

газа УВ. В действительности на этом участке течения имеются и развитые следы, однако их вклад в накопление фазовых искажений в расчетах не учитывался, что могло приводить к завышению соответствующих расчетных значений Sh по сравнению с экспериментальными при сохранении качественного характера зависимости $Sh(\alpha)$. Кроме того, 30-кратное увеличение экспериментально измеренных величин фазовых искажений при пересчете на длину геометрического пути в среде $\sim 1,05$ м приводит к соответствующему 30-кратному усилению влияния пристенных областей и инициируемых потоком УВ, возникающих в канале экспериментальной установки с размером сечения 35×85 мм. Это также может быть причиной различий в абсолютных значениях расчетных и экспериментальных Sh , причем экспериментальные значения, найденные при таком пересчете на большую длину оптического пути в потоке, очевидно, будут занижены против тех, которые могут быть получены для реальных потоков в крупногабаритных каналах.

Изложенные результаты численного и экспериментального (методом гальбот-интерферометрии) исследования оптического качества газового потока, сформированного блоком осесимметричных сопел, убедительно свидетельствуют о возможности улучшения диаграммы направленности излучения за счет оптимальной ориентации таких потоков относительно направления вывода излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Russell D. A., Chu Y. K. Aerodynamic disturbances from supersonic nozzle arrays // Proc. IV Intern. Symp. on Gasdynamic and Chemical Lasers, Italy, 1983.
2. Борейшо А. С., Коряковский А. С. и др. Исследование оптического качества газовых потоков, формируемых сопловыми блоками сотовой конструкции // ЖТФ.— 1985.— Т. 55, вып. 10.
3. Борейшо А. С., Лобачев В. В., Морозов А. В., Попов А. Г. Результаты исследования поля плотности и оптического качества потоков, формируемых сопловыми блоками сотовой конструкции // Физическая газодинамика: экспериментальное моделирование и диагностика.— Минск: ИТМО АН БССР, 1985.

г. Ленинград

Поступила 26/II 1988 г.

УДК 536.25

А. А. Головин, Ю. П. Гупало, Ю. С. Рязанцев

ИЗМЕНЕНИЕ ФОРМЫ КАПЛИ ПРИ ЕЕ ДВИЖЕНИИ ЗА СЧЕТ ХЕМОТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО ЭФФЕКТА

Известно, что капля жидкости (пузырек), помещенная в другую (не смешивающуюся с ней) жидкость, находясь в поле температуры с постоянным градиентом, в отсутствие внешних сил дрейфует по направлению градиента температуры с постоянной скоростью

$$U = \left| \frac{d\sigma}{dT} \right| \frac{Aa}{\mu_1} \frac{2}{(2 + \delta)(2 + 3\beta)^{1/2}}$$

где σ — межфазное натяжение; T — температура; $d\sigma/dT = \text{const}$; A — постоянный градиент температуры на бесконечности; a — радиус капли; μ_1 — динамическая вязкость внешней среды; β , δ — отношения соответственно динамических вязкостей и теплопроводностей жидкостей внутри и вне капли.

Впервые приведенное выражение для скорости термокапиллярного дрейфа было теоретически получено и подтверждено экспериментально в [1]. В дальнейшем явление термокапиллярного дрейфа капель и пузырьков подробно исследовалось (см., например, [2—5]). В частности, отмечалось, что капля более плотной жидкости при дрейфе вытягивается по направлению движения, в противном случае — сжимается [3, 5].

Термокапиллярный дрейф обусловлен эффектом Марангони, приводящим за счет зависимости поверхностного натяжения от температуры к возникновению дополнительных касательных напряжений на поверхности капли (пузырька), находящейся во внешнем неоднородном температурном поле. Между тем, как это впервые отмечено в [6], дополнительные касательные напряжения на поверхности капли могут быть

обусловлены неравномерным распределением температуры, вызванным собственным движением капли в первоначально изотермической среде, когда на поверхности капли происходит экзо- или эндотермическая межфазная реакция с участием вещества, растворенного в сплошной фазе. В этом случае при определенных значениях параметров возможны возникновение действующей на каплю силы тяги [6, 7], а также дрейф капли с постоянной скоростью в направлении, зависящем от начальных условий [7]. Подобные явления уместно назвать хемотермокапиллярным. Скорость хемотермокапиллярного дрейфа [7]

$$U_* = 0,049 D_1 a \left[Q C_\infty \frac{d\sigma/dT}{\mu_1 \lambda_1 (1 + (3/2)\beta)(2 + \delta)} \right]^2,$$

где D_1 — коэффициент диффузии реагента во внешней жидкости; Q — тепловой эффект межфазной реакции; C_∞ — концентрация реагента вдали от капли; λ_1 — теплопроводность внешней жидкости. Этот результат относится к случаю, когда диффузионное число Пекле велико: $Pe = U_* a / D_1 \gg 1$, а тепловые числа Пекле малы: $Pe_{\chi_i} = U_* a / \chi_i \ll 1$ (χ_i — температуропроводности фаз).

В [7] предполагалось, что межфазное натяжение велико, поэтому капля сохраняет сферическую форму. При этом условие баланса нормальных компонент импульса на межфазной поверхности сводилось к несущественному скачку давления, а условие баланса тангенциальных компонент приводило к бесконечной системе уравнений, связывающих коэффициенты разложения функций тока по полиномам Гегенбауэра $C_n^{-1/2}$, приближенное решение которой давало выражение для действующей на каплю силы.

Можно показать, однако, что учет баланса нормальных компонент напряжений на поверхности раздела фаз приводит к выводу об изменении формы капли при ее движении за счет хемотермокапиллярного эффекта уже в нулевом приближении по числу Рейнольдса. Этим рассматриваемая деформация отличается от деформации не реагирующей капли (пузырька) при движении в жидкости — обычном или термокапиллярном. Так, в [3, 5, 8] показано, что при движении капли в жидкости ее форма остается сферической при любых числах Вебера в нулевом приближении по числу Рейнольдса, поскольку отвечающее этому приближению решение удовлетворяет условиям баланса как касательных, так и нормальных компонент напряжений.

Напомним постановку задачи, рассматривавшейся в [7]. В бесконечной однородной жидкости с постоянной скоростью движется капля другой (не смешивающейся с ней) жидкости. На поверхности капли протекает химическая реакция с выделением (поглощением) тепла, реагент подводится за счет диффузии из внешней жидкости и полностью мгновенно реагирует на межфазной поверхности (диффузионный режим). Значение Pe считается большим, а Pe_{χ_i} — малым (так как для большинства жидкостей число Льюиса $L = \chi/D \sim 10^2$). В приближении ползущего течения ($Re = 0$), диффузионного пограничного слоя ($Pe \gg 1$) и в нулевом приближении по малым тепловым числам Пекле ($Pe_{\chi_i} = 0$) вне и внутри капли уравнения движения жидкости и распределения концентрации реагента вне капли и температур в обеих фазах в безразмерных переменных в сферической системе координат, связанной с центром масс капли, описываются следующими уравнениями и граничными условиями:

$$(1.1) \quad E^4 \psi_i = 0, \quad E^2 = \partial_r^2 + (1 - \mu^2) r^{-2} \partial_{\mu\mu}, \\ \mu \equiv \cos \theta, \quad i = 1, 2,$$

$$r \rightarrow \infty, \quad \psi_1 \rightarrow \frac{1}{2} (1 - \mu^2) r^2, \quad r = 0, \quad \psi_2 / r^2 < \infty, \\ r = 1, \quad \partial_\mu \psi_1 = \partial_\mu \psi_2 = 0, \quad \partial_r \psi_1 = \partial_r \psi_2;$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial(\psi_i, z)}{\partial(r, \mu)} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}, \quad r \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow 0, \quad r = 1, \quad z = 1;$$

$$(1.3) \quad \Delta \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad r \rightarrow \infty, \quad \varphi_1 \rightarrow 0, \quad r = 0, \quad \varphi_2 < \infty, \\ r = 1, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \partial_r \varphi_1 - \delta \partial_r \varphi_2 = \partial_r z;$$

$$(1.4) \quad (2\partial_r - \partial_r^2)(\psi_1 - \beta\psi_2) = Ma(1 - \mu^2) \partial_\mu \varphi_1, \quad r = 1;$$

$$(1.5) \quad -Re(p_1 - \beta p_2) - 2\partial_r^2(\psi_1 - \beta\psi_2) = 2 \left(\frac{Re}{We} + Ma \varphi_1 \right), \quad r = 1.$$

Здесь $\psi'_i = U_\infty a^2 \psi_i$ ($i = 1$ относится к внешней жидкости, 2 — к жидкости внутри капли); $r = r'/a$; $z = (C_\infty - C)/C_\infty$; $\varphi_i = \frac{1}{\sigma_\infty} (T_i - T_\infty)$; $p_i = p'_i (\rho_i U_\infty^2)^{-1} (\mu_1/\mu_i)$; $\theta_* = QC_\infty (\rho_1 c_{p1})^{-1}$; Q — тепловой эффект межфазной реакции; $Re = U_\infty a/D$, $Re = U_\infty a/\nu_1$, $We = \rho_1 U_\infty^2 a/\sigma_\infty$, $Ma = L^{-1} \theta_* \sigma_\infty^{-1} (d\sigma/dT) Re/We$ — числа Пекле, Рейнольдса, Вебера, Марангони; C — концентрация реагента в сплошной фазе; p_i , ρ_i , T_i — давление, плотность и температура; μ_i , ν_i , λ_i , χ_i , c_p — динамическая и кинематическая вязкости, тепло- и температуропроводность, удельная теплоемкость; T_∞ — температура вдали от капли; σ_∞ — межфазное натяжение, соответствующее этой температуре; U_∞ — скорость жидкости вдали от капли; индекс $i = 1$ относится к сплошной фазе, 2 — к капле; $\beta = \mu_2/\mu_1$; $\delta = \lambda_2/\lambda_1$; $L = \chi_1/D$; штрихами помечены размерные величины; направление полярной оси совпадает с направлением набегающего на каплю потока на бесконечности.

Задача (1.1)–(1.5) решается следующим образом. Сначала находится решение задачи (1.1), не имеющее особенностей во всей области течения, с точностью до неопределенных постоянных A , A_n ($n \geq 3$):

$$(1.6) \quad \psi_1 = (r^2 + Ar - (A+1)r^{-1}) G_2(\mu) + \sum_{n=3}^{\infty} A_n (r^{-n+3} - r^{-n+1}) G_n(\mu),$$

$$\psi_2 = (A + 3/2)(r^4 - r^2) G_2(\mu) + \sum_{n=3}^{\infty} A_n (r^{-n+2} - r^n) G_n(\mu)$$

($G_n(\mu)$ — полиномы Гегенбауэра порядка n и степени $-1/2$ ($G_n(\mu) \equiv C_n^{-1/2}(\mu)$)).

Используя (1.6), можно найти решения задачи (1.2), (1.3), которые будут содержать неизвестные постоянные A , A_n ($n \geq 3$). Подставляя эти решения в условие (1.4), выражающее баланс касательных напряжений, получаем бесконечную нелинейную систему уравнений относительно A , A_n :

$$(1.7) \quad A = -\frac{1 + (3/2)\beta}{1 + \beta} + \frac{1}{3} Ma B_1 (1 + \beta)^{-1}, \quad A_{n+1} = \frac{n(n+1) Ma}{(4n+2)(1+\beta)} B_n,$$

$$B_n = -\frac{(n+1/2)}{(n+1+\delta n)} \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 f(\mu) \left[\int_{-1}^{\mu} f(\mu) d\mu \right]^{-1/2} P_n(\mu) d\mu,$$

$$f(\mu) = (2A + 3) G_2(\mu) + \sum_{n=3}^{\infty} 2A_n G_n(\mu), \quad \varepsilon = Re^{-1/2}$$

(более подробный вывод системы дан в [7]).

Если считать $We \rightarrow 0$, то условие (1.5) в главном приближении сведется к уравнению для скачка давления на поверхности капли, а задача — к решению системы (1.7) относительно постоянных A , A_n ($n \geq 3$) [7]. Если же значение We произвольно, то в (1.5) необходимо учитывать члены, содержащие функции тока ψ_i и температуру φ_1 . Из (1.6) находим для давления [9]

$$(1.8) \quad Re p_1 = \left(-\pi_1 r + \frac{A}{r^2} \right) P_1(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(2n-1)}{n+1} A_{n+1} r^{-n-1} P_n(\mu),$$

$$Re p_2 = (-\pi_2 + 10(A + 3/2)) r P_1(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(2n+3)}{n} A_{n+1} r^n P_n(\mu),$$

где $\pi_i = \rho_i g a^2 / (U_\infty \mu_1)$ — безразмерное гидростатическое давление; g — ускорение свободного падения (массовая сила — сила тяжести); $P_0 = \text{const}$. При равномерном движении $\pi_1 - \beta \pi_2 = 3A$. Тогда, подставляя

соотношения (1.8) с учетом этого равенства в (1.5), имеем новую систему уравнений для постоянных A, A_n :

$$(1.9) \quad A = -\frac{1 + (3/2)\beta}{1 + \beta} + \frac{1}{3} \text{Ma} B_1 (1 + \beta)^{-1}, \quad A_{n+1} = \\ = \text{Ma} \frac{n(n+1)}{3(n\beta + \beta + n)} B_n, \quad n \geq 2$$

(выражение для B_n такое же, как и в (1.7)).

Уравнения (1.7), (1.9) могут одновременно выполняться только для A . Для A_{n+1} ($n \geq 2$) уравнения систем (1.7) и (1.9) несовместны. Это означает, что форму капли уже в нулевом приближении по числу Рейнольдса (стоксово приближение в условиях хемотермокапиллярного эффекта) нельзя считать сферической: неравномерность распределения температуры по поверхности капли приводит к ее деформации и появлению дополнительных гармоник функции тока. Тем не менее постоянные A_{n+1} ($n \geq 2$) быстро убывают с ростом n , их можно считать малыми по сравнению с A . Следовательно, можно построить приближенное решение систем (1.7), (1.9), пренебрегая в выражениях для B_n вкладом членов, пропорциональных постоянным A_n ($n \geq 3$). Таким образом, в этом приближении $A_n \equiv 0$ ($n \geq 3$), а для A получается нелинейное уравнение, решение которого дает выражение для силы, действующей на каплю в условиях хемотермокапиллярного эффекта (см. формулу (15) в [7]). Отметим, что условия для касательных и нормальных компонент напряжений выполняются одновременно (первые уравнения в (1.7), (1.9)), так что каплю в этом приближении можно считать сферической при любых We . Тем не менее из (1.7), (1.9) следует, что $A_n \neq 0$ ($n \geq 3$). Постоянные A_n нельзя вычислить, не учитывая изменение формы капли, поскольку уравнения для A_n ($n \geq 3$) в системах (1.7), (1.9) несовместны. Однако из малости постоянных A_n по сравнению с A вытекает, что деформация капли будет малой (порядка A_n/A).

Ниже построено уточненное по сравнению с полученным в [7] решение задачи (1.1)–(1.5), учитывающее высшие гармоники в функциях тока (1.6) и изменение формы капли.

2. Рассмотрим жидкую каплю произвольной достаточно гладкой формы, движущуюся в другой (не смешивающейся с ней) жидкости. На поверхности капли в диффузионном режиме протекает неизотермическая химическая реакция за счет реагента, растворенного во внешней жидкости. Поверхностное натяжение капли зависит от температуры линейно. Значения Re, Re_{χ_i} считаем малыми, а Pe — большим. Выберем сферическую систему координат с центром, совпадающим с центром масс капли. Распределение скорости течения жидкости, концентрации реагента в сплошной фазе и распределение температур вне и внутри капли в приближениях соответственно ползущего течения, диффузионного пограничного слоя и отсутствия конвективной теплопроводности опишем уравнениями и граничными условиями в безразмерной форме

$$(2.1) \quad E^4 \psi_i = 0, \quad E^2 = \partial_{rr}^2 + r^{-2} (1 - \mu^2) \partial_{\mu\mu}^2, \\ r \rightarrow \infty, \quad \psi_1 \rightarrow (1/2)r^2(1 - \mu^2), \quad r = 0, \quad \psi_2/r^2 < \infty, \quad r = R, \quad \psi_1 = \psi_2 = 0, \\ -\partial_r \psi_1 + \frac{R'}{R^2} (1 - \mu^2) \partial_{\mu\mu} \psi_1 = -\partial_r \psi_2 + \frac{R'}{R^2} (1 - \mu^2) \partial_{\mu\mu} \psi_2;$$

$$(2.2) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\psi_1, z)}{\partial(r, \mu)} = \text{Pe}^{-1} \Delta z, \quad r \rightarrow \infty, \quad z = 0, \quad r = R, \quad z = 1;$$

$$(2.3) \quad \Delta \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad r \rightarrow \infty, \quad \varphi_1 \rightarrow 0, \quad r = 0, \quad \varphi_2 < \infty, \\ r = R, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \partial_r \varphi_1 - (R'/R^2)(1 - \mu^2) \partial_{\mu\mu} \varphi_1 - \\ - \delta(\partial_r \varphi_2 - (R'/R^2)(1 - \mu^2) \partial_{\mu\mu} \varphi_2) = \partial_n z;$$

$$(2.4) \quad r = R, \quad 2[2\partial_{r\mu}^2\psi - 3R^{-1}\partial_{\mu}\psi + \mu(1-\mu^2)^{-1}\partial_r\psi]_2^1 \times \\ \times (1-\mu^2)R'/R + [2\partial_r\psi - R\partial_{rr}^2\psi + R^{-1}(1-\mu^2)\partial_{\mu\mu}^2\psi]_2^1 \left(1 - (1-\mu^2)\left(\frac{R'}{R}\right)^2\right) = \\ = R(1-\mu^2)\left(1 + (1-\mu^2)\left(\frac{R'}{R}\right)^2\right)^{1/2} \text{Ma} (R'\partial_r\varphi + \partial_{\mu}\varphi);$$

$$(2.5) \quad r = R, \quad -\text{Re}[p]_2^1 \left(1 + (1-\mu^2)\left(\frac{R'}{R}\right)^2\right) - \frac{2}{R^2} \left\{ [\partial_{r\mu}^2\psi - 2R^{-1}\partial_{\mu}\psi]_2^1 - \right. \\ \left. - R'R^{-1}[2\partial_r\psi - R\partial_{rr}^2\psi + R^{-1}(1-\mu^2)\partial_{\mu\mu}^2\psi]_2^1 - \right. \\ \left. - (1-\mu^2)\left(\frac{R'}{R}\right)^2 \left[\partial_{r\mu}^2\psi + \mu(1-\mu^2)^{-1}\partial_r\psi - \frac{1}{R}\partial_{\mu}\psi \right]_2^1 \right\} = \\ = \left(1 + (1-\mu^2)\left(\frac{R'}{R}\right)^2\right) 2h \left(\frac{\text{Re}}{\text{We}} + \text{Ma} \varphi \right).$$

Здесь $R \equiv R(\mu)$ — функция, описывающая форму капли в сферической системе координат; $R' \equiv dR/d\mu$; ∂_n — производная по нормали к поверхности капли; $h \equiv h(\mu)$ — безразмерная кривизна межфазной границы; $[\cdot]_2^1 = (\cdot)_1 - \beta(\cdot)_2$. Граничные условия в (2.3) выражают равенство температур и баланс тепловых потоков на поверхности капли, условия (2.4), (2.5) — баланс касательных и нормальных напряжений соответственно. Масштабом длины служит радиус a сферы, равной капле по объему.

Решение задачи (2.1)–(2.5) будем строить аналогично решению задачи в [7]. В п. 1 показано, что изменение формы капли можно считать малым: $R(\mu) = 1 + \xi(\mu)$, $|\xi(\mu)| \ll 1$, $\xi(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n P_n(\mu)$, причем $\chi_0 = \chi_1 = \hat{0}$, так как жидкость несжимаемая и начало координат совпадает с центром масс капли. Из условий, выполняющихся на сферической поверхности, следует, что на слабдеформированной поверхности $|\partial_{\mu}\psi| \sim |\xi(\mu)| \ll 1$.

Функции тока ψ_i , удовлетворяющие уравнению $\bar{E}^2\psi_i = 0$ и граничным условиям в начале координат и на бесконечности, имеют вид [9]

$$(2.6) \quad \psi_1 = (r^2 + B_2 r^{-1} + D_2 r) G_2(\mu) + \sum_{n=3}^{\infty} (B_n r^{-n+1} + D_n r^{-n+3}) G_n(\mu), \\ \psi_2 = (A_2 r^2 + C_2 r^4) G_2(\mu) + \sum_{n=3}^{\infty} (A_n r^n + C_n r^{n+2}) G_n(\mu).$$

Первые слагаемые в (2.6) дают при слабой деформации капли основной вклад в хемотермокапиллярный эффект, и поэтому будем учитывать несферичность поверхности только в этих слагаемых, обозначив их $\psi_1^{(0)}$ и $\psi_2^{(0)}$, так что при $r = 1 + \xi(\mu)$ с точностью до $O(\xi)$ получим

$$(2.7) \quad \psi_i(r, \mu) = \psi_i(1, \mu) + \partial_r \psi_i^{(0)}|_{r=1} \xi(\mu), \\ r = 1, \quad \partial_r \psi_i^{(0)}|_{r=1} \xi(\mu) \sim G_2(\mu) \sum_{n=2}^{\infty} \chi_n P_n(\mu) = \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n G_n(\mu), \\ \omega_n = (1/2)n(n-1)[\chi_{n-2}/(2n-3) - \chi_n/(2n+1)].$$

Подставляя (2.6) с учетом (2.7) в граничные условия из (2.1) при $r = R$ и удерживая члены первого порядка малости по $\xi(\mu)$, определим условия на коэффициенты в функциях тока, используя которые, найдем

$$(2.8) \quad \psi_1 = (r^2 + D_2 r - r^{-1}((D_2 + 1) - (2D_2 + 3)\chi_2/5)) G_2(\mu) + \\ + \sum_{n=3}^{\infty} [D_n(r^{-n+3} - r^{-n+1}) - \omega_n r^{-n+1}] G_n(\mu), \\ \psi_2 = [(D_2 + 3/2 - 3\chi_2/10)(r^4 - r^2) + (D_2 + 3/2)(3\chi_2/5)r^2] G_2(\mu) + \\ + \sum_{n=3}^{\infty} [D_n(r^{n+2} - r^n) + \omega_n((n-2(D_2+1))r^{n+2} - (n-(2D_2+3))r^4)] G_n(\mu).$$

Перейдем к задаче (2.2) и рассмотрим ее решение в приближении диффузионного пограничного слоя [10]:

$$(2.9) \quad z = \operatorname{erfc} \left(\frac{\psi_1}{z\varepsilon\sqrt{\tau}} \right), \quad \tau = \int_{-1}^{\mu} (R^2 + R'^2) \partial_r \psi_1 d\mu, \quad \varepsilon = \operatorname{Re}^{-1/2}$$

(ψ_1 определяется выражением (2.8)). Дифференцируя (2.9) по нормали к поверхности капли, получаем выражение с точностью до членов первого порядка малости по $\xi(\mu)$:

$$(2.10) \quad \partial_n z = j_0(\mu) + j_1(\mu), \quad j_0(\mu) = -\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \tau_0^{-1/2} \partial_r \psi_1^{(0)},$$

$$j_1(\mu) = -\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \tau_0^{-1/2} (\partial_r \psi_1^{(i)} + \partial_{rr}^2 \psi_1^{(0)} \xi(\mu) + \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi}} \tau_0^{-3/2} \partial_r \psi_1^{(0)} \tau_1,$$

$$\tau_0 = \int_{-1}^{\mu} \partial_r \psi_1^{(0)} d\mu, \quad \tau_1 = \int_{-1}^{\mu} [(2\partial_r \psi_1^{(0)} + \partial_{rr}^2 \psi_1^{(0)}) \xi(\mu) + \partial_r \psi_1^{(i)}] d\mu,$$

$$\psi_1^{(0)} = (r^2 + D_2 r - r^{-1} (D_2 + 1)) G_2(\mu),$$

$$\psi_1^{(1)} = r^{-1} (2D_2 + 3) \frac{\chi_2}{5} G_2(\mu) + \sum_{n=3}^{\infty} [D_n (r^{-n+3} - r^{-n+1}) - \omega_n r^{-n+1}] G_n(\mu)$$

(значения производных берутся при $r = 1$). Выражение (2.10) для $\partial_n z$ следует подставить в граничное условие равенства теплоточков при $r = R$ в (2.3). Решение задачи (2.3):

$$(2.11) \quad \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^{-n-1} P_n(\mu), \quad \varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n r^n P_n(\mu).$$

Основной вклад в хемотермокапиллярный эффект дают низшие гармоники в (2.11). Обозначим $\varphi_1^{(0)} = \alpha_0 r^{-1} + \alpha_1 r^{-2} \mu$, $\varphi_2^{(0)} = \beta_0 + \beta_1 r \mu$ и будем учитывать несферичность поверхности капли только в выражении для $\varphi_i^{(0)}$ аналогично тому, как это делалось в случае $\psi_i^{(0)}$, оставляя члены первого порядка малости по $\xi(\mu)$. С точностью до $O(\xi(\mu))$ граничные условия при $r = R$ в (2.3) имеют вид

$$(2.12) \quad r = 1, \quad \varphi_1^{(0)} + \partial_r \varphi_1^{(0)} \xi(\mu) + \varphi_1^{(1)} = \varphi_2^{(0)} + \partial_r \varphi_2^{(0)} \xi(\mu) + \varphi_2^{(1)},$$

$$\partial_r \varphi_1^{(0)} + \partial_{rr}^2 \varphi_1^{(0)} \xi(\mu) + \partial_r \varphi_1^{(i)} - \xi'(\mu) (1 - \mu^2) \partial_\mu \varphi_1^{(0)} -$$

$$- \delta (\partial_r \varphi_2^{(0)} + \partial_{rr}^2 \varphi_2^{(0)} \xi(\mu) + \partial_r \varphi_2^{(1)} - \xi'(\mu) (1 - \mu^2) \partial_\mu \varphi_2^{(0)} =$$

$$= j_0(\mu) + j_1(\mu), \quad \varphi_i^{(1)} = \varphi_i - \varphi_i^{(0)}.$$

Выражения для $j_0(\mu)$ и $j_1(\mu)$, определенные в (2.10), разложим в ряды по полиномам Лежандра:

$$j_0(\mu) = \kappa_0^{(0)} + \kappa_1^{(0)} \mu + \Sigma_1, \quad j_1(\mu) = \kappa_0^{(1)} + \kappa_1^{(1)} \mu + \Sigma_2,$$

$$\kappa_n^{(p)} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 j_p P_n(\mu) d\mu, \quad p = 0, 1,$$

$$\Sigma_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \kappa_n^{(0)} P_n(\mu), \quad \Sigma_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \kappa_n^{(1)} P_n(\mu).$$

Поскольку коэффициенты $\kappa_n^{(0)}$ и $\kappa_n^{(1)}$ быстро убывают с ростом n , считаем $\Sigma_1 \sim O(\xi)$, $\Sigma_2 \sim o(\xi)$. Из (2.11), (2.12), используя свойства полиномов Лежандра и приравнявая коэффициенты при полиномах одинаковых сте-

пеней, получим условия, связывающие коэффициенты $\alpha_n, \beta_n, \kappa_n$:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \alpha_0 &= \beta_0, \quad \alpha_1(1 - (4/5)\chi_2) = \beta_1(1 + (2/5)\chi_2), \\ &-(\alpha_0\chi_2 + (6/7)\alpha_1\chi_3 + \alpha_2) = (3/7)\beta_1\chi_2 + \beta_2, \\ &-(\alpha_0\chi_3 + 2\alpha_1\left(\frac{k}{2k-1}\chi_{k-1} + \frac{k}{2k+3}\chi_{k+1}\right) + \alpha_k) = \\ &= \beta_1\left(\frac{k}{2k-1}\chi_{k-1} + \frac{k+1}{2k+1}\chi_{k+1}\right) + \beta_k, \quad k \geq 3; \end{aligned}$$

$$(2.14) \quad \begin{aligned} -\alpha_0 &= \kappa_0^{(0)} + \kappa_0^{(1)}, \quad -2\alpha_1(1 - (3/5)\chi_2) - \delta\beta_1(1 - (6/5)\chi_2) = \kappa_1^{(0)} + \kappa_1^{(1)}, \\ 2\alpha_0\chi_2 + (6/7)\alpha_1\chi_3 - 3\alpha_2 - \delta(2\beta_2 - (12/7)\beta_1\chi_3) &= \kappa_2^{(0)}, \\ 2\alpha_0\chi_k + \alpha_1\left(\frac{k(k+5)}{2k-1}\chi_{k-1} + \frac{(k+1)(4-k)}{2k+1}\chi_{k+1}\right) - \\ - \delta\left[k\beta_k - \beta_1\left(\chi_{k+1}\frac{(k+1)(k+2)}{2k+3} - \chi_{k-1}\frac{k(k-1)}{2k-1}\right)\right] &= \kappa_k^{(0)}, \quad k \geq 3. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты κ_i , в свою очередь, зависят от постоянных D_i в функциях тока и от χ_i .

Подставим в (2.4), (2.5) выражения (2.8) для функций тока и распределения температуры (2.11) с коэффициентами α_i, β_i , удовлетворяющими (2.13), (2.14), учитывая члены первого порядка по $\xi(\mu)$ и несферичность поверхности только в $\varphi_i^{(0)}, \psi_i^{(0)}$ и $p_i^{(0)}$ ($p_i^{(0)}$ — нулевая и первая гармоники давления в (1.8)). Приравнявая коэффициенты при полиномах Лежандра одинаковых степеней, находим бесконечную систему уравнений относительно D_i, χ_i , причем уравнения для D_2, χ_2 нелинейны, а для D_i, χ_3 ($i \geq 3$) линейны. При этом в (2.5) использовано соотношение $h(\mu) = 1 - \xi(\mu) - (1/2)(1 - \mu^2)\xi'(\mu)$, $|\xi| \ll 1$ [8].

Система уравнений для коэффициентов D_i, χ_i оказывается зацепленной. Для расцепления уравнения применим следующую процедуру. Будем пренебрегать членами $\chi_i, i \geq N, D_k$ ($k \geq N+1$) по сравнению с D_N ($N \geq 2$). Такая процедура может считаться оправданной, поскольку коэффициенты χ_k, D_k убывают с ростом k , а условия для нормальных и касательных компонент напряжений выполняются для первой главной гармоники на недеформированной поверхности (п. 4). Ограничиваясь вторыми гармониками, имеем для D_3 и χ_2 систему уравнений

$$10D_3(1 + \beta) - 6\text{Ma}\chi_2\frac{\kappa_0^{(0)}}{3 + 2\delta} = -6\text{Ma}\frac{\kappa_2^{(0)}}{3 + 2\delta},$$

$$-D_3(2 + 3\beta) + \chi_2\left(4\frac{\text{Re}}{\text{We}} - 2\text{Ma}\frac{5 + 4\delta}{3 + 2\delta}\kappa_0^{(0)}\right) = 2\text{Ma}\frac{\kappa_2^{(0)}}{3 + 2\delta},$$

решение которой

$$(2.15) \quad \chi_2 = \text{Ma}\kappa_2^{(0)}\Delta^{-1}, \quad D_3 = -12\text{Ma}\kappa_2^{(0)}\left(\frac{\text{Re}}{\text{We}} - \text{Ma}\kappa_0^{(0)}\right)\Delta^{-1},$$

$$\Delta = 20(1 + \beta)\frac{\text{Re}}{\text{We}}(3 + 2\delta) - \text{Ma}\kappa_0^{(0)}(56 + 59\beta + 40\delta(1 + \beta)),$$

$$\kappa_0^{(0)} = -\frac{1}{2}\sqrt{\text{Pe}}\sqrt{\frac{3}{\pi}}(D_2 + 3/2)^{1/2}\int_{-1}^1\frac{1-\mu}{\sqrt{2-\mu}}d\mu \approx 0,6\sqrt{\text{Pe}(D_2 + 3/2)},$$

$$\kappa_2^{(0)} = -\frac{5}{4}\sqrt{\text{Pe}}\sqrt{\frac{3}{\pi}}(D_2 + 3/2)^{1/2}\int_{-1}^1\frac{1-\mu}{\sqrt{2-\mu}}P_2(\mu)d\mu \approx 0,07\sqrt{\text{Pe}(D_2 + 3/2)}.$$

Для основной гармоники D_2 получим то же уравнение, что и в случае недеформированной поверхности [7]:

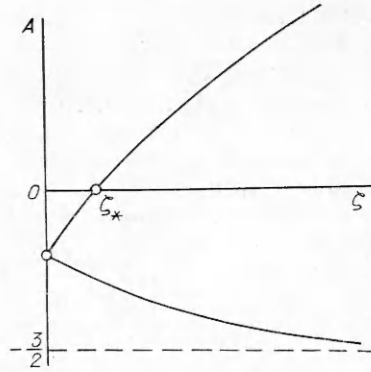
$$D_2 = -\frac{1 + (3/2)\beta}{1 + \beta} - \frac{6(2 - \sqrt{3})}{5\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\text{Pe}}}{(1 + \beta)(2 + \delta)}\left(D_2 + \frac{3}{2}\right)^{1/2},$$

решение которого

$$(2.16) \quad D_2^{(1,2)} = -\frac{1+(3/2)\beta}{1+\beta} + \frac{1}{2} \left[\zeta \pm \left(\frac{2\zeta}{1+\beta} + \zeta^2 \right)^{1/2} \right],$$

$$\zeta = \left[\frac{0,18\text{Ma} \sqrt{\text{Pe}}}{(2+\delta)(1+\beta)} \right]^2.$$

Зависимость (2.16) D_2 от ζ схематически показана на рисунке. Верхняя ветвь соответствует $\theta_* d\sigma/dT < 0$, нижняя — $\theta_* d\sigma/dT > 0$. Видно, что при $\zeta > \zeta_*$ в случае $\theta_* d\sigma/dT < 0$ возникает сила тяги, а при $\theta_* d\sigma/dT > 0$ с увеличением ζ сила сопротивления увеличивается и стремится к силе Стокса ($D_2 = -3/2$), т. е. капля ведет себя как твердый шарик. При $\zeta = \zeta_*$ $D_2 = 0$ и сила, действующая на каплю со стороны окружающей жидкости $F = -4\pi\mu_1 a D_2 U_\infty$ [9], равна нулю; при этом капля совершает дрейф со скоростью U_* (см. п. 1, а также [7]).



Проанализируем теперь изменение формы капли. Используя выражение для Ma (п. 1), (2.15) удобно переписать в форме

$$(2.17) \quad \chi_2 = \text{Ma}_* I_2 \sqrt{\text{Pe} (D_2 + 3/2)} \Delta_*^{-1},$$

$$\Delta_* = 20(1+\beta)(3+2\delta) + I_0 \text{Ma}_* \sqrt{\text{Pe} (D_2 + 3/2)} (56 + 59\beta + 40\delta(1+\beta)),$$

$$\text{Ma}_* = L^{-1} \frac{\theta_* d\sigma}{\sigma dT}, \quad I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \int_{-1}^1 \frac{1-\mu}{\sqrt{2-\mu}} d\mu \approx 0,651,$$

$$I_2 = -\frac{5}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \int_{-1}^1 \frac{1-\mu}{\sqrt{2-\mu}} P_2(\mu) d\mu \approx 0,082.$$

Видно, что если $\sigma \rightarrow \infty$, то $\chi_2 \rightarrow 0$, т. е. капля остается сферической. Рассмотрим два предельных случая: $\text{Ma}_* \text{Pe}^{1/2} \ll 1$, $\text{Ma}_* \text{Pe}^{1/2} \gg 1$. В первом имеем

$$\chi_2 = \frac{I_2 \text{Ma}_* \text{Pe}^{1/2} (D_2 + 3/2)^{1/2}}{20(1+\beta)(3+2\delta)} = 4,1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Ma}_* \text{Pe}^{1/2} (D_2 + 3/2)^{1/2}}{(1+\beta)(3+2\delta)}.$$

Знак χ_2 совпадает со знаком Ma_* . Если $\text{Ma}_* < 0$ (сила, действующая на каплю, меньше силы Рыбчинского — Адамара, является силой тяги или равна нулю (дрейф с постоянной скоростью [7])), то $\chi_2 < 0$ и капля сжимается по направлению движения. Если $\text{Ma}_* > 0$ (сила, действующая на каплю, больше силы Рыбчинского — Адамара), то капля вытягивается по направлению движения. В состоянии дрейфа

$$\chi_2 = -4,11 \cdot 10^{-3} \frac{a\sigma (\theta_* \sigma^{-1} d\sigma/dT)^2}{\mu_1 \chi_1 L (1+\beta) (1+(3/2)\beta) (2+\delta) (3+2\delta)^2}$$

т. е. капля имеет форму слабо сплюснутого по направлению дрейфа эллипсоида. Это естественно, поскольку в состоянии дрейфа термокапиллярная составляющая касательных напряжений направлена в сторону дрейфа капли; температура в носовой части капли выше, чем на корме (аналогично термокапиллярному дрейфу в поле градиента температуры), а следовательно, лапласово давление в носовой части меньше, чем на корме, что приводит к уменьшению кривизны капли в передней ее части — сплющиванию поверхности.

Во втором случае

$$\chi_2 = \frac{I_2}{I_0} (56 + 59\beta + 40\delta(1+\beta))^{-1} = \frac{2,26 \cdot 10^{-3}}{1 + (59/56)\beta + (5/7)\delta(1+\beta)},$$

откуда вытекает, что капля всегда вытягивается по направлению движения независимо от знака Ma_* .

В промежуточном случае ($Ma_* Re^{1/2} \sim 1$) справедлива формула (2.17), однако если $Ma_* < 0$, то в знаменателе стоит разность двух положительных чисел, которая при определенных значениях параметров может стать равной нулю. В окрестности этих значений предположение о слабой деформации капли при любых We несправедливо.

Отметим, что при обычных для жидкостей и поверхностных реакций значениях параметров ($L \sim 10^2$, $\sigma \sim 10^1-10^2$ эрг/см², $d\sigma/dT \sim \sim 0,1$ эрг/(см²·К), $\theta_* \sim 1-100$ К) получаем $Ma_* \sim 10^{-3}-10^{-4}$, так что $Ma_* Re^{1/2} \ll 1$ в широком диапазоне изменения $Re^{1/2} \gg 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Young N. O., Goldstein J. S., Block M. J. The motion of bubbles in a vertical temperature gradient // J. Fluid Mech.— 1959.— V. 6, pt 3.
2. Harper J. F., Moore D. W., Pearson J. R. A. The effect of the variation of surface tension with temperature on the motion of bubbles and drops // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 27, pt 2.
3. Братухин Ю. К. Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1975.— № 5.
4. Антановский Л. К., Копбосынв Б. К. Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 2.
5. Balasubramaniam, An-Ti Chai. Thermocapillary migration of droplets: an exact solution for small Marangoni numbers // J. Colloid Interface Sci.— 1987.— V. 119, N 2.
6. Рязанцев Ю. С. О термокапиллярном движении реагирующей капли в химически активной среде // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 3.
7. Головин А. А., Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. О хемотермокапиллярном эффекте при движении капли в жидкости // ДАН СССР.— 1986.— Т. 290, № 1.
8. Taylor T. D., Acrivos A. On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number // J. Fluid Mech.— 1964.— V. 18, pt 3.
9. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976.
10. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком.— М.: Наука, 1985.

г. Москва

Поступила 22/II 1988 г.

УДК 532.526.011.6 : 532.526.5.011.7

В. Н. Бражко, Н. А. Ковалева, Л. А. Крылова,
Г. И. Майкапар

О НАГРЕВАНИИ ПОДВЕТРЕННОЙ СТОРОНЫ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ

Треугольное в плане крыло — один из основных элементов летательных аппаратов, в связи с чем проблемам его обтекания и аэродинамического нагрева уделяется все более пристальное внимание. В [1—7] показано, что на верхней поверхности крыла могут существовать области интенсивного теплообмена — так называемые пики теплового потока. Образование пиков связано с появлением на подветренной поверхности крыла отрывных вихревых течений.

Величины пиков и их положение зависят от чисел Маха M_∞ , Рейнольдса Re , угла атаки α и конфигурации крыла. При $M_\infty = 5$ и $Re_1 = 10^7$ 1/м (см., например, [3]) они достигают наибольшего значения при $\alpha \approx 5^\circ$ и максимально исследованном в эксперименте угле стреловидности острой передней кромки $\chi = 75^\circ$. При этом максимальные числа Стантона St_∞ в пиках в несколько раз превышают соответствующие значения, определенные для $\alpha = 0$. При $M_\infty = 10,3$, $Re_1 = 2,2 \cdot 10^6$ 1/м и $\alpha = 5^\circ$ пики St_∞ на подветренной поверхности крыла с $\chi = 80^\circ$ не наблюдаются [6]. Локальный максимум теплоотдачи при этом появляется в окрестности плоскости симметрии крыла при больших α .

Из экспериментальных исследований обтекания треугольных крыльев [5, 7, 8] видно, что на картину течения на верхней поверхности крыла большое влияние оказывают условия обтекания кромок, зависящие от α_n и M_n в нормальном к кромке сечении и от формы самой кромки. Численные расчеты по уравнениям Навье—Стокса обтекания под углом атаки тонкого треугольного крыла сверхзвуковым потоком [9]