

УДК 539.3, 677.494

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЯЖЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ПОЛОТНА

В. Д. Бондарь, С. П. Молина\*, В. В. Садовский\*

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

\* Амурский государственный университет, 675027 Благовещенск

Предлагаются математические модели растяжения трикотажного полотна, позволяющие вычислять деформацию нити ткани по ее свойствам и приложенным к полотну нагрузкам. На основе упрощающих допущений проблема сводится к рассмотрению элементарной ячейки полотна, содержащей нитяную петлю. Петля вначале моделируется нитяным овалом с дискретными силами, а затем пластинкой с отверстием с распределенными силами, что при прочностном расчете открывает путь для применения методов теории упругости. С помощью ряда гипотез устанавливается связь между напряженным состоянием нитяного овала и соответствующим состоянием пластинки, позволяющая в разных формах моделировать механическое поведение нити в материале. Найденные теоретические закономерности сравниваются с имеющимися в литературе экспериментальными результатами.

При изготовлении текстильных материалов из новых видов сырья, а также при проектировании трикотажных изделий, отвечающих современным требованиям, необходимо решать широкий круг проблем, среди которых важную роль играет расчет на прочность. Знание деформационно-прочностных свойств исходных материалов позволяет сделать обоснованный выбор оптимального материала и оценить поведение соответствующего изделия при эксплуатации.

Важный класс текстильных изделий составляют трикотажные полотна. Эти изделия представляют собой дискретную среду, состоящую из отдельных ячеек, соединенных петлями или узлами. Они являются достаточно распространенными материалами с разнообразными применениями. Созданию и совершенствованию методов расчета на прочность подобных материалов посвящен ряд теоретических и экспериментальных исследований [1–5].

В настоящей работе на основе методов механики сплошных сред предлагается математическая модель трикотажного полотна, позволяющая получить связь деформации нити в ткани с параметрами полотна и приложенной к нему нагрузкой. Эта связь, в частности, дает возможность получать диаграммы растяжения, обычно используемые при проектировании трикотажных изделий.

1. Трикотажное полотно имеет достаточно сложное строение. Его механические свойства зависят от многих количественных и качественных факторов. В структуре полотна элементарные ячейки, имеющие вид петель, могут располагаться в один или несколько слоев и иметь, вообще говоря, различную форму и ориентацию. Могут изменяться и сами элементарные ячейки в зависимости от длины нити в петле, а также толщина нити и т. п. В дальнейшем, пренебрегая влиянием второстепенных факторов, примем следующие допущения:

— трикотажное полотно представляет собой регулярную систему ячеек-петель, расположенных в одном слое (рис. 1);

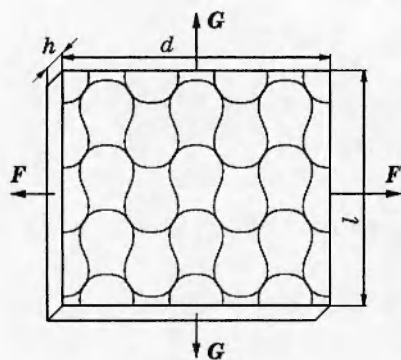


Рис. 1

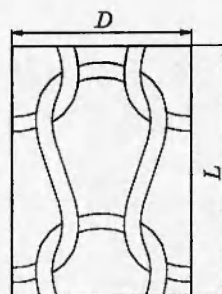


Рис. 2

Рис. 1. Структура трикотажного полотна

Рис. 2. Структура типичной ячейки

- все петли имеют одинаковые размеры и форму, а нить на всех участках элементарного звена имеет одну и ту же толщину и деформационно-прочностные свойства;
- полотно на боковой поверхности подвержено нагрузкам постоянной интенсивности, параллельным его плоскости, и имеет свободные от нагрузок лицевые плоскости;
- пренебрегается изгибной жесткостью нити, трением в местах контакта элементарных звеньев, а также собственным весом полотна;
- процесс деформирования полагается квазистатическим и протекающим при постоянной влажности и температуре.

Будем рассматривать полотно трикотажа прямоугольной формы шириной  $d$ , длиной  $l$  и толщиной  $h$  ( $l \sim d$ ,  $h \ll d$ ), растягиваемое в плоскости полосы в продольном направлении силой  $G$ , а в поперечном направлении — силой  $F$  (рис. 1). По заданной нагрузке и параметрам полосы определим в равновесном состоянии усилие в нити ткани и установим его связь с деформацией нити.

Полоса материала представляет собой систему элементарных звеньев, взаимодействие которых определено как нагрузкой, так и видом структуры ткани и свойствами нити. Разобьем полосу по петельным столбикам и рядам на  $w$  продольных и  $v$  поперечных полосок размерами  $D$  (петельный шаг) и  $L$  (высота петельного ряда) соответственно:

$$D = d/w, \quad L = l/v \quad (1)$$

и будем рассматривать типичную элементарную ячейку вместе с находящейся в ней нитяной петлей (рис. 2).

На первом этапе моделирования, модифицируя известные результаты [1], примем, что нитяная петля представляет собой нитяной овал с внутренним и внешним контурами  $\Gamma$  и  $\Gamma_1$ , находящийся под действием боковых сосредоточенных сил: нормальных реакций звеньев предыдущего петельного ряда  $Q_v$  и нормальных реакций звеньев последующего ряда, а также реакций отброшенных частей рассматриваемой петли  $P_v$  (рис. 3).

Отметим, что как форма овала, так и действующие на него силы заранее неизвестны; неизвестны также точки приложения этих сил. Кроме того, при квазистатическом растяжении полосы смещаются точки контакта соседних звеньев, а также точки приложения сил, что существенно затрудняет исследование.

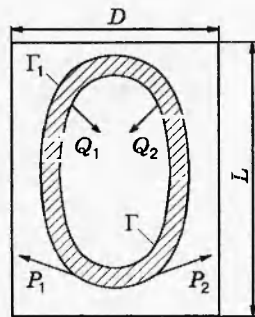


Рис. 3

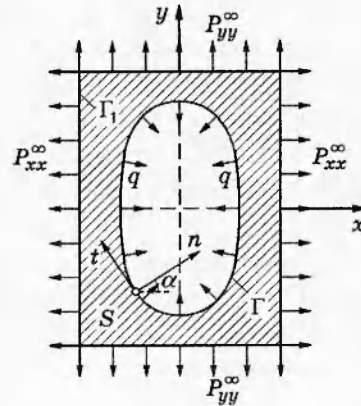


Рис. 4

Рис. 3. Моделирование петли овалом с сосредоточенными нагрузками

Рис. 4. Моделирование петли пластинкой с распределенными нагрузками

С целью преодоления указанных затруднений, а также для создания метода расчета усилий в нити рассмотрим второй этап моделирования, на котором перейдем от дискретного распределения масс в ячейке полотна (вдоль нитяной петли-овала) и сил на овале (в отдельных точках боковой поверхности) к непрерывному распределению.

Нитяной овал моделируем материальным слоем — пластинкой с отверстием той же массы, внутренний контур которой совпадает с внутренним контуром овала, а внешний — с контуром прямоугольника, ограничивающего ячейку (рис. 4). Дискретную нагрузку моделируем эквивалентной распределенной контурной нагрузкой постоянной интенсивности. При этом внутренние к овалу силы  $Q_v$  моделируются распределенной нормальной нагрузкой  $q$ , действующей на контуре отверстия пластинки. Внешние к овалу силы  $P_v$  заменяются эквивалентными распределенными нормальными нагрузками  $P_{xx}^\infty$  на продольных сторонах прямоугольника и  $P_{yy}^\infty$  — на поперечных сторонах, где  $x, y$  — декартовы оси (рис. 4).

Неизвестная контурная нагрузка  $q$  определяется при решении задачи нахождения напряжений в пластинке. Величины  $P_{xx}^\infty, P_{yy}^\infty$  периферийных нагрузок могут быть найдены по нагрузкам, приложенным к самой полосе, и по ее геометрическим параметрам. Действительно, силы на сторонах прямоугольной ячейки выражаются соотношениями

$$P_{xx}^\infty Lh = F/v, \quad P_{yy}^\infty Dh = G/w,$$

откуда с учетом (1) искомые нагрузки определяются в виде

$$P_{xx}^\infty = F/(hl), \quad P_{yy}^\infty = G/(hd). \quad (2)$$

В дальнейшем будем полагать, что напряженное состояние нитяного овала определяется напряжениями в пластинке и выражается через них на основе той или иной гипотезы. Тем самым расчет прочностных характеристик нитяной петли будет сведен к аналогичной задаче для пластинки с отверстием (рассматриваемой как неограниченная плоскость с отверстием) при воздействии на нее нормальных контурных и периферийных нагрузок, что позволит применить методы теории упругости.

2. В соответствии с исходными допущениями у типичного элемента полосы объемные силы отсутствуют, лицевые поверхности свободны от напряжений, а нагрузка на боковой

поверхности параллельна его плоскости. Следовательно, как сам элемент, так и моделирующая его пластинка находятся в условиях обобщенно-плоского напряженного состояния, описываемого плоской задачей теории упругости [6].

Полагая, что приложенным нагрузкам отвечают малые деформации нити и напряженное состояние нитяной петли однородно, произведем расчет напряжений в пластинке с отверстием на основе линейной теории упругости при условии равнопрочности контура отверстия.

В этой теории плоская статическая задача сводится к уравнениям равновесия, соотношениям закона Гука и представлениям деформаций через градиенты перемещений. В декартовых координатах  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  ( $\partial_1 = \partial x_1$ ,  $\partial_2 = \partial x_2$ ) эти соотношения в отсутствие объемных сил при обобщенном плоском напряженном состоянии имеют вид [6]

$$\begin{aligned} \partial_\beta P_{\alpha\beta} = 0, \quad P_{\alpha\beta} = \lambda_0 \varepsilon_{\sigma\sigma} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad 2\varepsilon_{\alpha\beta} = \partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha, \\ \lambda_0 = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu) \quad (\alpha, \beta, \sigma = 1, 2), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\delta_{\alpha\beta}$  — символы Кронекера;  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты упругости Ламе; компоненты перемещений  $u_\alpha$ , деформаций  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  и напряжений  $P_{\alpha\beta}$  представляют собой средние по толщине пластинки величины, являющиеся функциями двух координат  $x_1$ ,  $x_2$ :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) dx_3, \\ \varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad P_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} P_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) dx_3. \end{aligned}$$

Здесь по повторяющемуся индексу предполагается суммирование (напряжения  $P_{13}$ ,  $P_{23}$  малы по сравнению с  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{22}$ , напряжение  $P_{33} = 0$ , а деформация  $\varepsilon_{33}$  выражается через деформации  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  по формуле  $\varepsilon_{33} = -\lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})/(\lambda + 2\mu)$ ).

Равнопрочный контур отличается от прочих контуров тем свойством, что концентрация напряжений во всех его точках одинакова. Такой контур утрачивает прочность одновременно во всех своих точках, что обычно реализуется при более высоком уровне нагрузок. Равнопрочному контуру в рассматриваемом случае отвечают следующие краевые условия:

$$P_{11} = P_{zz}^\infty, \quad P_{22} = P_{yy}^\infty, \quad P_{12} = 0 \quad \text{на } \infty; \quad (4)$$

$$p_n = P_{nn} = q = \text{const}, \quad p_t = P_{nt} = 0, \quad P_{tt} = \sigma = \text{const} \quad \text{на } \Gamma, \quad q = -k\sigma \quad (0 < k < 1), \quad (5)$$

где  $p_n$ ,  $p_t$ ,  $P_{nn}$ ,  $P_{nt}$ ,  $P_{tt}$  — компоненты вектора и тензора напряжений в естественных осях контура  $\Gamma$  (нормали  $n$  и касательной  $t$ ) (рис. 4). Здесь принято, что напряжение  $q$  составляет заданную часть от напряжения  $\sigma$  и имеет противоположный с ним знак. В (3)–(5) величины  $P_{zz}^\infty$ ,  $P_{yy}^\infty$ ,  $k$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  задаются, а постоянные  $q$ ,  $\sigma$ , форма контура и напряжения подлежат определению.

Из соотношений (3) плоской задачи следуют уравнения равновесия и уравнение совместности в напряжениях  $\partial_\beta P_{\alpha\beta} = 0$ ,  $(\partial_{11} + \partial_{22})(P_{11} + P_{22}) = 0$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ). В комплексных переменных  $z^1 = z = x + iy$ ,  $z^2 = \bar{z} = x - iy$  ( $\partial_z = \partial/\partial z$ ,  $\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial \bar{z}$ ) уравнения имеют вид

$$\partial_z P^{11} + \partial_{\bar{z}} P^{12} = 0, \quad \partial_{z\bar{z}} P^{12} = 0, \quad (6)$$

где  $P^{\alpha\beta}$  — комплексные компоненты напряжений. Последние связаны с декартовыми компонентами формулами преобразования  $P^{\alpha\beta} = P_{\sigma\tau}(\partial z^\alpha/\partial x_\sigma)(\partial z^\beta/\partial x_\tau)$ :

$$P^{\bar{1}\bar{1}} = \bar{P}^{\bar{2}\bar{2}} = P_{xx} - P_{yy} + 2iP_{xy}, \quad P^{\bar{1}\bar{2}} = P^{\bar{2}\bar{1}} = P_{xx} + P_{yy}.$$

Общее решение уравнений (6) представляется через комплексные потенциалы  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  по формулам Колосова [7]:

$$P^{11} = \bar{P}^{22} = -2[z\bar{\Phi}'(z) + \bar{\Psi}(z)], \quad P^{12} = P^{21} = 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})]. \quad (7)$$

В бесконечной области  $S$  — внешности отверстия пластинки — напряжения должны быть однозначны и ограничены. Эти условия требуют, чтобы потенциалы представлялись в виде

$$\Phi(z) = A + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^{-k}, \quad \Psi(z) = B + \sum_{k=1}^{\infty} B_k z^{-k}, \quad (8)$$

где постоянные  $A$  и  $B$  можно считать вещественными; они определяются периферийными нагрузками (4):

$$A = (P_{yy}^{\infty} + P_{xx}^{\infty})/4, \quad B = (P_{yy}^{\infty} - P_{xx}^{\infty})/2. \quad (9)$$

Контурные условия (5) позволяют получить краевые задачи для потенциалов и задачу для уравнения контура отверстия. Рассматривая естественные оси  $n, t$  контура отверстия как декартовы оси  $x', y'$ , повернутые на угол  $\alpha$  относительно осей  $x, y$  (рис. 4), и вводя наряду с  $z, \bar{z}$  комплексные координаты  $z' = x' + iy'$ ,  $\bar{z}' = x' - iy'$ , получим

$$z'^1 = z' = z^1 e^{-i\alpha}, \quad z'^2 = \bar{z}' = z^2 e^{i\alpha}.$$

Следовательно, комплексные напряжения в соответствующих переменных  $P'^{\alpha\beta}$  и  $P^{\sigma\tau}$  связаны между собой формулами преобразования  $P'^{\alpha\beta} = P^{\sigma\tau}(\partial z'^{\alpha}/\partial z^{\sigma})(\partial z'^{\beta}/\partial z^{\tau})$ , имеющими вид

$$P_{x'x'} + P_{y'y'} = P'^{12} = P^{12}, \quad P_{x'x'} - P_{y'y'} + 2iP_{x'y'} = P'^{11} = P^{11} e^{-2i\alpha} \quad \text{на } \Gamma.$$

Угол  $\alpha$  может быть найден из уравнений контура  $z = z(s)$ ,  $\bar{z} = \bar{z}(s)$ . Действительно, орт касательной к контуру выражается по формуле  $dz/ds = e^{i(\pi/2+\alpha)}$ , откуда искомый угол находится в виде  $e^{-2i\alpha} = -d\bar{z}/dz$  на  $\Gamma$ . Таким образом, связь естественных и комплексных компонентов напряжений на контуре отверстия (с учетом совпадения осей  $x' = n, y' = t$ ) представляется формулами

$$P_{nn} + P_{tt} = P^{12}, \quad P_{nn} - P_{tt} + 2iP_{nt} = -\frac{d\bar{z}}{dz} P^{11} \quad \text{на } \Gamma.$$

Наконец, подстановка в них напряжений (7) и граничных величин (5) приводит к краевым задачам для потенциалов и задаче для уравнения контура

$$2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})] = q + \sigma, \quad 2\frac{dz}{d\bar{z}} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] = q - \sigma \quad \text{на } \Gamma. \quad (10)$$

Для решения этих задач отобразим конформно внешность  $S$  отверстия пластинки на внешность  $S'$  круга единичного радиуса вспомогательной плоскости  $\zeta$  (с соответствием бесконечно удаленных точек) голоморфной функцией

$$z = w(\zeta) = c\zeta + w_0(\zeta), \quad c = \bar{c}, \quad w_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^{-k}, \quad \zeta = re^{i\theta} \in S'. \quad (11)$$

Тогда потенциалы (8) станут функциями переменной  $\zeta$ :

$$\Phi(\zeta) = A + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^{-k}, \quad \Psi(\zeta) = B + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k}, \quad (12)$$

а напряжения (7) можно вычислить по формулам

$$P^{11} = \bar{P}^{22} = -2 \left[ w(\zeta) \frac{\Phi'(\zeta)}{\bar{w}'(\bar{\zeta})} + \Psi(\zeta) \right], \quad P^{12} = 2[\Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta})]. \quad (13)$$

На единичной окружности  $\Gamma'$  — границе круга  $|\zeta| = 1$  — будем иметь

$$\zeta = e^{i\theta}, \quad \bar{\zeta} = e^{-i\theta}, \quad \bar{\bar{\zeta}} = 1/\zeta,$$

$$dz = w'(\zeta) d\zeta = i\zeta w'(\zeta) d\theta, \quad dz = -i\bar{\zeta} \bar{w}'(\bar{\zeta}) d\theta, \quad \frac{dz}{d\bar{z}} = -\frac{\zeta w'(\zeta)}{\bar{\zeta} \bar{w}'(\bar{\zeta})} = -\zeta^2 \frac{w'(\zeta)}{\bar{w}'(\bar{\zeta})},$$

поэтому краевые задачи (10) можно записать в форме

$$2[\Phi(\zeta) + \bar{\Phi}(\bar{\zeta})] = q + \sigma \quad \text{на } \Gamma'; \quad (14)$$

$$2\zeta^2 [\bar{w}(\bar{\zeta}) \Phi'(\zeta) + w'(\zeta) \Psi(\zeta)] = (\sigma - q) \bar{w}'(\bar{\zeta}) \quad \text{на } \Gamma'. \quad (15)$$

Из (12) и (14) следует, что аналитическая функция  $\Phi(\zeta)$  ограничена на бесконечности и имеет постоянную вещественную часть на единичной окружности. Этим условиям можно удовлетворить, полагая функцию постоянной во всей области  $S'$  (и равной ее значению на бесконечности):

$$\Phi(\zeta) = A = (P_{xx}^\infty + P_{yy}^\infty)/4. \quad (16)$$

Тогда условие (14) определяет искомое напряжение  $\sigma$  (а с учетом (5) и нагрузку  $q$ ) через задаваемые величины

$$\sigma = 4A/(1 - k), \quad q = -4Ak/(1 - k). \quad (17)$$

Из (17) следует, что  $\sigma > 0$  и  $q < 0$ , т. е. контур отверстия растянут и подвержен внутреннему давлению.

В силу (16) и (17) условие (15) упрощается и принимает вид

$$\zeta^2 w'(\zeta) \Psi(\zeta) = (2A - q) w'(\bar{\zeta}), \quad |\zeta| = 1.$$

С помощью аналитического продолжения запишем это условие в виде функционального уравнения во внешности круга

$$\zeta^2 w'(\zeta) \Psi(\zeta) = H \bar{w}'(1/\zeta), \quad \zeta \in S', \quad H = 2A - q = 2A \frac{1+k}{1-k} \quad (18)$$

и используем его для нахождения функций  $w(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$ .

Функцию  $w_0(\zeta)$ , входящую в отображение (11), отыскиваем в форме полинома порядка  $2l + 1$  по нечетным степеням аргумента с вещественными коэффициентами:  $w_0(\zeta) = \sum_{k=0}^l C_{2k+1} \zeta^{-(2k+1)}$ ,  $\bar{C}_{2k+1} = C_{2k+1}$ , при этом отображение и его производные равны

$$w(\zeta) = C\zeta + \sum_{k=0}^l C_{2k+1} \zeta^{-(2k+1)}, \quad w'(\zeta) = C - \sum_{k=0}^l (2k+1) C_{2k+1} \zeta^{-(2k+2)}, \quad (19)$$

$$w'(1/\zeta) = C - \sum_{k=0}^l (2k+1) \zeta^{2k+2}.$$

С помощью формул (12) и (19) устанавливаем, что левая и правая части уравнения (18) имеют следующие порядки на бесконечности:

$$\zeta^2 w'(\zeta) \Psi(\zeta) = O(\zeta^2), \quad H \bar{w}'(1/\zeta) = O(\zeta^{2l+2}),$$

которые совпадают при  $l = 0$ . Следовательно, отображение (19) определяется двучленным выражением, содержащим два вещественных параметра:

$$z = w(\zeta) = n(\zeta + m/\zeta), \quad n = C, \quad m = C_1/C. \quad (20)$$

Установленное отображение позволяет определить форму отверстия пластинки, а следовательно, и форму овала. Действительно, согласно выбору отображения равнопрочным контуром служит образ единичной окружности. Полагая в равенстве (20) для точек окружности  $\zeta = e^{i\theta}$ , получим уравнение равнопрочного контура

$$\begin{aligned} x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad a = n(1 + m), \quad b = n(1 - m), \\ 0 < n = (a + b)/2 < \infty, \quad -1 < m = (a - b)/(a + b) < 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Согласно (21) равнопрочным контуром служит эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ , центром в начале отсчета и осями симметрии, совпадающими с декартовыми; параметр  $m$  характеризует форму эллипса, а параметр  $n$  — его размеры.

В силу (20) функциональное уравнение (18) определяет второй потенциал:

$$\Psi(\zeta) = H \frac{1 - m\zeta^2}{\zeta^2 - m}. \quad (22)$$

Потенциалам (16), (22) и отображению (20) отвечают следующие выражения напряжений (13):

$$P^{11} = \bar{P}^{22} = 2H \frac{m\bar{\zeta}^2 - 1}{\bar{\zeta}^2 - m}, \quad P^{12} = 4A. \quad (23)$$

Из (23) при  $\zeta \rightarrow \infty$  получаем равенство  $P_{\infty}^{11} = 2mH$ , которое с учетом (4), (9) и (18) определяет параметр  $m$  в зависимости от задаваемых величин:

$$m = -B/H = \chi(1 - k)/(1 + k), \quad \chi = (P_{xx}^{\infty} - P_{yy}^{\infty})/(P_{xx}^{\infty} + P_{yy}^{\infty}). \quad (24)$$

Таким образом, из двух параметров  $m$  и  $n$ , фигурирующих в отображении (20), первый определяется приложенной нагрузкой, а второй остается произвольным, что означает наличие однопараметрического семейства подобных эллипсов. (Другими методами этот результат получен в [8, 9].) Эллипс из этого семейства можно фиксировать заданием, например, одной из его полуосей. Из (24) следует, что при фиксированных периферийных нагрузках эта формула дает однозначное соответствие между  $m$  и  $k$ , т. е. между формой отверстия и коэффициентом пропорциональности контурных напряжений.

Полярным координатам  $r, \theta$  плоскости единичного круга в силу отображения (20) отвечают эллиптические координаты плоскости пластинки: окружностям  $r = \text{const}$  соответствуют эллипсы, а лучам  $\theta = \text{const}$  — гиперболы. Физические компоненты напряжений в этих координатах  $P_{rr}, P_{r\theta}, P_{\theta\theta}$  выражаются через комплексные компоненты и отображенные формулами [10, с. 92]

$$P_{rr} - P_{\theta\theta} + 2iP_{r\theta} = \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \frac{\bar{w}'(\zeta)}{w'(\zeta)} P^{11}, \quad P_{rr} + P_{\theta\theta} = P^{12}.$$

Используя выражения отображения (20) и напряжений (23), отсюда найдем, что компоненты и линейный инвариант напряжений в пластинке в эллиптических координатах имеют вид

$$P_{rr} = 2A + H \frac{m(r^4 + 1) \cos 2\theta - (1 + m^2)r^2}{r^4 + m^2 - 2mr^2 \cos 2\theta}, \quad I = P_{rr} + P_{\theta\theta} = 4A, \quad (25)$$

$$P_{\theta\theta} = 2A - H \frac{m(r^4 + 1) \cos 2\theta - (1 + m^2)r^2}{r^4 + m^2 - 2mr^2 \cos 2\theta}, \quad P_{r\theta} = -H \frac{m(r^4 - 1) \sin 2\theta}{r^4 + m^2 - 2mr^2 \cos 2\theta}.$$

Таким образом, напряжения в типичной точке пластинки зависят как от ее координат, так и от приложенной нагрузки и формы отверстия; инвариант же напряжений постояен во всей пластинке. Для установления связи между постулируемыми однородными напряжениями в овале и переменными напряжениями в пластинке произведем осреднение напряжений пластинки по обеим координатам.

Осреднение по переменной  $R = r^2$  (отвечающей ширине преобразованного овала) на бесконечном интервале  $1 \leq R \leq \infty$  произведем по формуле

$$P^*(\theta) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{R-1} \int_1^R P(R, \theta) dR \right).$$

С этой целью равенства (25) представим в виде

$$P_{rr} = 2A - B \cos 2\theta + k_1, \quad P_{\theta\theta} = 2A + B \cos 2\theta + k_2, \quad P_{r\theta} = B \sin 2\theta + k_3, \quad I = 4A, \quad (26)$$

где  $k_\sigma = H(\alpha_\sigma R + \beta_\sigma)/(R^2 + bR + c)$  ( $\sigma = 1, 2, 3$ ). Здесь  $\alpha_1 = -(1 - m^2 \cos 4\theta)$ ,  $\beta_1 = m(1 - m^2) \cos 2\theta$ ,  $R = r^2$ ,  $\alpha_2 = 1 - m^2 \cos 4\theta$ ,  $\beta_2 = -m(1 - m^2) \cos 2\theta$ ,  $b = -2m \cos 2\theta$ ,  $\alpha_3 = -m^2 \sin 4\theta$ ,  $\beta_3 = m(1 + m^2) \sin 2\theta$ ,  $c = m^2$ . Отметим, что дискриминант  $\gamma$  входящего в знаменатель выражения для  $k_\sigma$  квадратного трехчлена отрицателен:

$$\gamma = b^2 - 4c = -4m^2 \sin^2 2\theta < 0.$$

Среднее по  $R$  значение функции  $k_\sigma$  на конечном интервале  $(1, R)$ , вычисленное в соответствии с [11] для случая  $\gamma < 0$ , определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{1}{R-1} \int_1^R k_\sigma(R, \theta) dR &= \frac{H}{R-1} \int_1^R \frac{\alpha_\sigma R + \beta_\sigma}{R^2 + bR + c} dR = \\ &= \frac{H}{R-1} \left[ \frac{\alpha_\sigma}{2} \ln \frac{R^2 + bR + c}{1 + b + c} + \frac{2\beta_\sigma - b\alpha_\sigma}{\sqrt{-\gamma}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2R + b}{\sqrt{-\gamma}} - \operatorname{arctg} \frac{2 + b}{\sqrt{-\gamma}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Переходя в нем к пределу при  $R \rightarrow \infty$  и раскрывая неопределенность, устанавливаем, что среднее значение функции на бесконечном интервале обращается в нуль:

$$k_\sigma^*(\theta) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{R-1} \int_1^R k_\sigma(R, \theta) dR \right] = H \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{\alpha_\sigma}{2} \frac{2R + b}{R^2 + bR + c} + 2 \frac{2\beta_\sigma - b\alpha_\sigma}{(2R + b)^2 - \gamma} \right] = 0. \quad (27)$$

На основании (27) средние по  $R$  значения напряжений (26) (которые можно считать определенными на контуре отверстия) имеют вид

$$P_{rr}^* = 2A - B \cos 2\theta, \quad P_{\theta\theta}^* = 2A + B \cos 2\theta, \quad P_{r\theta}^* = B \sin 2\theta, \quad I^* = 4A. \quad (28)$$

Они зависят от переменной  $\theta$  и не зависят от формы отверстия.

Повторное осреднение напряжений (28) по переменной  $\theta$  (отвечающей длине овала) по формулам вида

$$P^{**} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P^*(\theta) d\theta$$

приводит к однородному контурному полю средних напряжений, в котором отсутствует напряжение сдвига:

$$P_{rr}^{**} = 2A, \quad P_{\theta\theta}^{**} = 2A, \quad P_{r\theta}^{**} = 0, \quad I^{**} = 4A. \quad (29)$$



Заметим, что на контуре отверстия ( $r = 1$ ) наряду со средними напряжениями постоянны также неосредненные напряжения в эллиптических координатах и их инвариант (25):

$$\begin{aligned} P_{rr}^1 &= 2A - H = q = -k\sigma, & P_{\theta\theta}^1 &= 2A + H = \sigma, & P_{r\theta}^1 &= 0, \\ I^1 &= P_{rr}^1 + P_{\theta\theta}^1 = 4A = (1 - k)\sigma, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $\sigma$  определено формулой (17) (здесь и далее значения величин при  $r = 1$  обозначены верхним индексом 1).

Таким образом, однородными характеристиками поля напряжений пластинки могут служить либо инвариант напряжений (25), либо осредненные напряжения (29), либо контурные напряжения (30). Сопоставим указанным величинам напряжений соответствующие величины деформаций и, опираясь на закон Гука для пластинки, установим их связь друг с другом.

Закон Гука, записанный в эллиптических координатах, имеет вид

$$P_{rr} = \lambda_0 J + 2\mu \varepsilon_{rr}, \quad P_{\theta\theta} = \lambda_0 J + 2\mu \varepsilon_{\theta\theta}, \quad P_{r\theta} = 2\mu \varepsilon_{r\theta}, \quad (31)$$

тогда

$$I = 2(\lambda_0 + \mu)J, \quad I = P_{rr} + P_{\theta\theta}, \quad J = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}. \quad (32)$$

Средним напряжениям (29) отвечают величины деформаций и их инвариант  $\varepsilon_{rr}^{**}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}^{**}$ ,  $\varepsilon_{r\theta}^{**}$ ,  $J^{**}$ . Осреднение закона (31) по обеим координатам дает следующие связи между средними величинами:

$$P_{rr}^{**} = \lambda_0 J^{**} + 2\mu \varepsilon_{rr}^{**}, \quad P_{\theta\theta}^{**} = \lambda_0 J^{**} + 2\mu \varepsilon_{\theta\theta}^{**}, \quad P_{r\theta}^{**} = 2\mu \varepsilon_{r\theta}^{**}, \quad I^{**} = 2(\lambda_0 + \mu)J^{**}. \quad (33)$$

Из равенств (29) и (33) следуют отсутствие осредненной деформации сдвига ( $\varepsilon_{r\theta}^{**} = 0$ ) и пропорциональность средних инвариантов. Те же равенства приводят к соотношениям  $2P_{rr}^{**} = 2P_{\theta\theta}^{**} = I^{**}$ ,  $2\varepsilon_{rr}^{**} = 2\varepsilon_{\theta\theta}^{**} = J^{**}$ , которые вместе со связью инвариантов (33) устанавливают пропорциональность одноименных средних компонентов напряжений и деформаций

$$P_{rr}^{**} = 2(\lambda_0 + \mu)\varepsilon_{rr}^{**}, \quad P_{\theta\theta}^{**} = 2(\lambda_0 + \mu)\varepsilon_{\theta\theta}^{**}. \quad (34)$$

Таким образом, у диагональных компонентов (34) коэффициенты пропорциональности одинаковы и такие же, как у инвариантов (32).

Контурным напряжениям (30) соответствуют компоненты и инвариант контурных деформаций  $\varepsilon_{rr}^1$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}^1$ ,  $\varepsilon_{r\theta}^1$ ,  $J^1$ . Связь между ними устанавливается равенствами (31), (32), представленными при  $r = 1$ :

$$P_{rr}^1 = \lambda_0 J^1 + 2\mu \varepsilon_{rr}^1, \quad P_{\theta\theta}^1 = \lambda_0 J^1 + 2\mu \varepsilon_{\theta\theta}^1, \quad P_{r\theta}^1 = 2\mu \varepsilon_{r\theta}^1; \quad (35)$$

$$I^1 = 2(\lambda_0 + \mu)J^1, \quad I^1 = P_{rr}^1 + P_{\theta\theta}^1, \quad J^1 = \varepsilon_{rr}^1 + \varepsilon_{\theta\theta}^1. \quad (36)$$

Из соотношений (30), (35) и (36) следует, что на контуре отсутствует деформация сдвига ( $\varepsilon_{r\theta}^1 = 0$ ) и инварианты напряжений и деформаций пропорциональны друг другу (равенство (36)), а также пропорциональность диагональных компонентов как напряжений, так и деформаций:

$$P_{rr}^1 = -kP_{\theta\theta}^1, \quad ((1+k)\lambda_0 + 2\mu)\varepsilon_{rr}^1 = -((1+k)\lambda_0 + 2k\mu)\varepsilon_{\theta\theta}^1.$$

Следствием этих равенств является представление инвариантов через диагональные компоненты

$$I^1 = -\frac{1-k}{k} P_{rr}^1 = (1-k)P_{\theta\theta}^1, \quad J^1 = -\frac{2\mu(1-k)}{(1+k)\lambda_0 + 2k\mu} \varepsilon_{rr}^1 = \frac{2\mu(1-k)}{(1+k)\lambda_0 + 2\mu} \varepsilon_{\theta\theta}^1. \quad (37)$$

Подставляя (37) в формулу (36), получим

$$P_{rr}^1 = \frac{4k\mu(\lambda_0 + \mu)}{(1+k)\lambda_0 + 2k\mu} \varepsilon_{rr}^1, \quad P_{\theta\theta}^1 = \frac{4\mu(\lambda_0 + \mu)}{(1+k)\lambda_0 + 2\mu} \varepsilon_{\theta\theta}^1. \quad (38)$$

Зависимости (38) аналогичны (34), но отличаются от последних коэффициентами. Если в (34) они одинаковы и зависят только от упругих постоянных, то в (38) они различны и в них еще входит параметр  $k$ . Последний, как следует из (24), представим через параметр  $m$ :  $k = (\chi - m)/(\chi + m)$ , поэтому коэффициенты в (38) наряду с упругими свойствами косвенно учитывают и форму отверстия.

**3.** Принятое допущение об однородности напряжений в нити ткани и введенные характеристики поля напряжений в пластинке, не зависящие от точки, позволяют моделировать механическое поведение нити при растяжении на основе одного из следующих допущений.

Нитяной овал имеет небольшую толщину, поэтому напряжение  $\tau$  в нем и деформация  $e$  являются нормальными компонентами тензоров напряжений и деформаций на площадках, ортогональных оси овала. Эта ось близка к внутренней границе овала, являющейся  $\theta$ -осью эллиптических координат пластинки. Тем самым величинам  $\tau$  и  $e$  овала на указанных площадках отвечают величины  $P_{\theta\theta}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  контура отверстия пластинки. Поэтому можно принять, что меры напряженно-деформированного состояния овала  $\tau^*$ ,  $e^*$  определяются соответствующими осредненными мерами пластинки  $P_{\theta\theta}^{**}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}^{**}$  и связь (34) между ними дает закон механического поведения нити (первая модель)

$$\tau^* = \alpha^* e^*, \quad \tau^* = P_{\theta\theta}^{**}, \quad e^* = \varepsilon_{\theta\theta}^{**}, \quad \alpha^* = 2(\lambda_0 + \mu), \quad (39)$$

либо характеристики овала  $\tau^1$ ,  $e^1$  определяются контурными величинами  $P_{\theta\theta}^1$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}^1$  пластинки, и тогда закон поведения нити выражается зависимостью (38) (вторая модель):

$$\tau^1 = \alpha^1 e^1, \quad \tau^1 = P_{\theta\theta}^1, \quad e^1 = \varepsilon_{\theta\theta}^1, \quad \alpha^1 = 4\mu(\lambda_0 + \mu)/((1+k)\lambda_0 + 2\mu). \quad (40)$$

Можно основываться и на иных допущениях: например, принять, что напряжение и деформация овала  $\tau^0$ ,  $e^0$  определяются инвариантами  $I$  и  $J$  полей напряжений и деформаций пластинки и законом поведения нити является зависимость (31) (третья модель):

$$\tau^0 = \alpha^0 e^0, \quad \tau^0 = I, \quad e^0 = J, \quad \alpha^0 = 2(\lambda_0 + \mu). \quad (41)$$

Модели (39)–(41) имеют однотипную структуру. Коэффициенты пропорциональности в них обладают свойствами  $\alpha^0 = \alpha^* \neq \alpha^1$ , поэтому (39) и (41) являются идентичными, а (39) и (40) — альтернативными закономерностями, в силу чего далее рассматриваются только модели (39) и (40). Другое свойство этих коэффициентов  $\alpha^*/\alpha^1 = 1 + \lambda_0(1+k)/(2\mu) > 1$  показывает, что закон (39) дает более быстрый рост напряжений, чем (40).

Каждая из моделей (39), (40) позволяет представить деформацию нити ткани в зависимости от задаваемых величин и величин, находимых из экспериментов. Действительно, в этих моделях напряжения известны и в соответствии с (2), (9), (17), (29) и (30) определяются формулами

$$\tau^* = P_{\theta\theta}^{**} = 2A = (P_{xx}^\infty + P_{yy}^\infty)/2 = (Fd + Gl)/(2hld),$$

$$\tau^1 = P_{\theta\theta}^1 = 4A(1-k) = (P_{xx}^\infty + P_{yy}^\infty)/(1-k) = (Fd + Gl)/((1-k)hld).$$

Что касается коэффициентов пропорциональности в этих законах, то с помощью формул связи между упругими постоянными разных видов [6, 12]

$$\lambda = E\nu/((1-2\nu)(1+\nu)), \quad \mu = E/(2(1+\nu)),$$

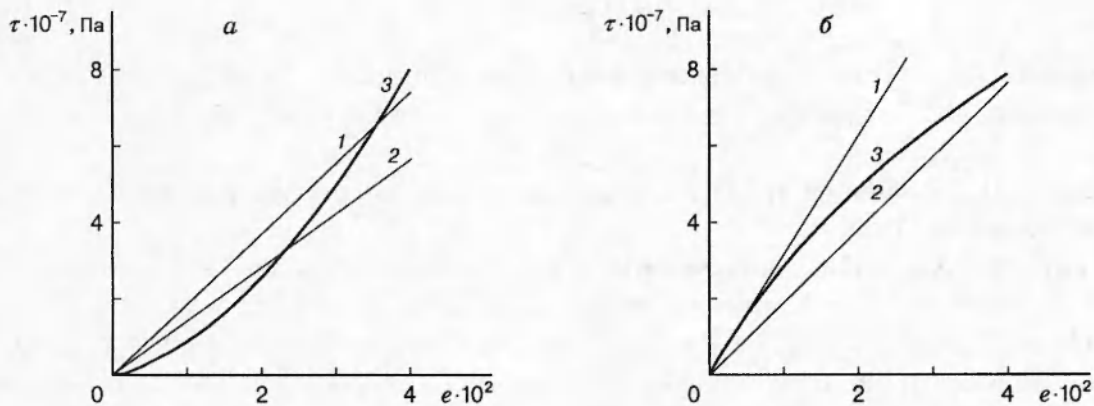


Рис. 5. Кривые растяжения нитей пряжи и трикотажного полотна:

*a* — хлопок, *б* — шерсть; 1 — первая модель, 2 — вторая модель, 3 — эксперимент

где  $E$  — модуль Юнга, а  $\nu$  — коэффициент Пуассона (определяемые экспериментально), им можно придать вид  $\alpha^* = E/(1 - \nu)$ ,  $\alpha^1 = E/(1 + k\nu)$ . В итоге альтернативные друг другу законы поведения нити (39), (40) представимы в форме

$$e^* = \frac{1 - \nu}{2E} \frac{Fd + Gl}{hld}, \quad e^1 = \frac{1 + k\nu}{E(1 - k)} \frac{Fd + Gl}{hld}. \quad (42)$$

Таким образом, согласно предложенным математическим моделям деформация нити ткани определяется как геометрическими параметрами полотна и приложенными к нему силами, так и прочностными свойствами материала. Каждая из формул (42) позволяет по задаваемым величинам вычислять деформацию нити и по ней составлять диаграммы растяжения.

Экспериментально установлено [4, с. 107–110], что при двухосном растяжении гладких тканых и вязаных материалов вдоль рядов и колонок петель происходит их упрочнение. Экспериментальные кривые нагрузка  $f_i$  (на единичную ширину) — деформация  $\varepsilon_i$  аппроксимировались нелинейными уравнениями  $f_i = c_i \varepsilon_i^\omega$  ( $i = 1, 2$ ), в которых  $c_i$ ,  $\omega$  — постоянные. В области малых деформаций данные зависимости допускают линеаризацию (на основе равенств  $\varepsilon_i^\omega \approx \varepsilon_i$ )  $f_i = c_i \varepsilon_i$  ( $i = 1, 2$ ), которая дает приемлемое согласие с экспериментом. Сопоставление этих функций с зависимостями (39) и (40) обнаруживает их однотипность. Таким образом, при малых деформациях теоретические закономерности подобны линеаризированным экспериментальным закономерностям.

Количественное соотношение теоретических и экспериментальных результатов показано на рис. 5, где представлены опытные кривые 3 растяжения нитей из хлопчатобумажной и шерстяной пряжи и теоретические прямые 1, 2 растяжения нитей в трикотажных полотнах из соответствующих материалов (1 — первая модель, 2 — вторая модель). Для нитей пряжи использовались опытные данные, приведенные в [3, с. 132]; расчет растяжения нити в полотне производился на основе прочностных характеристик, указанных в [3, с. 173, 209]:

— хлопок:  $E = 135 \cdot 10^7$  Па,  $\nu = 0,3$ ,  $k = 0,1$ ,  $\alpha^* = 193 \cdot 10^7$  Па,  $\alpha^1 = 131 \cdot 10^7$  Па;

— шерсть:  $E = 170 \cdot 10^7$  Па,  $\nu = 0,42$ ,  $k = 0,1$ ,  $\alpha^* = 293 \cdot 10^7$  Па,  $\alpha^1 = 163 \cdot 10^7$  Па.

Анализ результатов показывает, что теоретические кривые достаточно близки к экспериментальным, при этом первая модель аппроксимирует эксперимент преимущественно сверху, а вторая модель — снизу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Далидович А. С. Технология трикотажного производства. М.: Гизлегпром, 1939.
2. Кобляков А. И. Структура и механические свойства трикотажа. М.: Легкая индустрия, 1973.
3. Кукин Г. Н., Соловьев А. Н., Кобляков А. И. Текстильное материаловедение. М.: Легпромбытиздат, 1989.
4. Скардино Ф., Хирл Дж., Кавабата С. и др. Тканые конструкционные композиты / Под ред. Т.-В. Чу, Ф. Ко. Пер. с англ. под общ. ред. В. Д. Протасова. М.: Мир, 1991.
5. Leaf G. A. V. Models of the plane-knitted loop // J. Textil Inst. 1960. V. 51, N 2. P. 49.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
7. Колосов Г. В. Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости. М.: ОНТИ, 1935.
8. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 6. С. 963–979.
9. Бондарь В. Д. Равнопрочное отверстие в условиях геометрической нелинейности // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 148–155.
10. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М.: Физматгиз, 1961.
11. Смолянский М. Л. Таблицы неопределенных интегралов. М.: Физматгиз, 1963.
12. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. Т. 2.

*Поступила в редакцию 16/1 1998 г.*

---