УДК 519.621.2

О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями

К.Р. Айда-заде[1,2], В.М. Абдуллаев[2]

[1]Азербайджанская государственная нефтяная академия, пр. Азадлыг, 20, Баку, Азербайджан, AZ1010

[2]Институт кибернетики НАН Азербайджана, ул. Б. Вахабзаде, 9, Баку, Азербайджан, AZ1141
E-mails: kamil_aydazade@rambler.ru (Айда-заде К.Р.), vaqif_ab@rambler.ru (Абдуллаев В.М.)

Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2014. — Т. 17, № 1. — С. 1–16.

Предложен численный метод решения систем линейных неавтономных обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями. Метод основан на операции свертывания интегральных условий в локальные, что позволяет свести решение исходной задачи к решению задачи Коши относительно систем обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных алгебраических уравнений. Были проведены многочисленные численные эксперименты на тестовых задачах с применением предложенных в данной работе формул и схем численного решения. Результаты экспериментов показали достаточно высокую эффективность описанного подхода.

Ключевые слова: *нагруженные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, неразделенные условия, интегральные условия, нелокальные многоточечные условия.*

Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the numerical solution to loaded systems of ordinary differential equations with non-separated multipoint and integral conditions // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17, № 1. — P. 1–16.

We propose a numerical method of solving systems of linear non-autonomous ordinary loaded differential equations with non-separated multipoint and integral conditions. This method is based on the operation of convolution of integral conditions to local conditions. This approach allows reducing the solution to the original problem to solving the Cauchy problem with respect to a system of ordinary differential equations and to linear algebraic equations. Numerous computational experiments on several test problems with application of the formulas and schemes of the numerical solution have been carried out. The results of the experiments have shown a sufficiently high efficiency of the approach described.

Key words: *ordinary loaded differential equations system, non-separated conditions, integral conditions, non-local multipoint conditions, sequential shift operation.*

1. Введение

В последние годы внимание исследователей привлекли нелокальные задачи, описываемые нагруженными дифференциальными уравнениями с нелокально заданными условиями. К этим исследованиям, началом которых можно считать работы [1–5], возвращались в 50-е годы прошлого века [6–10] и в XXI веке в работах [11, 12]. Последний рост внимания к этим задачам связан с развитием вычислительной и измерительной техники, которое позволило усложнить и перейти к более адекватным математическим моделям рассматриваемых процессов.

Нагруженные дифференциальные уравнения описывают процессы с последействием, в которых состояние процесса в какой-либо точке и в какой-либо момент может оказывать влияние на весь процесс в целом. Такими уравнениями описываются процессы в биологии, экологии, подземной гидрогазодинамики. Нелокальность условий обусловлена практической невозможностью производить замеры или воздействовать на процесс в отдельно взятой точке распределенного в пространстве объекта или мгновенно во времени [10–12].

Рассматриваемой в данной статье задаче посвящено достаточно много работ [13–16], но в них мало [17] или практически не уделено никакого внимания численным аспектам. В данной работе для численного решения линейных и нелинейных систем нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными точечными и интегральными условиями развит ранее предложенный в работах [18–22] подход, приведены результаты численных экспериментов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим неавтономную систему точечно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{s=1}^{l_3} B^s(t)x(\breve{t}_s) + C(t), \quad t \in (t_0, T], \tag{2.1}$$

где траектория $x(t) \in E^n$ — искомое решение; $A(t)$, $B^s(t)$, $s = 1, \ldots, l_3$, — непрерывные матричные функции размерности $n \times n$, $C(t)$ — n-мерная вектор-функция, $\bar{t}_s \in [t_0, T]$, $s = 1, \ldots, l_3$, — моменты времени нагружения заданы.

Пусть заданы следующие неразделенные условия точечного и интегрального характера:

$$\sum_{i=1}^{l_1} \int\limits_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_i+\Delta_i} \bar{D}_i(\tau)x(\tau)\,d\tau + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j x(\tilde{t}_j) + \sum_{s=1}^{l_3} \breve{D}_s x(\breve{t}_s) = L_0, \tag{2.2}$$

где $\bar{D}_i(\tau)$, $\tilde{D}_j$, $\breve{D}_s$ — матрицы размерности $n \times n$; L_0 — n-мерный вектор; $\bar{t}_i$, $\tilde{t}_j$ — моменты времени из $[t_0, T]$ и $\breve{t}_s \in [t_0, T]$, $s = 1, \ldots, l_3$, — моменты времени нагружения; l_1, l_2, l_3 заданы.

В практических задачах возможно, что заданные условия имеют смешанный характер, но при этом важно, что их общее количество было равно n при их линейной независимости. Отметим, что конструктивных условий проверки линейной зависимости или независимости условий (2.2) априорно по значениям параметров не имеется или они очень сложны с вычислительной точки зрения. На практике это выясняется, как правило, в процессе численного решения самой задачи.

В данной работе предлагается численный метод решения задачи (2.1), (2.2), сводящийся к решению специально построенных вспомогательных задач с начальными условиями Коши.

Отметим, что каждое из n условий из (2.2) может быть записано отдельно, что нами также будет использовано,

$$\sum_{i=1}^{l_1} \int\limits_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_i+\Delta_i} \bar{D}_{\nu i}(\tau)x(\tau)\,d\tau + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_{\nu j}x(\tilde{t}_j) + \sum_{s=1}^{l_3} \breve{D}_{\nu s}x(\breve{t}_s) = L_{0\nu}, \quad \nu = 1,\ldots,n, \tag{2.3}$$

где $\bar{D}_{\nu i}$, $\tilde{D}_{\nu j}$, $\breve{D}_{\nu s}$ — ν-е n-мерные строки соответствующих матриц $\bar{D}_i$, $\tilde{D}_j$, $\breve{D}_s$; $L_{0\nu}$ — ν-я компонента вектора L_0.

Для конкретности, не умаляя общности, сделаем предположение, что, во-первых,

$$\min\left(\bar{t}_1, \tilde{t}_1\right) = t_0, \tag{2.4}$$

$$\max\left(\bar{t}_{l_1} + \Delta_{l_1}, \tilde{t}_{l_2}\right) = T, \tag{2.5}$$

а во-вторых, для всех $i = 1,\ldots,l_1$, $j = 1,\ldots,l_2$, $s = 1,\ldots,l_3$ выполняется вполне естественное условие

$$\tilde{t}_j, \breve{t}_s \bar{\in} \left[\bar{t}_i, \bar{t}_i + \Delta_i\right]. \tag{2.6}$$

Условия (2.3) называют неразделенными многоточечными и интегральными условиями. Вопросы существования единственности решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с условиями (2.3) исследовались многими авторами, начиная с работ Валле–Пуссена, Тамаркина, и получение соответствующих конструктивных условий на данные в задаче даже в этом случае представляет большую сложность [1, 3]. В работе [16] получены оценки решений систем нагруженных дифференциальных уравнений с многоточечными и интегральными условиями.

Данная работа посвящена численному решению задачи (2.1), (2.2), поэтому ниже будем предполагать выполненными условия существования и единственности решения задачи.

Отметим, что основным источником систем вида (2.1) является применение метода прямых к точечно нагруженным или к интегро-дифференциальным уравнениям с частными производными параболического и гиперболического типов, описывающих процессы экологии, подземной гидрогазодинамики, динамики движения почвенной влаги и др., исследования которых было положено в основном в работах [10, 11, 13].

3. Численное решение задачи

Одним из подходов к численному решению задачи (2.1), (2.2) могло бы служить ее сведение к задаче с точечными нераздельными условиями с помощью введения новых переменных $x^i(t) \in R^n$, $i = 1,\ldots,l_1$, $x^1(t) = x(t)$, являющихся решением задач Коши относительно дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^{i+1}(t) = \bar{D}(t)x(t), \quad t \in \left(\bar{t}_i, \bar{t}_i + \Delta_i\right], \tag{3.1}$$

$$x^{i+1}(\bar{t}_i) = 0, \quad i = 1,\ldots,l_1. \tag{3.2}$$

В этом случае условия (2.2) примут вид:

$$\sum_{i=1}^{l_1} x^{i+1}\left(\bar{t}_i + \Delta_i\right) + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j x(\tilde{t}_j) + \sum_{s=1}^{l_3} \breve{D}_s x(\breve{t}_s) = L_0. \tag{3.3}$$

В результате получим нагруженную систему $(l_1 + 1)\,n$ дифференциальных уравнений (2.1), (3.1) всего с $l_1 n$ начальными и n неразделенными точечными условиями (3.2), (3.3), решение которой возможно эффективными методами сдвига условий [18, 19]. Очевидным недостатком является необходимость увеличения порядка системы, что существенно усложняет проведение операций прогонки и сдвига функциональных матриц соответствующего порядка [23, 24].

Ниже будет предложена и исследована одна схема метода сведения условий (2.2) к условиям Коши, не требующая увеличения размерности системы дифференциальных уравнений. Для этого сначала преобразуем условия (2.2).

Введем следующую матричную функцию размерности $(n \times n)$:

$$D(t) = \sum_{i=1}^{l_1} \bar{\bar{D}}_i(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{3.4}$$

$$\bar{\bar{D}}_i(t) = \begin{cases} \overline{D}_i(t), & t \in [\bar{t}_i, \bar{t}_i + \Delta_i], \\ 0, & t \notin [\bar{t}_i, \bar{t}_i + \Delta_i]. \end{cases}$$

Из (3.4) следует, что

$$D(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \notin \bigcup_{i=1}^{l_1} [\bar{t}_i, \bar{t}_i + \Delta_i].$$

Условия (2.2), учитывая (2.4), (2.5), можно записать в эквивалентном виде:

$$\int_{t_0}^{T} D(\tau) x(\tau)\, d\tau + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j x(\tilde{t}_j) + \sum_{s=1}^{l_3} \breve{D}_s x(\breve{t}_s) = L_0. \tag{3.5}$$

Каждое из n условий в (3.5) в отдельности можно записать в форме:

$$\int_{t_0}^{T} D_\nu(\tau) x(\tau)\, d\tau + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_{\nu j} x(\tilde{t}_j) + \sum_{s=1}^{l_3} \breve{D}_{\nu s} x(\breve{t}_s) = L_{0\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{3.6}$$

где $D_\nu(\tau)$ — ν-я n-мерная строка матричной функции $D(\tau)$.

Теперь с целью замены интегральных условий (3.5) неразделенными многоточечными условиями используем аналог операции переноса (прогонки) условий, которую назовем операцией свертывания.

Введем n-мерные вектор-функции:

$$\overline{L}(t) = \int_{t_0}^{t} D(\tau) x(\tau)\, d\tau, \qquad \underline{L}(t) = \int_{t}^{T} D(\tau) x(\tau)\, d\tau, \tag{3.7}$$

для которых имеет место

$$\begin{aligned} &\overline{L}(t_0) = 0_n, \qquad \bar{L}(T) = L_0 - \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j x(\tilde{t}_j) - \sum_{s=1}^{l_3} \breve{D}_s x(\breve{t}_s), \\ &\underline{L}(t_0) = L_0 - \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j x(\tilde{t}_j) - \sum_{s=1}^{l_3} \breve{D}_s\, x(\breve{t}_s), \qquad \underline{L}(T) = 0_n. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Через 0_n обозначен n-мерный вектор с нулевыми элементами.

Определение 1. Функцию $\bar{\gamma}_\nu(t)$ и вектор-функции $\bar{\alpha}_\nu(t)$, $\bar{\beta}^s_\nu(t)$, $s=1,2,\ldots,l_3$, назовем сворачивающими слева направо ν-е интегральное условие в (2.3) относительно $x(t)$ — решения нагруженной системы дифференциальных уравнений (2.1), если выполнены следующие условия:

$$\bar{\alpha}_\nu(t_0)=0_n, \qquad \bar{\beta}^s_\nu(t_0)=0_n, \quad s=1,2,\ldots,l_3, \qquad \bar{\gamma}_\nu(t_0)=0, \tag{3.9}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} D_\nu(\tau)x(\tau)\,d\tau=\bar{\alpha}^*_\nu(t)x(t)+\sum_{s=1}^{l_3}\bar{\beta}^{*s}_\nu(t)x(\breve{t}_s)+\bar{\gamma}_\nu(t), \quad t\in[t_0,T]\,. \tag{3.10}$$

Из (3.10), учитывая (3.7), (3.8), следует

$$\bar{\alpha}^*_\nu(T)x(T)+\sum_{j=1}^{l_2}\tilde{D}_{\nu j}x(\tilde{t}_j)+\sum_{s=1}^{l_3}(\bar{\beta}^{*s}_\nu(T)+\breve{D}_{\nu s})\,x(\breve{t}_s)+\bar{\gamma}_\nu(T)=L_{0\nu}. \tag{3.11}$$

Из определения 1 и дальнейшего описания самой процедуры сворачивания несложно понять, что сворачивание можно осуществлять как для каждого условия (2.3) по отдельности, так и по всем условиям (2.2) одновременно или по группам условий, используя в этом случае вместо вектор-функций $\bar{\alpha}_\nu(t)$, $\bar{\beta}^s_\nu(t)$, $s=1,2,\ldots,l_3$, $\bar{\gamma}_\nu(t)$ — матричные функции $\overline{\alpha}(t)$, $\bar{\beta}^s(t)$, $s=1,2,\ldots,l_3$, $\bar{\gamma}(t)$.

Аналогично сказанному, можно ввести понятие сворачивания интегральных условий влево, что может при определенной специфике условий (2.3) оказаться эффективней сворачивания условий вправо.

Определение 2. Функцию $\underline{\gamma}_\nu(t)$ и вектор-функции $\underline{\alpha}_{\nu(t)}$, $\underline{\beta}^s_\nu(t)$, $s=1,2,\ldots,l_3$, назовем сворачивающими справа налево ν-е интегральное условие в (2.3) относительно $x(t)$ — решения нагруженной системы дифференциальных уравнений (2.1), если выполнены следующие условия:

$$\underline{\alpha}_\nu(T)=0_n, \qquad \underline{\beta}^s_\nu(T)=0_n, \quad s=1,2,\ldots,l_3, \qquad \underline{\gamma}_\nu(T)=0, \tag{3.12}$$

$$\int\limits_{t}^{T} D_\nu(\tau)x(\tau)\,d\tau=\underline{\alpha}^*_\nu(t)x(t)+\sum_{s=1}^{l_3}\underline{\beta}^{*s}_\nu(t)x(\breve{t}_s)+\underline{\gamma}(t), \quad t\in[t_0,T]\,. \tag{3.13}$$

Из (3.13), учитывая (3.7), (3.8), следует

$$\underline{\alpha}^*_\nu(t_0)x(t_0)+\sum_{j=1}^{l_2}\tilde{D}_{\nu j}x(\tilde{t}_j)+\sum_{s=1}^{l_3}(\underline{\beta}^{*s}_\nu(t_0)+\breve{D}_{\nu s})\,x(\breve{t}_s)+\underline{\gamma}_\nu(t_0)=L_{0\nu}. \tag{3.14}$$

Функции, осуществляющие сворачивание интегральных условий влево или вправо, т. е. удовлетворяющие соотношениям (3.9), (3.10) или (3.12), (3.13), в общем случае, не единственны. Возможные варианты выбора таких функцией представлены в следующих леммах.

Лемма 1. *Если функции $\bar{\alpha}_\nu(t)$, $\bar{\beta}^s_\nu(t)$, $s=1,2,\ldots,l_3$, $\bar{\gamma}_\nu(t)$ являются решением следующих задач Коши:*

$$\dot{\bar{\alpha}}_\nu(t)=-A^*(t)\bar{\alpha}_\nu(t)+D^*_\nu(t), \qquad \bar{\alpha}_\nu(t_0)=0_n, \tag{3.15}$$

$$\dot{\bar{\beta}}_\nu^s(t) = -B^{*s}(t)\bar{\alpha}_\nu(t), \qquad \bar{\beta}_\nu^s(t_0) = 0_n, \quad s = 1, 2, \ldots, l_3, \tag{3.16}$$

$$\dot{\bar{\gamma}}_\nu(t) = -C^*(t)\bar{\alpha}_\nu(t), \qquad \bar{\gamma}_\nu(t_0) = 0, \tag{3.17}$$

тогда эти функции являются сворачивающими слева направо интегральные условия (3.5) *в точечные условия* (3.11).

Доказательство. Предположим наличие зависимости

$$\overline{L}_\nu(t) = \bar{\alpha}_\nu^*(t)x(t) + \sum_{s=1}^{l_3} \bar{\beta}_\nu^{*s}(t)x(\breve{t}_s) + \bar{\gamma}_\nu(t), \quad t \in [t_0, T]\,. \tag{3.18}$$

От пока произвольных n-мерных вектор-функций $\bar{\alpha}_\nu(t)$, $\bar{\beta}_\nu^s(t)$, $s = 1, 2, \ldots, l_3$, и скалярной функции $\bar{\gamma}_\nu(t)$ потребуем выполнения условий (3.9).

Дифференцируя (3.18) и учитывая (2.1), (3.7), будем иметь

$$\left[\dot{\bar{\alpha}}_\nu^*(t) + \bar{\alpha}_\nu^*(t)A(t) - D_\nu(t)\right]x(t) + \sum_{s=1}^{l_3}\left[\dot{\bar{\beta}}_\nu^{*s}(t) + \bar{\alpha}_\nu^*(t)B^s(t)\right]x(\breve{t}_s) + \left[\dot{\bar{\gamma}}_\nu(t) + \bar{\alpha}_\nu^*(t)C(t)\right] = 0. \tag{3.19}$$

Учитывая произвольность функций $\bar{\alpha}_\nu(t)$, $\bar{\beta}_\nu^s(t)$, $s = 1, 2, \ldots, l_3$, $\bar{\gamma}_\nu(t)$, а также то, что (3.7) должно выполняться для всех $x(t)$ — решений системы (2.1), то необходимо, чтобы каждое из выражений в двух квадратных скобках (3.19) обращалось в ноль, т. е. удовлетворялись условия (3.15)–(3.17) леммы. □

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Если функции* $\underline{\alpha}_\nu(t)$, $\underline{\beta}_\nu^s(t)$, $s = 1, 2, \ldots, l_3$, $\underline{\gamma}_\nu(t)$ *являются решением следующих задач Коши*:

$$\dot{\underline{\alpha}}_\nu(t) = -A^*(t)\underline{\alpha}_\nu(t) - D_\nu^*(t), \qquad \underline{\alpha}_\nu(T) = 0_n, \tag{3.20}$$

$$\dot{\underline{\beta}}_\nu^s(t) = -B^{*s}(t)\underline{\alpha}_\nu(t), \qquad \underline{\beta}_\nu^s(T) = 0_n, \quad s = 1, 2, \ldots, l_3, \tag{3.21}$$

$$\dot{\underline{\gamma}}(t) = -C^*(t)\underline{\alpha}_\nu(t), \qquad \underline{\gamma}_\nu(T) = 0, \tag{3.22}$$

то эти функции сворачивают справа налево интегральные условия (3.5) *в точечные условия* (3.14).

Таким образом, для решения задачи (2.1), (2.2) надо, решив задачу Коши (3.15)–(3.17) или (3.20)–(3.22), получить соответственно систему (3.11) или (3.14) n-го порядка, в которой участвуют нагруженные значения $x(\breve{t}_s)$, $s = 1, 2, \ldots, l_3$, и $x(\tilde{t}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, l_2$, а также $x(T)$ или $x(t_0)$ (в зависимости от направления сворачивания). После этого, используя схему [19], эти условия сдвигаются в обратном направлении от одной точки нагружения до другой. В результате получим систему алгебраических уравнений $(l_3+1)n$-го порядка. Решая эту систему, получим значения $x(T)$ (или $x(t_0)$) и $x(\breve{t}_s)$, $s = 1, 2, \ldots, l_3$, после чего решением задачи Коши определяется решение искомой задачи (2.1), (2.2).

Выбор схемы сворачивания условия (2.2) справа налево или наоборот зависит от свойств матрицы $A(t)$, а именно от ее собственных значений. Если они все положительны, то устойчива система (3.15)–(3.17), если же все собственные значения $A(t)$ отрицательны, то устойчива система (3.20)–(3.22). Если же часть собственных значений матрицы $A(t)$ положительна, часть отрицательна, причем по модулю они принимают большие значения, то обе системы имеют быстрорастущие решения, а следовательно, неустойчивы, и их численное решение может приводить к большим погрешностям. В этом случае рекомендуется воспользоваться предлагаемыми в следующей лемме сворачивающими функциями, имеющими линейный рост во времени.

Лемма 3. *Если n-мерные вектор-функции $\bar{\alpha}_\nu(t)$, $\bar{\beta}^s_\nu(t)$, $s = 1, 2, \dots, l_3$, и скалярные функции $\bar{\gamma}_\nu(t)$, $m(t)$ являются решением следующих нелинейных задач Коши:*

$$\dot{\bar{\alpha}}_\nu(t) = S(t)\bar{\alpha}_\nu(t) - A^*(t)\bar{\alpha}_\nu(t) + m(t)D^*_\nu(t), \qquad \bar{\alpha}_\nu(t_0) = 0_n, \tag{3.23}$$

$$\dot{\bar{\beta}}^s_\nu(t) = S(t)\bar{\beta}^s_\nu - B^{*s}(t)\bar{\alpha}_\nu(t), \qquad \bar{\beta}^s_\nu(t_0) = 0_n, \quad s = 1, 2, \dots, l_3, \tag{3.24}$$

$$\dot{\bar{\gamma}}_\nu(t) = S(t)\bar{\gamma}_\nu(t) - C^*(t)\bar{\alpha}_\nu(t), \qquad \bar{\gamma}_\nu(t_0) = 0, \tag{3.25}$$

$$\dot{m}(t) = S(t)m(t), \qquad m(t_0) = 1, \tag{3.26}$$

$$S(t) = \frac{\frac{1}{2(T-t_0)} + \bar{\alpha}^*_\nu(t)A(t)\bar{\alpha}_\nu(t) - m(t)D_\nu(t)\bar{\alpha}_\nu(t)}{\bar{\alpha}^*_\nu(t)\bar{\alpha}_\nu(t) + \sum\limits_{s=1}^{l_3}\bar{\beta}^{*s}_\nu(t)\beta^s_\nu(t) + (\bar{\gamma}_\nu(t))^2} - \frac{\bar{\alpha}^*_\nu(t)\sum\limits_{s=1}^{l_3}B^s(t)\bar{\beta}^s_\nu(t) - \bar{\gamma}_\nu(t)\bar{\alpha}^*_\nu(t)C(t)}{\bar{\alpha}^*_\nu(t)\bar{\alpha}_\nu(t) + \sum\limits_{s=1}^{l_3}\bar{\beta}^{*s}_\nu(t)\beta^s_\nu(t) + (\bar{\gamma}_\nu(t))^2}, \tag{3.27}$$

тогда функции $\bar{\alpha}_\nu(t)$, $\bar{\beta}^s_\nu(t)$, $s = 1, 2, \dots, l_3$, $\bar{\gamma}_\nu(t)$ являются сворачивающими ν-е интегральное условие (3.6) *слева направо, причем имеет место*

$$\bar{\alpha}^*_\nu(t)(t)\,\bar{\alpha}_\nu(t) + \sum_{s=1}^{l_3}\bar{\beta}^{*s}_\nu(t)\bar{\beta}^s_\nu(t) + (\bar{\gamma}_\nu(t))^2 = (t-t_0)/(T-t_0), \quad t \in [t_0, T]. \tag{3.28}$$

Доказательство. Умножая обе части (3.18) на пока произвольную скалярную функцию $m(t)$ такую, что

$$m(t_0) = 1, \tag{3.29}$$

получим

$$m(t)\overline{L}_\nu(t) = m(t)\bar{\alpha}^*_\nu(t)x(t) + \sum_{s=1}^{l_3} m(t)\bar{\beta}^{*s}_\nu(t)x(\breve{t}_s) + m(t)\bar{\gamma}_\nu(t), \quad t \in [t_0, T]\,. \tag{3.30}$$

Введем обозначения:

$$g(t) = m(t)\bar{\alpha}_\nu(t), \qquad q^s(t) = m(t)\beta^s_\nu(t), \quad s = 1, 2 \dots, l_3, \qquad r(t) = m\,(t)\,\bar{\gamma}_\nu(t). \tag{3.31}$$

Тогда (3.30) примет вид

$$m(t)\overline{L}_\nu(t) = g^*(t)x(t) + \sum_{s=1}^{l_3} q^{*s}(t)x(\breve{t}_s) + r(t),$$

причем из (3.29), (3.31) следует, что

$$g(t_0) = 0_n, \qquad q^s(t_0) = 0_n, \quad s = 1, 2, \ldots, l_3, \qquad r(t_0) = 0. \tag{3.32}$$

Таким образом, функции $g(t)$, $q^s(t)$, $s = 1, 2, \ldots, l_3$, $r(t)$ осуществляют сворачивание ν-го условия и их можно принять соответственно за $\bar{\alpha}_\nu(t)$, $\bar{\beta}^s_\nu(t)$, $s = 1, 2, \ldots, l_3$, $\bar{\gamma}_\nu(t)$.

От функции $m(t)$ потребуем обеспечения следующего условия линейного роста суммы квадратов сворачивающих функций:

$$g^*(t)g(t) + \sum_{s=1}^{l_3} q^{*s}(t)q^s(t) + r^2(t) = (t - t_0)/(T - t_0). \tag{3.33}$$

Продифференцировав (3.33), (3.31) и учтя (3.15)–(3.17), получим:

$$\dot{g}^*(t)g(t) + g^*(t)\dot{g}(t) + \sum_{s=1}^{l_3} [\dot{q}^{s*}(t)q^s(t) + q^{s*}(t)\dot{q}^s(t)] + 2r(t)\dot{r}(t) = 1/(T - t_0), \tag{3.34}$$

$$\dot{g}(t) = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}g(t) - A^*(t)g(t) + m(t)D^*_\nu(t), \qquad \dot{r} = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}r(t) - C^*(t)g(t), \tag{3.35}$$

$$\begin{gathered}
\dot{q}^s = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}q^s(t) - B^{s*}(t)g(t), \quad s = 1, 2, \ldots, l_3, \\
\dot{g}^*(t) = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}g^*(t) - g^*(t)A(t) + m(t)D(t), \\
\dot{q}^{s*} = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}q^{s*}(t) - g^*(t)B^s(t), \quad s = 1, 2, \ldots, l_3.
\end{gathered} \tag{3.36}$$

После несложных преобразований и группировки имеем

$$\left[\frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\left(g^*(t)g(t) + \sum_{s=1}^{l_3} q^{*s}(t)q^s(t) + r^2(t)\right) - A^*(t)g(t) + m(t)D^*_\nu(t) - \right.$$
$$\left. g^*(t)\sum_{s=1}^{l_3} B^{s*}(t)q^s(t) - r(t)g^*(t)C(t)\right] = \frac{1}{2(T - t_0)}.$$

Пользуясь произвольностью функции $m(t)$, примем

$$\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} = S(t), \tag{3.37}$$

где

$$S(t) = \frac{\frac{1}{2(T-t_0)} + g^*(t)A(t)g(t) - m(t)D_\nu(t)g(t) - g^*(t)\sum\limits_{s=1}^{l_3} B^s(t)q^s(t) + r(t)g^*(t)C(t)}{g^*(t)g(t) + \sum\limits_{s=1}^{l_3} q^{s*}(t)q^s(t) + r^2(t)}.$$

Подставляя (3.37) в (3.35), (3.36), учитывая (3.31), получим утверждение леммы. □

Несложно привести формулы, аналогичные (3.23)–(3.26), осуществляющие как сворачивание ν-го условия влево, так и матричное сворачивание всех условий одновременно.

4. Нелинейный случай

Приведенная выше схема численного решения линейной задачи (2.1), (2.2), используя метод линеаризации, может быть применена и к нелинейным задачам вида:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(\breve{t}), t), \quad t \in (t_0, T], \tag{4.1}$$

$$\sum_{i=1}^{l_1} \int\limits_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_i+\Delta_i} h_i(x,\tau)\, d\tau + \sum_{j=1}^{l_2} \varphi_j(x(\tilde{t})) + \sum_{s=1}^{l_3} \psi_s(x(\breve{t})) = L_0, \tag{4.2}$$

где n-мерные вектор-функции $f(x(t), x(\breve{t}), t)$ непрерывно-дифференцируемы по x, непрерывны по t; $h_i(x,\tau)$, $\varphi_j(x(\tilde{t}))$, $\psi_s(x(\breve{t}))$, $i = 1,\ldots,l_1$, $j = 1,\ldots,l_2$, $s = 1,\ldots,l_3$, непрерывно-дифференцируемы по своим аргументам; $\tilde{t} = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \ldots, \tilde{t}_{l_2})$, $\breve{t} = (\breve{t}_1, \breve{t}_2, \ldots, \breve{t}_{l_3})$, $\tilde{t}_j$, $\breve{t}_s \in [t_0, T]$, $x(\tilde{t}) = (x(\tilde{t}_1), x(\tilde{t}_2), \ldots, x(\tilde{t}_{l_2}))$, $x(\breve{t}) = (x(\breve{t}_1), x(\breve{t}_2), \ldots, x(\breve{t}_{l_3}))$.

Для решения задачи (4.1), (4.2) предлагается, пользуясь последовательной линеаризацией, построить итерационный процесс для получения последовательности $\{x^{(k)}(t)\}$, где $x^{(k)}(t)$ — решение линеаризованной задачи (4.1), (4.2) на k-й итерации.

Итак, пусть при $k = 0$, $x^1(t) = x^0(t) + \delta x(t)$, где $x^0(t) \in R^n$ — произвольно заданная вектор-функция (произвольное начальное приближение). Тогда с точностью до $O(\|\delta x(t)\|)$ имеем

$$\dot{x}^{(k+1)}(t) = A^{(k)}(t) x^{(k+1)}(t) + \sum_{s=1}^{l_3} B^{(k)s}(t) x^{(k+1)}(\breve{t}_s) + C^{(k)}(t), \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{l_1} \int\limits_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_i+\Delta_i} \bar{D}_i^{(k)}(\tau) x^{(k+1)}(\tau)\, d\tau + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j^{(k)} x^{(k+1)}(\tilde{t}_j) + \sum_{s=1}^{l_3} \breve{D}_s^{(k)} x^{(k+1)}(\breve{t}_s) = L_0^{(k)}. \tag{4.4}$$

Отметим, что функция $x^0(t)$ не обязана удовлетворять (4.1) или (4.2). В (4.3), (4.4) использованы обозначения:

$$A^{(k)}(t) = \frac{\partial f(x^{(k)}(t), x(\breve{t}), t)}{\partial x(t)}, \qquad B^{(k)s}(t) = \frac{\partial f(x^{(k)}(t), x(\breve{t}), t)}{\partial x(\breve{t}_s)}, \quad s = 1,\ldots,l_3,$$

$$C^{(k)}(t) = f(x^{(k)}(t), x(\breve{t}), t) - A^{(k)}(t) x^{(k)}(t) - \sum_{s=1}^{l_3} B^{(k)s}(t) x^{(k)}(\breve{t}_s),$$

$$\bar{D}_i^{(k)} = \frac{\partial h_i(x^{(k)}(\tau), \tau)}{\partial x(\bar{t}_i)}, \quad i = 1,\ldots,l_1, \qquad \tilde{D}_j^{(k)} = \frac{\partial \varphi_j(x^{(k)}(\tilde{t}))}{\partial x(\tilde{t}_j)}, \quad j = 1,\ldots,l_2,$$

$$\breve{D}_s^{(k)} = \frac{\partial \psi_s(x^{(k)}(\breve{t}))}{\partial x(\breve{t}_s)}, \quad s = 1,\ldots,l_3,$$

$$L_0^{(k)} = L_0 - \sum_{i=1}^{l_1} \int\limits_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_i+\Delta_i} \left[h_i(x^{(k)}(\tau), \tau) - \bar{D}_i^{(k)} x^{(k)}(\tau) \right] d\tau -$$

$$\left[\varphi_j(x^{(k)}(\tilde{t})) - \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j^{(k)} x^{(k)}(\tilde{t}_j) \right] - \left[\psi_s(x^{(k)}(\breve{t})) - \sum_{s=1}^{l_3} \breve{D} s^{(k)} x^{(k)}(\breve{t} s) \right].$$

Задача (4.3), (4.4) совпадает с (2.1), (2.2) и к ее решению возможно применение вышеизложенной численной схемы. В результате решения задачи (4.3), (4.4) получим вектор-функцию $x^1(t) \in R^n$.

Далее последовательная линеаризация для $k = 1, 2, \ldots$ и решение (4.3), (4.4) ведется до тех пор, пока не выполнится условие

$$\|x^{(k+1)}(t) - x^{(k)}(t)\| \leq \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — величина, определяемая необходимой точностью решения задачи (4.1), (4.2), $\| \bullet \|$ — какая-либо норма, в частности, из $L_2[0, T]$.

5. Нагруженные дифференциальные уравнения с частными производными

Предлагаемый в работе подход, используя метод прямых [25], можно распространить на случай нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными при нелокальных условиях.

В частности, рассмотрим следующую задачу относительно одномерного нагруженного уравнения параболического типа:

$$\begin{gathered} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + \sum_{s=1}^{l_3} B^s(x,t) u(\breve{x}_s, t) + f(x,t), \\ (x,t) \in \Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T\}, \end{gathered} \tag{5.1}$$

при начальном условии

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \leq x \leq l, \tag{5.2}$$

и нелокальных точечных и интегральных неразделенных условиях:

$$\sum_{i=1}^{l_1} \int\limits_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_i + \Delta_i} \bar{D}_i(x,t) u(x,t)\, dx + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde{D}_j(t) u(\tilde{x}_j, t) + \sum_{s=1}^{l_3} \breve{D}_s(t) u(\breve{x}_s, t) = L_0(t), \tag{5.3}$$

где t и x — соответственно временная и пространственная координаты; $u(x,t)$ — состояние процесса в точке x в момент времени t; $\bar{x}_i$, $\tilde{x}_j$, $\breve{x}_s$, $i = 1, \ldots, l_1$, $j = 1, 2, \ldots, l_2$, $s = 1, 2, \ldots, l_3$, — заданные точки из интервала $(0, l)$, причем $\bar{x}_{i+1} > \bar{x}_i$ и $\bar{x}_l + \Delta_l \in [0, l]$; $\min(\bar{x}_1, \tilde{x}_1) = 0$, $\max(\bar{x}_{l_1} + \Delta_1, \tilde{x}_{l_2}) = l$, и для всех $i = 1, \ldots, l_1$, $j = 1, \ldots, l_2$ выполняется условие $\tilde{x}_j \bar{\in} [\bar{x}_i, \bar{x}_i + \Delta_i]$; $f(x,t)$, $\varphi(x)$ — заданные непрерывные функции при $0 \leq x \leq l$ и $0 \leq t \leq T$; $\bar{D}_i(x,t)$, $\tilde{D}_j(t)$, $\breve{D}_s(t)$ — двухмерные непрерывные по совокупности аргументов вектор-функции.

Для применения метода прямых на отрезке $[0, T]$ возьмем точки $t_k = k\tau$, $\tau = T/n$ и проведем прямые $t = t_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Обозначая через $U^{(k)}(x) = u(x, t_k)$, $f^{(k)}(x) = f(x, t_k)$, заменяя $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\big|_{t=t_k}$ разностным отношением, получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned}&\ddot{U}^{(k)}(x)=\frac{1}{\tau}\,U^{(k)}(x)-\sum_{s=1}^{l_3}B_s^{(k)}(x)U^{(k)}(\breve{x}_s)-\frac{1}{\tau}\,U^{(k-1)}(x)-f^{(k)}(x),\quad k=\overline{1,n},\\&U^{(0)}(x)=\varphi(x),\end{aligned}\tag{5.4}$$

решаемые последовательно от $k=1$ до $k=n$.

В силу (5.3) для этих уравнений имеются нелокальные условия:

$$\sum_{i=1}^{l_1}\int\limits_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_i+\Delta_i}\bar{D}_i^{(k)}(x)U^{(k)}(x)\,dx+\sum_{j=1}^{l_2}\tilde{D}_j^{(k)}U^{(k)}(\tilde{x}_j)+\sum_{s=1}^{l_3}\breve{D}_s^{(k)}U^{(k)}(\breve{x}_j)=L_0^{(k)},\tag{5.5}$$

где использованы обозначения $\bar{D}_i^{(k)}(x)=\bar{D}_i(x,t_k)$, $\tilde{D}_j^{(k)}=\tilde{D}_j(t_k)$, $\breve{D}_s^{(k)}=\breve{D}_s(t_k)$.

Задачу (5.4), (5.5) можно привести к следующей задаче относительно системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}&\dot{U}_1^{(k)}(x)=U_2^{(k)}(x),\quad k=\overline{1,n},\\&\dot{U}_2^{(k)}(x)=\frac{1}{\tau}\,U_1^{(k)}(x)-\sum_{s=1}^{l_3}B_s^{(k)}(x)U_1^{(k)}(\breve{x}_s)-\frac{1}{\tau}\,U_1^{(k-1)}(x)-f^{(k)}(x),\quad k=\overline{1,n},\\&U_1^{(0)}(x)=\varphi(x)\end{aligned}\tag{5.6}$$

с неразделенными интегральными и точечными условиями:

$$\sum_{i=1}^{l_1}\int\limits_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_i+\Delta_i}\bar{D}_i^{(k)}(x)U_1^{(k)}(x)\,dx+\sum_{j=1}^{l_2}\tilde{D}_j^{(k)}(t)U_1^{(k)}(\tilde{x}_j)+\sum_{s=1}^{l_3}\breve{D}_s^{(k)}U_1^{(k)}(\breve{x}_s)=L_0^{(k)}.\tag{5.7}$$

Далее для решения системы дифференциальных уравнений (5.6) с нелокальными условиями (5.7) можно применить выше предложенную схему.

Теперь рассмотрим другой случай, при котором начальное условие (5.2) может быть задано в виде неразделенных точечных и интегральных условий.

Пусть вместо начального условия (5.2) задано условие

$$\sum_{i=1}^{l_1}\int\limits_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_i+\Delta_i}\bar{D}_i(x,t)u(x,t)\,dt+\sum_{j=1}^{l_2}\tilde{D}_j(x)u(x,\tilde{t}_j)+\sum_{s=1}^{l_3}\breve{D}_s(x)u(x,\breve{t}_s)=L_0(x),\tag{5.8}$$

а граничные условия имеют классический вид:

$$u(0,t)=\psi_1(t),\qquad u(l,t)=\psi_2(t),\quad 0\le x\le T.\tag{5.9}$$

Здесь $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — заданные непрерывные функции, двухмерные функции $\bar{D}_i(x,t)$, $\tilde{D}_j(x)$, $\breve{D}_s(x)$, $L_0(x)$ непрерывны по x, t, $i=1,\ldots,l_1$, $j=1,\ldots,l_2$, $s=1,\ldots,l_3$.

Для применения метода прямых на отрезке $[0,l]$ возьмем точки $x_k=kh$, $h=l/n$, и проведем прямые $x=x_k$, $k=0,1,\ldots,n$. Обозначая через $U^{(k)}(t)=u(x_k,t)$, заменяя $\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}\big|_{x=x_k}$ разностным отношением, получим следующую систему n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{gathered}\dot U^{(k)}(t) = \frac{\left(U^{(k+1)}(t) - 2U^{(k)}(t) + U^{(k-1)}(t)\right)}{h^2} + \sum_{s=1}^{l_3} B_s^{(k)}(x) U^{(k)}(\check t_s) - f^{(k)}(t), \quad k = \overline{1,n}, \\ U^{(0)}(t) = \psi_1(t), \qquad U^{(n+1)}(t) = \psi_2(t)\end{gathered} \tag{5.10}$$

с неразделенными многоточечными и интегральными условиями:

$$\sum_{i=1}^{l_1} \int\limits_{\bar t_i}^{\bar t_i + \Delta_i} \bar D_i^{(k)}(t) U^{(k)}(t)\, dt + \sum_{j=1}^{l_2} \tilde D_j^{(k)}(t) U^{(k)}(\tilde t_j) + \sum_{s=1}^{l_3} \tilde D_s^{(k)}(t) U^{(k)}(\check t_s) = L_0^{(k)}. \tag{5.11}$$

Легко видеть, что задача (5.10), (5.11) совпадает с задачей (2.1), (2.2), следовательно, к ее численному решению применимы результаты п. 3.

6. Результаты численных экспериментов

Были проведены численные эксперименты на тестовых задачах с применением предложенных в данной работе формул и схем численного решения. Результаты экспериментов показали достаточно высокую эффективность описанного подхода. Приведем результаты численных экспериментов для линейной и нелинейной систем.

Задача 1. Рассмотрим систему трех линейных нагруженных дифференциальных уравнений, заданную на отрезке [0;1]:

$$\begin{gathered}\dot x_1(t) = t\, x_2(t) + x_3(t) + x_2(0.25) - t^2 + 2t - 1.25, \\ \dot x_2(t) = x_1(t) - 2t\, x_3(t) + 2, \\ \dot x_3(t) = 2t\, x_1(t) + x_2(t) + x_1(0.25) - 4t^3 + t + 0.875\end{gathered}$$

со следующими неразделенными точечными и интегральными условиями:

$$\int\limits_0^{0.2} \bar D_1(\tau) x(\tau)\, d\tau + \tilde D_1\, x(0.5) + \int\limits_{0.75}^{1} \bar D_2(\tau)\, x(\tau)\, d\tau = L_0,$$

$$\bar D_1(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\tau \\ -1 & 2\tau & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \bar D_2(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2\tau \\ 1 & -2\tau & 2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad L_0 = \begin{pmatrix} 2.3 \\ 0.95 \\ -2.05 \end{pmatrix},$$

$$\bar t_1 = t_0 = 0, \quad \Delta_1 = 0.2, \quad \bar t_2 = 0.75, \quad \Delta_2 = 0.25, \quad \tilde t_1 = 0.5, \quad \check t_1 = 0.25.$$

Несложно проверить, что вектор-функция $x^*(t) = (2t^2 - 1; t + 1; t)$ является точным решением поставленной задачи.

В таблицах 1, 2 приведены результаты численного решения задачи и точное решение. Расчеты проводились с двойной точностью на алгоритмическом языке DELPHI.

Таблица 1. Результаты решения задачи 1

t	Решение при $h = 0.005$			Решение при $h = 0.002$		
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
0	−1.0016	0.9961	0.0021	−1.0006	0.9984	0.0008
0.2	−0.9223	1.1956	0.2007	−0.9209	1.1982	0.2003
0.4	−0.6835	1.3951	0.3989	−0.6814	1.3980	0.3995
0.6	−0.2854	1.5947	0.5964	−0.2822	1.5979	0.5986
0.8	0.2719	1.7948	0.7930	0.2768	1.7979	0.7972
1.0	0.9883	1.9963	0.9880	0.9953	1.9985	0.9952

Таблица 2. Полученное и точное решения задачи 1

t	Решение при $h = 0.001$			Точное решение		
	x_1	x_2	x_3	x_1^*	x_2^*	x_3^*
0	−1.0003	0.9992	0.0004	−1.0000	1.0000	0.0000
0.2	−0.9205	1.1991	0.2001	−0.9200	1.2000	0.2000
0.4	−0.6807	1.3990	0.3998	−0.6800	1.4000	0.4000
0.6	−0.2811	1.5989	0.5993	−0.2800	1.6000	0.6000
0.8	0.2784	1.7990	0.7986	0.2800	1.8000	0.8000
1.0	0.9977	1.9992	0.9976	1.0000	2.0000	1.0000

Для решения задач Коши использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка при различных значениях шага h, который брался равным $0.005, 0.002$ и 0.001. Как видно из табл. 1, 2, погрешность расчетов при различных h соответствует величине шага, а именно с уменьшением шага уменьшается погрешность расчетов.

Задача 2. Рассмотрим систему трех нелинейных дифференциальных уравнений, определенную на отрезке [0;1]:

$$\dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + 3t\,x_2(t) - x_3(t) + x_1(0.3) - 2tx_3(0.3) - t^4 + t^2 + 3.36t + 1.91,$$
$$\dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + x_2^2(t) + tx_3(t) - 2t^3 - 3t^2 - 4t + 2,$$
$$\dot{x}_3(t) = t\,x_1(t) - x_2(t) + 2x_3^2(t) + tx_2(0.3) - 8t^4 - t^3 - 16t^2 + 4.7t - 7$$

со следующими неразделенными точечными и интегральными условиями:

$$\int\limits_0^{0.1} \bar{D}_1(\tau)\,x(\tau)\,d\tau + \tilde{D}_1\,x(0.6) + \int\limits_{0.8}^{1} \bar{D}_2(\tau)\,x(\tau)\,d\tau = L_0,$$

$$\bar{D}_1(\tau) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2\tau & 1 \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{D}_2(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 4\tau & -2 \\ 2 & -2\tau & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad L_0 = \begin{pmatrix} 6.18 \\ 8.07 \\ -0.135 \end{pmatrix},$$

$$\bar{t}_1 = t_0 = 0, \quad \Delta_1 = 0.1, \quad \bar{t}_2 = 0.8, \quad \Delta_2 = 0.2, \quad \breve{t}_1 = 0.3, \quad \tilde{t}_1 = 0.6.$$

Вектор-функция $x^*(t) = (t^2-1; t+1; 2t^2+2)$ является точным решением поставленной задачи.

Для решения нелинейной задачи использовался метод линеаризации. В результате линеаризованная система уравнений, как легко проверить, принимает вид:

$$\dot{x}_1(t)=2x_1^0(t)x_1(t)+3tx_2(t)-x_3(t)+x_1(0.3)-2tx_3(0.3)-(x_1^0(t))^2-t^4+t^2+3.36t+1.91,$$
$$\dot{x}_2(t)=2x_1(t)+2x_2^0(t)x_2(t)+tx_3(t)-(x_2^0(t))^2-2t^3-3t^2-4t+2,$$
$$\dot{x}_3(t)=t\,x_1(t)-x_2(t)+4x_3^0(t)x_3(t)+tx_2(0.3)-2(x_3^0(t))^2-8t^4-t^3-16t^2+4.7t-7.$$

За начальное приближение взята вектор-функция $x^0(t)=(t-1.5; t^2+1; t+2)$, которая не удовлетворяет ни заданной системе уравнений, ни краевым условиям.

В таблице 3 приведены результаты решения линеаризованной задачи с неразделенными интегральными условиями на первой и второй итерациях.

Таблица 3. Результаты 1-й и 2-й итераций

t	Полученное решение $x(t)$					
	1-я итерация			2-я итерация		
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
0	−0.8316	0.9512	1.9969	−0.9953	0.9992	1.9999
0.1	−0.8769	1.0709	2.0193	−0.9878	1.0996	2.0200
0.2	−0.8815	1.1837	2.0805	−0.9589	1.1998	2.0800
0.3	**−0.8532**	**1.2910**	**2.1805**	**−0.9095**	**1.2999**	**2.1800**
0.4	−0.7970	1.3942	2.3210	−0.8398	1.3999	2.3200
0.5	−0.7166	1.4946	2.5046	−0.7499	1.4999	2.5001
0.6	−0.6147	1.5935	2.7346	−0.6400	1.5999	2.7202
0.7	−0.4937	1.6922	3.0126	−0.5100	1.6999	2.9804
0.8	−0.3556	1.7916	3.3324	−0.3601	1.7999	3.2806
0.9	−0.2008	1.8909	3.6596	−0.1901	1.8998	3.6207
1.0	−0.0248	1.9797	3.8617	−0.0002	1.9999	4.0020

В таблице 4 приведены результаты применения предложенного в работе метода, полученные на третьей итерации линеаризации, и точное решение задачи. Максимальное отклонение по траектории на третьей итерации при числе разбиений равном 200 и использовании метода Рунге–Кутты четвертого порядка не превышало величину 10^{-6}.

Таблица 4. Результаты 3-й итерации и точное решение задачи

t	Полученное решение			Точное решение		
	x_1	x_2	x_3	x_1^*	x_2^*	x_3^*
0	−0.99997	0.99999	2.00000	−1.00000	1.00000	2.00000
0.1	−0.98998	1.09999	2.02000	−0.99000	1.10000	2.02000
0.2	−0.95998	1.19999	2.08000	−0.96000	1.20000	2.08000
0.3	**−0.90998**	**1.30000**	**2.18000**	**−0.91000**	**1.30000**	**2.18000**
0.4	−0.83999	1.40000	2.32001	−0.84000	1.40000	2.32000
0.5	−0.74999	1.50000	2.50001	−0.75000	1.50000	2.50000
0.6	−0.63999	1.60000	2.72001	−0.64000	1.60000	2.72000
0.7	−0.51000	1.70000	2.98001	−0.51000	1.70000	2.98000
0.8	−0.36000	1.80000	3.28001	−0.36000	1.80000	3.28000
0.9	−0.19000	1.90000	3.62001	−0.19000	1.90000	3.62000
1.0	−0.00000	2.00000	3.99997	0.00000	2.00000	4.00000

7. Заключение

В статье предложен численный метод решения системы линейных неавтономных нагруженных дифференциальных уравнений с обыкновенными производными с неразделенными многоточечными и интегральными условиями и его применение к другим задачам. Предложенный подход основан на операции свертывания интегральных условий в локальные, позволяющий свести решение исходной задачи к решению задачи Коши относительно систем обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных алгебраических уравнений. Проведенные численные эксперименты по решению задач, описываемых системами линейных, нелинейных обыкновенных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными краевыми условиями, показали работоспособность и достаточно высокую эффективность предложенных в работе подхода и расчетных формул.

Литература

1. **Тамаркин Я.Д.** О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды: Дис. ... . Петроград, 1917.
2. **Kneser A.** Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der matem. — Physik. — 1922.
3. **Vallee-Poussin Ch.J.** Sur l'equation differentielle lineare du second order defermination d'une integrale par deux valeurx assignees. Extension aux eqution d'orde n // J. math. pura et appl. — 1929. — № 9. — P. 125–144.
4. **Lichtenstein L.** Vorlesungen über einege Klassen nichtlinear Integralgleichungen und Integraldifferentialgleihungen nebst Anwendungen. — Berlin: Springer, 1931.
5. **Гюнтер Н.М.** Studia Mathematica. — T. IV. 1932.
6. **Искендеров А.Д.** О смешанной задаче для нагруженных квазилинейных уравнений гиперболического типа // ДАН СССР. — 1971. — Т. 199, № 6. — С. 1237–1239.
7. **Нахушев А.М.** О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифф. уравнения. — 1976. — Т. 12, № 1. — С. 103–108.
8. **Дикинов Х.Ж., Керефов А.А., Нахушев А.М.** Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифф. уравнения. — 1976. — Т. 12, № 1. — С. 177–179.
9. **Бородин А.В.** Об одной оценке для эллиптических уравнений и ее приложении к нагруженным уравнениям // Дифф. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 1. — С. 17–22.
10. **Нахушев А.М.** Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.
11. **Нахушев А.М.** Нагруженные уравнения и их применение. — М.: Наука, 2012.
12. **Шхануков-Лафишев М.Х.** Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности с краевыми условиями III рода // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2009. — Т. 49, № 7. — С. 1223–1231.
13. **Дженалиев М.Т.** К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. — Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995.
14. **Токова А.А.** Краевая задача для одного нагруженного дифференциального уравнения // Докл. Адыгской (Черкесской) международной академии наук. — 2005. — Т. 7, № 2. — С. 56–61.
15. **Кигурадзе И.Т.** Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1987. — Т. 30. — С. 3–103.
16. **Яковлев М.Н.** Оценки решений систем нагруженных интегро-дифференциальных уравнений, подчиненных многоточечным и интегральным краевым условиям // Зап. научн. сем. ЛОМИ. Т. 124. Численные методы и вопросы организации вычислений. 6. — Ленинград: Наука, Ленинградское отд-ние, 1983. — С. 131–139.

17. **Алиханов А.А, Березков А.М., Шхануков-Лафишев М.Х.** Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2008. — Т. 48, № 9. — С. 1619–1628.

18. **Айда-заде К.Р.** О решении систем дифференциальных уравнений с нелокальными условиями // Вычислительные технологии. — 2004. — Т. 1, № 9. — С. 11–25.

19. **Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.** О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2004. — Т. 44, № 9. — С. 1585–1595.

20. **Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.** Численное решение систем дифференциальных уравнений с неразделенными точечными и интегральными условиями // Известия высших технических учебных заведений Азербайджана, сер. Информатика и автоматика. — 2011. — Т. 13, № 4. — С. 64–70.

21. **Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.** О численном решении задач оптимального управления с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 12. — С. 2163–2177.

22. **Абдуллаев В.М.** Решение дифференциальных уравнений с неразделенными и интегральными условиями // Сибирский журн. индустриальной математики. — 2012. — Т. 15, № 3 (51). — С. 3–15.

23. **Годунов С.К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. — 1961. — Т. 16, № 3 (99). — С. 171–174.

24. **Абрамов А.А.** Вариант метода прогонки // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1961. — Т. 1, № 2. — С. 349–351.

25. **Абдуллаев В.М.** О применении метода прямых для краевой задачи с нелокальными условиями относительно нагруженного параболического уравнения // Известия НАН Азербайджана, серия ФТМН. — 2008. — Т. 28, № 3. — С. 76–81.

Поступила в редакцию 18 января 2013 г.,
в окончательном варианте 29 марта 2013 г.