5. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
6. **Ольшанский В. П.** Об особенностях напряженного состояния оболочек, нагруженных по линиям главной кривизны.— Проблемы прочности, 1978, № 3.
7. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
8. **Hamajima Ryokichi, Okumura Toshie.** Концентрация напряжений и анализ контакта между пластиной и цилиндрической оболочкой.— Добоку гаккай ромбун хококусю. Proc. Jap. Soc. Civ. Eng., 1978, N 279.

УДК 539.3

О ЗАДАЧЕ КОНТАКТА ДВУХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ИСКАЖЕННЫХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Ф. М. БОРОДИЧ

(*Москва*)

Полное решение задачи о контакте двух полупространств, искаженных предварительно действием сосредоточенных сил, направленных в разные стороны, известно и применяется в теории трещин (см., например, [1], где рассмотрен плоский вариант, так как пространственный вариант разбирается аналогично). В данной работе рассматривается задача о контакте двух полупространств, имеющих значительно более общее искажение: допускается, чтобы расстояние между искаженными полупространствами на бесконечности было положительно-однородной функцией (отрицательной степени однородности). Хотя эта задача и не допускает точного решения, в ней можно получить все качественные выводы, аналогичные выводам теории трещин. Эти выводы получаются из соображений подобия.

1. Контакт абсолютно жесткого бесконечного штампа с упругим полупространством. Рассмотрим бесконечные штампы, поверхность которых описывается функцией $x_3 = f(x_1, x_2)$. Предполагаем, что при достаточно больших x_1 и x_2, $x_1^2+x_2^2\geqslant\rho^2$, где ρ — некий радиус, функция $f(x_1, x_2)$ определяется положительной гладкой положительно-однородной функцией отрицательной степени β, т. е.

$$f(x_1, x_2) > 0 \quad \forall(x_1, x_2) \in R^2,\tag{1.1}$$

$$f(x_1, x_2) \in C^1(R^2\backslash\{0\}),$$

$$\forall\lambda>0,\quad f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^\beta f(x_1, x_2),\quad \beta<0\quad \forall(x_1, x_2)\colon\ \sqrt{x_1^2+x_2^2}\geqslant\rho.$$

Известно [2], что в упругом полупространстве $x_3 \leqslant 0$, на граничной плоскости которого равны нулю касательные напряжения σ_{i3} $(i = 1, 2)$, все напряжения и перемещения определяются одной гармонической функцией F, значения которой при $x_3 = 0$ связаны с u_3 и σ_{33} зависимостями

$$u_3 = 2(1-\nu)F(x_1, x_2, 0),\quad \sigma_{33} = 2\mu\partial F(x_1, x_2, 0)/\partial x_3,\tag{1.2}$$

где ν, μ — коэффициент Пуассона и модуль сдвига полупространства.

Пусть абсолютно жесткий штамп вдавливается поступательно без трения в упругое полупространство. Контактная задача формулируется следующим образом — при заданной форме штампа $f(x_1, x_2)$ и сдавливающем напряжении S необходимо найти: область G на границе полупространства, в точках которой происходит контакт между штампом и полупространством; константу α, представляющую собой упругое сближение тел; гармоническую функцию F, входящую в (1.2). Значения G, α, F должны удовлетворять следующим условиям:

$$c_1F(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2) - \alpha,\quad (x_1, x_2) \in G \cup \partial G,\tag{1.3}$$

$$\partial F(x_1, x_2, 0)/\partial x_3 = 0,\quad (x_1, x_2) \in R^2\backslash G,$$

$$c_2\partial F/\partial x_3 = S \text{ на } \infty \text{ при } x_3 = 0,$$

где $c_1 = 2(1-\nu)$; $c_2 = 2\mu$; ∂G — граница открытой области G.

Т е о р е м а. Пусть функция $f(x_1, x_2)$, определяющая поверхность штампа, является произведением функции $f_0(x_1, x_2)$ и параметра A, $A > 0$, $f = Af_0$, где f_0 — положительная гладкая положительно-однородная функция степени β $(\beta < 0)$.

Пусть гармоническая функция F_{11}, область G_{11} и константа α_{11} дают решение контактной задачи (1.3) при параметре $A = 1$ и напряжении $S = 1$, тогда для произвольного параметра A и напряжения S решение контактной задачи дается величинами F, α, G, определенными следующими соотношениями:

$$F(x_1, x_2, x_3) = A\gamma^{-\beta}F_{11}(\gamma x_1, \gamma x_2, \gamma x_3),\quad \alpha = A\gamma^{-\beta}\alpha_{11},\tag{1.4}$$

$$(x_1, x_2) \in G, \text{ если и только если } (\gamma x_1, \gamma x_2) \in G_{11},$$

где $\gamma = (S/A)^{1/(1-\beta)}$.

Доказательство. Из определения функции F следует, что она является гармонической. Учитывая (1.4), (1.3) и (1.1), получим

$$c_1F(x_1, x_2, 0) = c_1A\gamma^{-\beta}F_{11}(\gamma x_1, \gamma x_2, 0) = A\gamma^{-\beta}f_0(\gamma x_1, \gamma x_2) - A\gamma^{-\beta}\alpha_{11} = \\ = Af_0(x_1, x_2) - \alpha = f(x_1, x_2) - \alpha,$$

т. е. выполнено первое из условий (1.3).

Проверим выполнение второго и третьего из условий (1.3):

$$\left.\frac{\partial F(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3}\right|_{(x_1,x_2)\in R^2\setminus G} = A\gamma^{-\beta}\left.\frac{\partial F_{11}(\gamma x_1, \gamma x_2, 0)}{\partial(\gamma x_3)}\right|_{(x_1,x_2)\in R^2\setminus G}\gamma = \\ = A\gamma^{1-\beta}\left.\frac{\partial F_{11}(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3}\right|_{(x_1,x_2)\in R^2\setminus G_{11}} = 0.$$

Аналогично получаем

$$c_2\left.\frac{\partial F(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3}\right|_{(x_1,x_2)\in G} = A\gamma^{1-\beta}c_2\left.\frac{\partial F_{11}(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3}\right|_{(x_1,x_2)\in G_{11}} = A\gamma^{1-\beta} = S.$$

Следствие. Если решение контактной задачи (1.3) известно для каких-либо фиксированных значений параметра A_1 и нагрузки S_1, то по подобию оно известно при любых A и S для штампа указанной формы.

Из теоремы можно сделать следующие качественные выводы.

Выводы. При вдавливании без трения в упругое полупространство абсолютно жесткого штампа, форма которого $f(x_1, x_2)$ определяется функцией $f_0(x_1, x_2)$ и положительным параметром A, $f = Af_0$, где f_0 — положительная гладкая положительно-однородная функция степени β ($\beta < 0$), имеют место следующие утверждения.

1. Область $R^2\setminus G$, где отсутствует контакт, получается из области $R^2\setminus G_{11}$ посредством растяжения по всем направлениям с коэффициентом $\gamma^{-1} = A^{1/(1-\beta)}S^{1/(\beta-1)}$, т. е. размер a области $R^2\setminus G$ пропорционален величине (A/S) в степени $1/(1-\beta)$:

$$a \sim A^{1/(1-\beta)}S^{1/(\beta-1)} \tag{1.5}$$

(в качестве a можно взять расстояние между двумя наиболее удаленными друг от друга точками области).

2. Сближение штампа с полупространством пропорционально сдавливающему напряжению S в степени $\beta/(\beta-1)$ и параметру A в степени $1/(1-\beta)$:

$$\alpha \sim A^{1/(1-\beta)}S^{\beta/(\beta-1)}. \tag{1.6}$$

Действительно, из (1.4) видно, что $\partial G = \{(x_1, x_2): (\gamma x_1, \gamma x_2) \in \partial G_{11}\}$, откуда легко получить (1.5).

Соотношение (1.6) непосредственно вытекает из второй формулы системы (1.4).

Аналогичные выводы немедленно следуют для случая классической задачи о контакте выпуклого жесткого штампа с упругим полупространством. В формулировке соответствующей теоремы условие $\beta < 0$ надо заменить на условие $\beta > 1$, а бесконтактную область $R^2\setminus G$ на область контакта G [3].

2. Контакт без трения двух искаженных полупространств. Рассмотрим два бесконечных упругих тела. Будем отмечать индексом плюс величины, относящиеся к первому телу, индексом минус — величины, относящиеся ко второму телу. Пусть точки первого тела лежат выше плоскости $x_3 = 0$, а точки второго — ниже.

Пусть существует радиус ρ такой, что при $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geqslant \rho$ расстояние между телами $f(x_1, x_2)$ определяется положительной гладкой положительно-однородной функцией степени β ($\beta < 0$).

Начнем сдавливать эти тела давлением S, приложенным на бесконечности. Считаем, что каждое из тел можно заменить полупространством, тогда контактная задача сведется к отысканию гармонических функций F^+ и F^-, области G и константы α, удовлетворяющих условиям

$$2(1-\nu^+)F^+ + 2(1-\nu^-)F^- = f(x_1, x_2) - \alpha, \ (x_1, x_2) \in G \cup \partial G, \\ \partial F^{\pm}(x_1, x_2, 0)/\partial x_3 = 0, \ (x_1, x_2) \in R^2\setminus G, \\ 2\mu^{\pm}\partial F^{\pm}/\partial x_3 = S \text{ на } \infty \text{ при } x_3 = 0, \\ \mu^+\partial F^+(x_1, x_2, 0)/\partial x_3 = \mu^-\partial F^-(x_1, x_2, 0)/\partial x_3, \ (x_1, x_2) \in G. \tag{2.1}$$

Известно, что контактная задача (2.1) сводится к контактной задаче (1.3) с новыми константами c_1 и c_2, если функцию, задающую форму штампа, заменить функцией, задающей расстояние между поверхностями тел. Тогда в случае контакта без трения двух упругих тел, расстояние между поверхностями которых $f(x_1, x_2)$ определяется положительной гладкой положительно-однородной функцией отрицательной степени β, имеют силу теорема п. 1, следствие из нее и выводы.

В качестве примера рассмотрим задачу [1], в которой два упругих полупространства с абсолютно гладкими границами, соприкасающиеся по плоскости $0x_1x_2$, предварительно деформируются двумя сосредоточенными силами P, приложенными к каждому из полупространств в начале координат 0, и прижимаются друг к другу напряжением S, ортогональным плоскости $0x_1x_2$ на бесконечности. Требуется определить, каким степеням P и S пропорционален линейный размер a зазора, образующегося между полупространствами, при условии, что на границе полупространств полностью отсутствуют силы сцепления.

Из решения задачи Буссинеска [2] следует, что нормальные перемещения точки границы выражаются в виде

$$u_3^{\pm} = \frac{1-\nu^{\pm}}{2\pi\mu^{\pm}}\frac{P}{r}, \quad \text{где} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Отсюда следует, что до приложения напряжения S расстояние между границами тел $f(x_1, x_2)$ задавалось положительной гладкой положительно-однородной функцией степени минус единица

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{1-\nu^+}{2\pi\mu^+} + \frac{1-\nu^-}{2\pi\mu^-}\right)\frac{P}{r}.$$

Тогда справедливы условия теоремы. Из (1.5) получаем, что радиус зазора между полупространствами пропорционален корню квадратному из P/S: $a \sim P^{1/2}S^{-1/2}$.

Этот результат совпадает с результатом теории трещин, полученным при рассмотрении дискообразной трещины, в центре которой приложены разрывающие сосредоточенные силы, а на бесконечности действует сжимающее напряжение. Записывая выражение коэффициента интенсивности напряжений для такой трещины и приравнивая его нулю, получаем уравнение на a. Методика решения этой задачи по теории трещин описана в [1].

Автор благодарит В. Д. Клюшникова и И. Д. Грудева, заинтересовавших его этой тематикой, а также А. Г. Хованского за обсуждение работы.

Поступила 8 II 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976.
2. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
3. **Бородич Ф. М.** Подобие в задаче контакта упругих тел.— ПММ, 1983, т. 47, вып. 3.

УДК 539.375

СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТРЕЩИН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

В. Г. НОВИКОВ, Б. М. ТУЛИНОВ

(*Москва*)

Стационарное движение прямолинейной полубесконечной трещины в безграничном упругом теле рассматривалось в [1, 2]. Часто бывает, что в среде распространяется не одна трещина, а несколько. В связи с этим представляет интерес рассмотреть движение системы полубесконечных параллельных трещин. В данной работе ограничимся рассмотрением случая трещин продольного сдвига. Сходная в математическом отношении задача об установившемся движении трещины отрыва в полосе изучалась в [3, 4].

Рассмотрим движение системы полубесконечных параллельных трещин — разрезов продольного сдвига с постоянной скоростью. В движущейся вместе с трещинами системе координат xOy поверхности разрезов представляют собой систему параллельных полупрямых x, $y \in S$, где

$$S = \{x < 0,\ y = d(2n+1),\ n = 0, \pm 1, +2, \ldots\}.$$

Пусть скорость роста трещин V меньше скорости поперечных волн в среде c. Предполагается также, что движение трещин стационарно, т. е. в движущейся системе координат деформации и напряжения не зависят от времени. В этом случае уравнения теории упругости, описывающие задачу, имеют вид

$$\beta^2\partial^2 w/\partial x^2 + \partial^2 w/\partial y^2 = 0, \quad \tau = \mu\partial w/\partial y, \tag{1}$$

где $\beta^2 = 1 - V^2/c^2$; w — смещение вдоль оси z; $\tau = \sigma_{yz}$ — компонента тензора напряжений; μ — модуль сдвига. Пусть к берегам всех трещин приложена одна и та же однородная нагрузка:

$$\tau(x, y) = -\tau_0, \quad x, y \in S.$$

Тогда деформации и напряжения являются периодическими функциями координаты y с периодом $2d$ и задача сводится к построению решения уравнений (1) в области