

УДК 533.951

## ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ТОКОВЫЕ СЛОИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ АЛЬВЕНОВСКОГО ИМПУЛЬСА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г. И. Дудникова, В. П. Жуков

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

Впервые изучено распространение альвеновского импульса в окрестности Х-точки при наличии вязкости. Показано, что в отличие от случая магнитозвукового возмущения, где малая по сравнению с магнитной вязкостью плазмы  $\nu$  динамическая вязкость  $\eta$  (речь идет о безразмерных величинах) не влияет на течение, в альвеновском случае это влияние принципиально. Величина установившейся плотности тока оказывается пропорциональной  $(\nu\eta)^{-1/4}$ . Показано также, что на больших временах в этой существенно нелинейной задаче устанавливается распределение  $z$ -компоненты магнитного поля, близкое к распределению, которое получается при решении линейной задачи. Изучено влияние теплопроводности на этот процесс.

**Введение.** Как известно, процесс распространения возмущений магнитного поля претерпевает значительные изменения при приближении этих возмущений к окрестности особенностей магнитного поля. В частности, возникают токовые слои, в которых происходит преобразование энергии возмущений в тепловую и кинетическую энергию макроскопического движения плазмы, а также энергию быстрых частиц. Наиболее интересная трансформация возмущений происходит непосредственно вблизи нулевых линий (точек, поверхностей); в связи с этим в цикле работ [1–9] представлены результаты численных и аналитических исследований задачи, имеющей следующую математическую постановку. Покоящаяся плазма, помещенная в гиперболическое магнитное поле, занимает квадратную область. Движение полагалось двумерным ( $\partial/\partial z = 0$ ). Приходящие от некоторого удаленного источника волны моделировались заданием различного типа возмущений магнитного поля на границе области. На границе расчетной области ставились условия, позволяющие плазме втекать и вытекать из нее.

Поставленная задача подробно изучена для случая магнитозвукового импульса, когда движение инициируется возмущением  $z$ -компоненты вектор-потенциала магнитного поля  $A$  на границе области. Результаты расчетов согласуются с аналитическими оценками и экспериментальными данными [1–7, 9]. В частности, влияние вязкости  $\eta$  на процессы перемыкания обсуждалось в [5, 10]. Аналитические оценки, приведенные в этих работах, а также неопубликованные данные расчетов, проведенных по апробированным для этой задачи алгоритмам [9], позволяют говорить о том, что безразмерная динамическая вязкость  $\eta$ , малая по сравнению с безразмерной магнитной вязкостью  $\nu$ , практически не влияет на течение, и величина  $z$ -компоненты плотности тока  $j_z \sim \nu^{-1/2}$ .

Следует отметить, что в большинстве работ по пересоединению рассматриваются течения, в которых скорость плазмы и возмущения магнитного поля лежат в плоскости, перпендикулярной нулевой линии, т. е. течения магнитозвукового типа. Такие течения

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (грант № 96-0456) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-02-17115а).

имеют место в наиболее перспективных для термоядерного синтеза ловушках: токамаках и стеллараторах. Существуют также работы, в которых моделируются трехмерные МГД-течения [11] и течения, в которых плазма описывается кинетическими уравнениями [12].

В космической плазме, например в плазме солнечной короны, большую роль могут играть течения, в которых имеются составляющая скорости и возмущения магнитного поля, параллельные нулевой линии, т. е. альвеновские возмущения. В [4, 13] показано, что в этом случае возможно формирование токовых слоев вдоль сепаратрисных поверхностей, разделяющих независимые магнитные потоки. Ток в этих слоях, в отличие от магнитозвукового случая, течет перпендикулярно нулевой линии вдоль сепаратрисных поверхностей. Распространению альвеновского импульса соответствует задание на границе возмущения  $z$ -компоненты магнитного поля  $H_z$ .

В данной статье изложены математическая постановка задачи, результаты решения линейной задачи и полной системы нелинейных уравнений.

**1. Постановка задачи.** Исходные уравнения одножидкостной магнитной гидродинамики в общепринятых безразмерных переменных имеют вид [1, 6–9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)A &= \nu\Delta A, & \frac{\partial H_z}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V}H_z) &= (\mathbf{H}\nabla)V_z + \nu\Delta H_z, \\ \rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}\right) &= -\nabla\left(p + \frac{H_z^2}{2}\right) - \Delta A\nabla A + \eta\left(\Delta \mathbf{V} + \frac{1}{3}\nabla \operatorname{div} \mathbf{V}\right), \\ \rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)V_z\right) &= (\mathbf{H}\nabla)H_z + \eta\Delta V_z, & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) &= 0, \\ \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V}p)\right) &= \operatorname{div}(\chi\nabla T) - p\operatorname{div}(\mathbf{V}) + \nu((\nabla H_z)^2 + (\Delta A)^2) + \eta Q, \\ Q &= 2\left(\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2\right) + \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}(\operatorname{div} \mathbf{V})^2, \\ T &= \frac{p}{\rho}, & \mathbf{H} &= (H_x, H_y) = \left(\frac{\partial A}{\partial y}, -\frac{\partial A}{\partial x}\right), & \mathbf{V} &= (V_x, V_y), & \gamma &= \frac{5}{3}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $A$  —  $z$ -компонента вектор-потенциала магнитного поля. Начальные условия соответствовали стационарному решению этих уравнений:  $A = A_0 = (x^2 - y^2)/2$  ( $X$ -точка),  $H_z = 0$ ,  $p = \beta$ ,  $\rho = 1$ ,  $\mathbf{V} = 0$ .

Остановимся на граничных условиях. Для скоростей  $V_x$ ,  $V_y$ , как и в работах [4–8], на границе расчетной области  $-1 < x < 1$ ,  $-1 < y < 1$  выбирались условия  $\partial V_{x,y}/\partial \mathbf{n} = 0$  ( $\mathbf{n}$  — нормаль к границе). В данной работе для  $V_z$  вместо равенства нулю нормальной производной, как в [4–8], предполагалось равенство нулю градиента вдоль магнитного поля

$$(\mathbf{H}\nabla)V_z = 0. \quad (1.2)$$

Условие (1.2) ставилось и для  $H_z$  на боковых ( $x = \pm 1$ ) границах. Это связано с тем, что по смыслу задачи альвеновская волна приходит из бесконечности вдоль поля  $\mathbf{H}$ .

Вектор-потенциал  $A$  полагался на границе неизменным во времени, а возмущение  $H_z$  при  $y = \pm 1$  имело вид

$$H_z(x, y = \pm 1) = \pm H_1 \min(t/t_s, 1), \quad (1.3)$$

т. е.  $H_z$  на границе возрастает от нуля до  $H_1$  за время  $t_s$ .

В [4–8] для  $p$ ,  $\rho$  ставились условия равенства нулю нормальных производных этих величин, если плазма вытекает из расчетной области через данный участок границы. В

противном случае  $p$  и  $\rho$  полагались равными их невозмущенным значениям  $\beta$  и 1. Это условие приводит к следующему нежелательному эффекту. На больших временах образуется почти равновесная конфигурация, в которой скорость плазмы  $V$  мала, а давление намного превышает начальное. Поэтому изменение направления скорости на противоположное приводит к резкому изменению давления на границе даже при малой абсолютной величине скорости. В связи с этим в данной работе для рассматриваемых величин ставились условия на потоки этих величин, а именно: если скорость на границе направлена внутрь расчетной области, то  $(Vn)p = (Vn)\beta$ ,  $(Vn)\rho = (Vn)$ . В противном случае в выражениях  $(Vn)p$ ,  $(Vn)\rho$  значения  $p$  и  $\rho$  полагались равными их значениям в приграничной расчетной ячейке. При этом поток на границе, связанный с диссипацией в уравнении для давления, полагался равным нулю:  $\chi \nabla T = 0$ , что позволяло избежать упомянутых трудностей.

Вследствие симметрии поставленную задачу можно решать в четверти области. Для численного решения использовалась явная конечно-разностная схема первого порядка, описанная в [9].

**2. Линейная задача.** Рассмотрим распространение альвеновского импульса в линейном приближении, считая, что полоидальное поле  $H$  не зависит от времени, а  $H_z$  и  $V_z$  описываются уравнениями

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = (\mathbf{H} \nabla) V_z + \nu \Delta H_z, \quad \rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = (\mathbf{H} \nabla) H_z + \eta \Delta V_z, \quad \rho = \text{const}. \quad (2.1)$$

Граничные условия имеют вид (1.2), (1.3).

Легко понять, что стационарное распределение  $H_z$  будет приблизительно следующим:

$$H_z = H_1 \text{ при } y > |x|, \quad H_z = -H_1 \text{ при } y < -|x|, \quad H_z = 0 \text{ при } |x| > |y|. \quad (2.2)$$

Распределение  $H_z$  в окрестности линии  $|x| = |y|$  будет размазано под влиянием  $\eta$  и  $\nu$ . Делая замену  $V_z = \sqrt{\nu/\eta} V_{z*}$ , легко видеть, что стационарное решение системы (2.1) зависит только от одного параметра  $\nu\eta$ . Полагая  $\mathbf{H} \nabla \sim 1$  и  $\Delta \sim l^{-2}$  ( $l$  — ширина слоя), получаем оценку  $l \sim (\nu\eta)^{1/4}$ , соответственно  $j_{\perp} \sim H_1/l \sim H_1/(\nu\eta)^{1/4}$ . При малом  $\nu\eta$  эта зависимость подтверждается расчетами. Максимум полоидального тока на стационарном этапе при больших временах достигается на нулевой линии (в центре координат) и равен 9 при  $\nu\eta = 5 \cdot 10^{-5}$  и 4,3 при  $\nu\eta = 10^{-4}$ . В этом случае полагалось  $H_1 = 0,5$ .

Рассмотрим случай  $\eta = 0$ . Согласно (2.1) в этом случае стационарное уравнение для  $V_z$  может иметь решение, только если  $H_z$  постоянно вдоль магнитного поля. Вдоль силовых линий, не пересекающих ось  $x$ , данное условие в принципе может быть выполнено. Однако линии, пересекающие эту ось, соединяют области, в которых  $H_z$  имеет разный знак, и это условие на них невыполнимо. Расчеты показывают, что при  $\eta = 0$  решение (2.1) стремится к разрывному решению (2.2). Соответственно ток неограниченно возрастает со временем.

**3. Нелинейная задача.** В случае полной системы уравнений (1.1) картина течения имеет следующий вид. От границ  $y = \pm 1$  к нулевой линии (центру координат) вдоль силовых линий магнитного поля распространяется волна возмущения поля  $H_z$  альвеновского типа. На расстояниях от центра координат, при которых напряженность фонового полоидального поля по порядку величины сравнима с напряженностью  $H_z$  в волне ( $r \sim H_1$ ), течение становится существенно нелинейным. Под действием магнитного давления  $H_z^2/2$  плазма движется к оси  $x$ , деформируя полоидальное магнитное поле. В результате возникает вытянутый вдоль оси  $x$  слой  $z$ -компоненты тока (рис. 1). Появляется также слой полоидального тока  $j_{\perp} = (-\partial H_z/\partial y, \partial H_z/\partial x)$ , векторное поле которого представлено на рис. 2. Значения величин  $j_z$  и  $j_{\perp}$  в этих слоях могут существенно превышать значения данных величин на квазистационарной стадии, причем возможна ситуация, когда  $|j_z| \gg |j_{\perp}|$ .

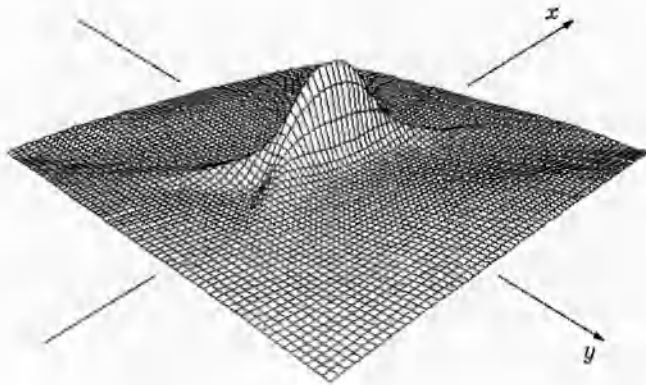


Рис. 1

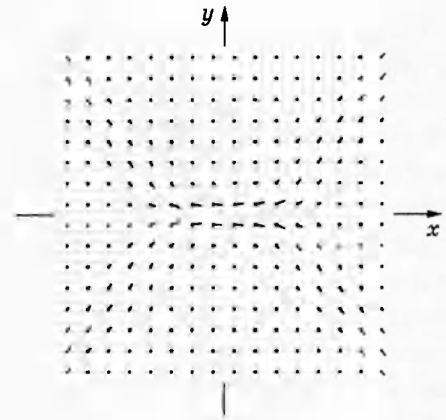


Рис. 2

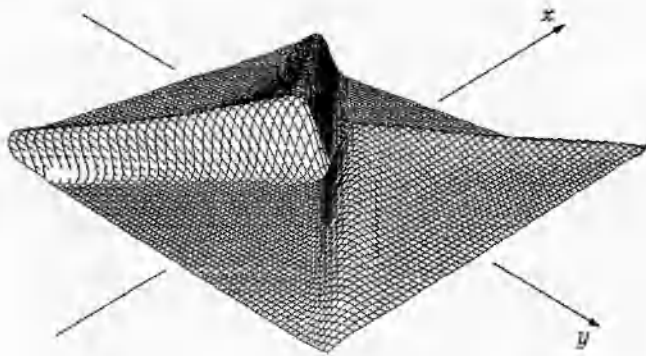


Рис. 3

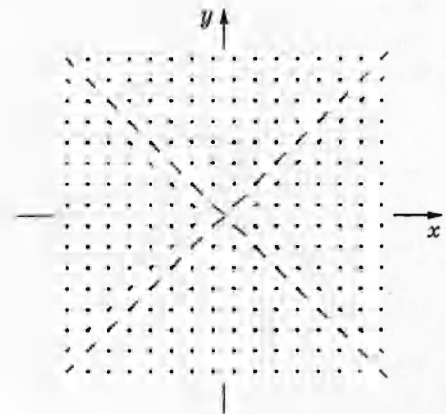


Рис. 4

На квазистационарной стадии  $|j_{\perp}| \ll |j_z|$ . В этих слоях возрастают также плотность и давление плазмы.

Изображенные на рис. 1, 2 токовые слои являются существенно нестационарными. Вследствие омического нагрева давление плазмы в слое возрастает, и возникает волна газокINETического давления, распространяющаяся вдоль магнитного поля к границам  $x = \pm 1$ . Распространению этой волны к границам  $y = \pm 1$  препятствует наличие при  $|y| > |x|$  поля  $H_z$ , давление которого велико (порядка  $H_1^2$ ). В итоге на больших временах устанавливается квазистационарная конфигурация, в которой  $p + H_z^2/2 \approx \text{const}$ . На рис. 3 показано распределение  $H_z^2/2$  на больших временах. Поскольку избыточное давление поля  $H_z$  компенсируется теперь не деформацией полоидального поля, а газокINETическим давлением, слой тока  $j_z$  исчезает. Величина  $j_z \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Векторное поле  $j_{\perp}$  изображено на рис. 4. Слой  $j_{\perp}$  располагается вдоль линий  $|y| = |x|$ , и  $|j_{\perp}|$  достигает максимума в центре области. Величину этого максимума обозначим  $j_{\infty}$ . Скорость  $V \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Поскольку  $V$  на квазистационарном этапе мала и  $A \approx A_0$ , распределение  $V_z$  и  $H_z$  близко к распределению, полученному при решении линейной системы (2.1), и определяется параметрами  $\nu$  и  $\eta$ . На больших временах зависимость  $V_z$  и  $H_z$  от параметров  $t_s$  (1.3),  $\beta$  и  $\chi$  слабая. Независимость квазистационарного режима от  $t_s$  связана с тем, что мы рассматриваем решение задачи при  $t \gg t_s$ . Отметим, что время выхода решения на стационар

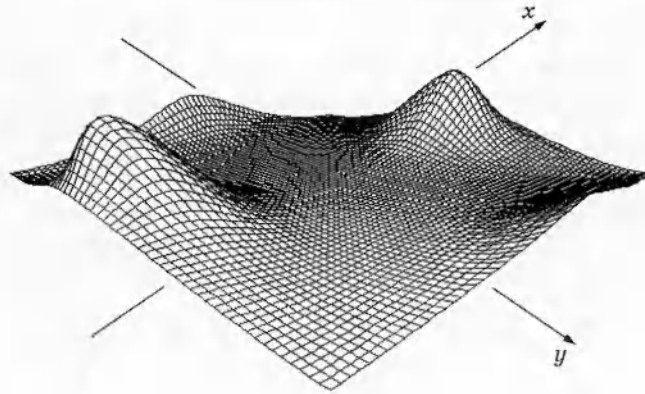


Рис. 5

составляет несколько сотен альвеновских времен и зависит не только от произведения  $\nu\eta$ , но и от соотношения между ними. Слабое влияние  $\beta$  обусловлено сильным омическим нагревом плазмы. Температура плазмы растет даже на квазистационарной стадии и на много превышает начальную. Менее очевидна слабая зависимость на больших временах распределений магнитного поля и давления от теплопроводности. При этом, поскольку влияние  $\chi$  на температуру существенно, то соответственно должно измениться распределение плотности. На рис. 5 и 6 показано типичное распределение плотности при  $\chi \ll \nu$  и  $\chi \geq \nu$  соответственно. Отметим, что подобное явление наблюдается и в случае магнито-звукового импульса.

Приведем примеры некоторых расчетов. При  $H_1 = 0,5$ ;  $0,02 < \beta < 0,5$ ;  $0,005\nu < \chi < 2\nu$ ;  $\nu = 0,005$ ,  $\eta = 0,001$  или  $\nu = 0,001$ ,  $\eta = 0,005$  расчетные значения  $j_\infty$  изменялись от 8,6 до 9,1. При тех же значениях параметров решение линейной задачи (2.1) дает  $j_\infty = 9$ . При  $\nu = \eta = 0,01$  численные расчеты дают  $j_\infty = 4,3$ , что совпадает с решением линейной задачи. Таким образом, распределение полоидального тока на квазистационарном режиме в существенно нелинейной задаче близко к его распределению в линейном случае.

При малых значениях  $\nu\eta$  из расчетов следует зависимость

$$j_\infty \approx CH_1(\nu\eta)^{-1/4}, \quad (3.1)$$

где  $C \sim 100$ .

В случае  $\eta = 0$  при  $\nu = 0,1$ ,  $\chi = 0,02$  и  $H_1 = 0,5$  величина  $j_\perp$  превышает 8. При тех же значениях  $\nu$  и  $\chi$ , но  $\eta = 0,001$  величина  $|j_\perp| \leq j_\infty \sim 4,3$ , что соответствует

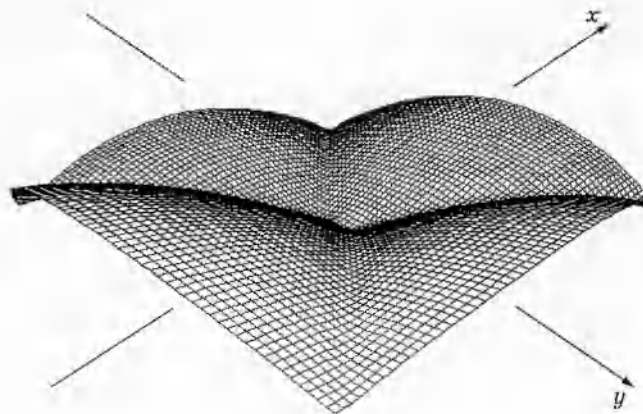


Рис. 6

зависимости (3.1). Отметим, что при  $\eta = 0$  распределение полоидального тока достигает стационарного распределения не при любых параметрах задачи. Например, при малой теплопроводности наблюдается сильное истечение плазмы из расчетной области, в результате которого плотность падает на много порядков. Распределение тока при этом далеко от стационарного.

**Заключение.** В работе показано, что вязкость существенно влияет на величину тока в рассматриваемой задаче. Распределение  $H_z$  близко к полученному при решении линейной задачи, а для распределения давления справедлива зависимость  $p + H_z^2/2 \approx \text{const}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Брушлинский К. В., Заборов А. М., Сыроватский С. И. Численный анализ токового слоя в окрестности магнитной силовой линии // Физика плазмы. 1980. Т. 6, вып. 2. С. 297–311.
2. **Нейтральные** токовые слои в плазме. М.: Наука, 1974. (Тр. Физ. ин-та / АН СССР; Т. 74).
3. **Вспышечные** процессы в плазме. М.: Наука, 1979. (Тр. Физ. ин-та / АН СССР; Т. 110).
4. Буланов С. В., Бутов И. Я., Гваладзе Ю. С. и др. Пинчевые разряды в плазме вблизи сепаратрисных поверхностей магнитного поля // Физика плазмы. 1986. Т. 12, вып. 3. С. 309–327.
5. Буланов С. В., Дудникова Г. И., Жуков В. П. и др. Токовые слои в окрестности критических точек магнитного поля // Тр. / РАН. Ин-т общ. физики. 1996. Т. 51, вып. 2. С. 101–123.
6. Буланов С. В., Дудникова Г. И., Жуков В. П. и др. Численное моделирование токового слоя в окрестности нулевой линии магнитного поля // Крат. сообщ. по физике. 1994. № 5/6. С. 28–33.
7. Буланов С. В., Дудникова Г. И., Жуков В. П. и др. Пересоединение магнитных силовых линий в окрестности критических точек // Физика плазмы. 1996. Т. 22, № 10. С. 867–895.
8. Дудникова Г. И., Жуков В. П. Формирование токового слоя под действием альвеновского импульса в идеально проводящей плазме // Вычисл. технологии. 1995. Т. 4, № 11. С. 108–118.
9. Березин Ю. А., Дудникова Г. И. Численные модели плазмы и процессы пересоединения. М.: Наука, 1985.
10. Park W., Montinello D., White R. Reconnection rates of magnetic fields including the effects of viscosity // Phys. Fluids. 1984. V. 27, N 1. P. 134–149.
11. Charlton L. A., Holmes J. A., Lynch V. E., Carreras B. A. Compressible linear and nonlinear resistive MHD calculations in toroidal geometry // J. Comput. Phys. 1990. V. 86. P. 270–293.
12. Lee L. C., Ding D. Q. Magnetic reconnection in a collisionless plasma // Geophys. Res. Lett. 1987. V. 14, N 10. P. 1003–1006.
13. Rosenau P. Three-dimensional flow with neutral points // Phys. Fluids. 1979. V. 22. P. 849.

*Поступила в редакцию 2/IV 1998 г.,  
в окончательном варианте — 14/V 1998 г.*