z_1 - \psi(x_1)}\right\}$$

$\left(\alpha'_\xi(x_1, \zeta_1) = \Phi''_{\eta\xi}(x_1, \zeta_1)\right.$ — определенная геометрией крыла функция, $\alpha\left[x_1, \psi(x_1)\right] = \Phi'_\eta\left[x_1, \psi(x_1)\right]$ — угол атаки на передней кромке крыла).

В [1] для потенциала скорости Φ, а в [2] для Φ'_x с использованием найденных в области Σ значений Φ'_η, $\Phi''_{\eta\xi}$ доказаны теоремы о концевом эффекте, согласно которым потенциал Φ и производная Φ'_x для точек M, лежащих над крылом, записываются как

$$\Phi = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{s_1} \Phi'_\eta \varphi\, ds, \quad \Phi'_x = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1} \left(\Phi'_\eta \varphi\right)_{\xi = \psi^-(\zeta)} d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{s_1} \Phi''_{\eta\xi}\varphi\, ds,$$

где s_1 — часть области зависимости s точки M на проекции крыла в базовой плоскости, ограниченная линией пересечения характеристического конуса с базовой плоскостью CM_0D_1 (D_1 — точка пересечения этой линии с боковой кромкой), характеристикой D_1C_1 и отрезком передней кромки CC_1 (линия L_1). Значения Φ'_η, $\Phi''_{\eta\xi}$ в области s_1 и на L_1 определены геометрией крыла.

2. Как видно из (1.5), при решении задачи обтекания тонкого крыла конечного размаха, согласно [1], производная $\Phi'_y(M \in \Sigma)$ (скос потока на щели) при приближении точки M к боковой кромке стремится к бесконечности, как $r^{-1/2}$ при $r \to 0$. Из решения также вытекает [1], что производная $\Phi'_x(M \in \Sigma)$ (давление) при приближении точки M к боковой кромке со стороны крыла имеет такой же порядок особенности (за исключением случая, когда боковая кромка лежит в плоскости, параллельной скорости набегающего потока).

Из (1.6) следует, что вторая производная $\Phi''_{yx}(M \in \Sigma)$ из решения, полученного согласно [2], при приближении точки M к боковой кромке

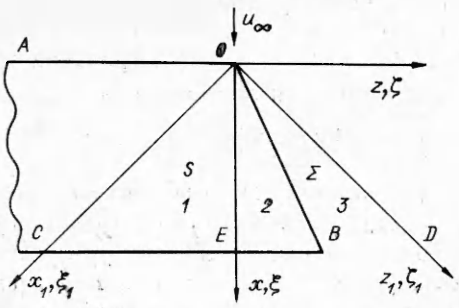

Рис. 2

имеет такую же особенность, как и первая производная $\Phi'_y(M \in \Sigma)$ решения [1].

Проанализируем поведение первых производных $\Phi'_y, \Phi'_x, \Phi'_z$ (газодинамических параметров потока) решения [2]. Без искажения основных свойств решения с целью уменьшения громоздких выкладок при проведении необходимых операций интегрирования однократных и двукратных интегралов анализ проделан на примере решения задачи обтекания плоской пластины, для которой хорошо известно поведение газодинамических параметров решения [1, 3].

Для плоской пластины в области проекции крыла на базовую плоскость S $\Phi'_\eta(M \in S) = \alpha = \text{const}$, $\Phi''_{\eta\xi}(M \in S) = 0$ и формула (1.6) преобразуется в

$$(1.6') \qquad \Phi''_{yx}(M \in \Sigma) = -\frac{\alpha \psi'_{x_1}(x_1)\sqrt{f(x_1) - \psi(x_1)}}{\pi\sqrt{z_1 - f(x_1)}\,[z_1 - \psi(x_1)]}.$$

Без ограничения общности с целью упрощения выкладок рассмотрено обтекание пластины, передняя кромка которой — прямая линия, перпендикулярная скорости набегающего потока, боковая кромка также прямолинейна. Для такого крыла уравнения передней и боковой кромок будут соответственно $z_1 = -x_1$, $z_1 = k_1 x_1$ ($1 \leqslant k_1 \leqslant \infty$, $k_1 = 1$ — боковая кромка совпадает с направлением скорости набегающего потока, $k_1 = \infty$ — дозвуковая боковая кромка становится звуковой, совпадая с головной характеристикой $O_1D(x_1 = 0)$) и формула (1.6′) примет вид

$$(1.6'') \qquad \Phi''_{yx}(M \in \Sigma) = \frac{\alpha\sqrt{k_1 + 1}\sqrt{x_1}}{\pi\sqrt{z_1 - k_1 x_1}\,(x_1 + z_1)}.$$

Вторая производная $\Phi''_{yx}(M \in \Sigma)$ обращается в нуль на головной характеристике и стремится к бесконечности в окрестности боковой кромки.

В (1.2)—(1.6) у всех производных нижние индексы означают направление дифференцирования, они совпадают с направлением осей координат исходной (не характеристической) системы (x, y, z). Для того чтобы по значению второй производной $\Phi''_{yx}(M \in \Sigma)$ определить первую производную $\Phi'_y(M \in \Sigma)$, удобно переписать формулу (1.6″) в координатах (x, z):

$$(1.6''') \qquad \Phi''_{yx}(M \in \Sigma) = \frac{\alpha\sqrt{x - z}}{\sqrt{2}\,\pi\sqrt{z - kx}\,x}.$$

Начало координат системы (x, z) совпадает с началом характеристической системы (x_1, z_1), расположенной в угловой точке перехода передней кромки крыла в боковую (рис. 2). Координаты связаны соотношениями $x = (x_1 + z_1)/\sqrt{2}$, $z = (z_1 - x_1)/\sqrt{2}$, а тангенсы углов наклона в уравнениях боковой кромки $z = kx$, $z_1 = k_1 x_1$ — зависимостью $k = (k_1 - 1)/(k_1 + 1)$. При изменении направления боковой кромки от совпадающего со скоростью набегающего потока до совпадающего с головной характеристикой OD параметры k_1, k изменяются в пределах $1 \leqslant k_1 \leqslant \infty$, $0 \leqslant k \leqslant 1$.

После интегрирования по x обеих частей формулы (1.6‴) находится первая производная

$$(2.1) \qquad \Phi'_y(M \in \Sigma) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}\,\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{k}}\arcsin\frac{(1+k)z - 2kx}{(1-k)z} + \arcsin\frac{(1+k)x - 2z}{(1-k)x}\right\} + az + b.$$

Течение около угловой точки плоской пластины обладает конической симметрией, формулу (2.1) можно записать в виде

$$\Phi'_y(M \in \Sigma) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}\,\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{k}}\arcsin\frac{(1+k)-2k\dfrac{x}{z}}{1-k} + \right. \tag{2.2}$$

$$\left. + \arcsin\frac{(1+k)-2\dfrac{z}{x}}{1-k}\right\} + a_1\frac{z}{x} + b,$$

где $k \leqslant z/x \leqslant 1$; $0 < k < 1$. Производная $\Phi'_y(M \in \Sigma)$ — функция, ограниченная во всей области Σ, в том числе и на характерных линиях: головной характеристике ($z = x$), боковой кромке ($z = kx$).

Решение (2.2) обладает произволом в выборе двух постоянных a_1 и b, этим можно воспользоваться, чтобы поставить дополнительные условия, соответствующие физической картине течения: на головной характеристике

$$\Phi'_y(M \in \Sigma) = -\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - 1\right) + a_1 + b = 0; \tag{2.3}$$

на боковой кромке

$$\Phi'_y(M \in \Sigma) = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - 1\right) + ka_1 + b = \alpha. \tag{2.4}$$

Эти условия выполняются для всех $0 < k < 1$. Для звуковой кромки ($k = 1$), когда она совпадает с головной характеристикой, условия (2.3), (2.4) становятся противоречивыми.

Особым является случай, когда боковая кромка параллельна скорости набегающего потока ($k = 0$). При интегрировании соотношения (1.6''') при $k = 0$ имеем

$$\Phi'_y(M \in \Sigma) = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\left\{\sqrt{\frac{x}{z} - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{z} - 1}\right\} + a_1\frac{z}{x} + b. \tag{2.5}$$

Отсюда видно, что для такого крыла величина скоса потока в окрестности боковой кромки ($z = 0$) стремится к бесконечности.

Поведение газодинамических параметров потока Φ'_x, Φ'_z зависит согласно (1.3), (1.4) от свойств производных Φ'_η, $\Phi''_{\eta\xi}$, задаваемых в области S геометрией крыла, а в области Σ определяемых формулами (1.6'''), (2.2). В (1.3), (1.4) подставляются соответствующие значения производных Φ'_η, $\Phi''_{\eta\xi}$ и проводится довольно трудоемкий процесс вычисления интегралов, которые удается получить в конечном виде. Процесс вычисления удобнее осуществлять в характеристических переменных (x_1, z_1). Область влияния боковой кромки, ограниченная головными характеристиками OD ($\xi_1 = 0$), OC ($\zeta_1 = 0$), разделяется на три: область *1* на крыле, примыкающая к зоне крыла AOC, где не сказывается концевой эффект, ограничена характеристикой OC и линией OE ($\zeta_1 = \xi_1$): *2* на крыле — линией OE и боковой кромкой OB ($\zeta_1 = k_1\xi_1$); *3*, совпадающая с областью Σ,— боковой кромкой OB и характеристикой OD (см. рис. 2). Точки M, принадлежащие этим областям, будем в дальнейшем обозначать M_1, M_2, M_3.

После проведения всех вычислений для Φ'_x, Φ'_z получаются компактные выражения:

$$\Phi'_x(M_1, M_2) = \frac{\alpha}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{(k_1x_1 - z_1) - (k_1 + 1)z_1}{k_1(x_1 + z_1)}\right\}; \quad \Phi'_x(M_3) = 0; \tag{2.6}$$

$$\Phi'_z(M_1, M_2) = -2\alpha\sqrt{\frac{k_1 + 1}{k_1 - 1}}\ln\frac{\sqrt{(k_1 - 1)z_1} + \sqrt{k_1x_1 - z_1}}{\sqrt{k_1|x_1 - z_1|}}, \tag{2.7}$$

$$\Phi'_z(M_3) = 0.$$

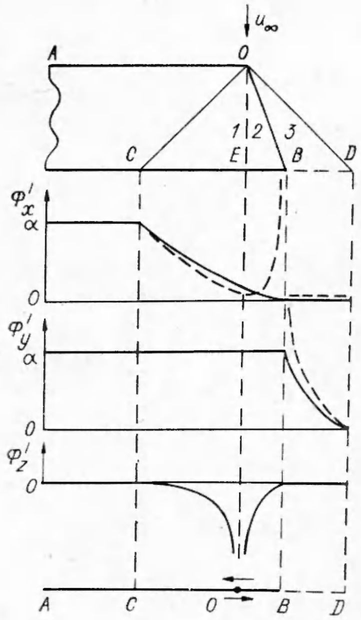

Рис. 3

Согласно (2.6), на границе с областью без влияния боковой кромки (линия OC, $z_1 = 0$) Φ'_x совпадает с соответствующим решением для пластины бесконечного размаха: $\Phi'_x|_{z_1=0} = \alpha$. На боковой кромке, как и должно следовать из постановки задачи, $\Phi'_x|_{z_1=k_1x_1} = 0$. На крыле внутри возмущенной боковой кромкой области в распределении давления нет особенностей, в том числе и на линии $\zeta_1 = \xi_1$, где

$$\Phi'_x|_{z_1=x_1} = \frac{\alpha}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{2}{k_1(k_1+1)}\right\}.$$

На рис. 3 сплошная линия — качественная картина распределения давления в сечении $x = \text{const}$, штриховая — распределение давления, отвечающее [1]. Здесь же приведена качественная картина поведения производной Φ'_y на щели согласно формуле (2.2) с учетом условий (2.3), (2.4) (сплошная линия) и решение (1.5) на основе [1] (штриховая).

Производная Φ'_z характеризует поперечное перетекание потока в базовой плоскости $\eta = 0$. Согласно (2.7), на щели, так же как и на пластине бесконечного размаха, нет поперечного перетекания $(\Phi'_z(M_3) = 0)$. Решение в возмущенной боковой кромкой области на крыле $\Phi'_z(M_1, M_2)$ непрерывно сопрягается с решениями на щели и на бесконечной пластине (рис. 3). На линии $\zeta_1 = \xi_1$, проходящей через точку излома кромок в направлении набегающего потока, Φ'_z имеет особенность. На этой линии располагается особенность типа продольного вихря, резко не влияющего на компоненты Φ'_y, Φ'_x (рис. 3). В случае же, когда боковая кромка параллельна скорости набегающего потока, особенность совпадает с кромкой, что отражается на производной Φ'_y на кромке (формула (2.5)).

Таким образом, если в задаче о концевом эффекте, сформулированной с привлечением в качестве определяющего параметра $\Phi''_{\eta\xi}$, исходить из условия $\Phi'_x = 0$ на базовой плоскости вне проекции крыла, то газодинамические параметры потока (первые производные потенциала) на дозвуковой кромке принимают в отличие от решения [1] ограниченные значения. В решении [1] реализуется схема симметричного (безотрывного) обтекания крыла конечного размаха. В исследуемом решении заложено условие схода на дозвуковых кромках, соответствующее картине отрывного обтекания крыла конечного размаха.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Красильщикова Е. А.** Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке.— М.; Л.: Гостехиздат, 1952.
2. **Воробьев Н. Ф.** Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке.— Новосибирск: Наука, 1985.
3. **Аэродинамика** частей самолета при больших скоростях/Под ред. А. Ф. Доновена, Г. Р. Лоуренса.— М.: ИЛ, 1959.

г. Новосибирск *Поступила 26/XI 1990 г., в окончательном варианте — 28/XII 1990 г.*