УДК 533

РЕГУЛЯРНЫЕ ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЕФЕКТА 1 УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИКИ

С. В. Головин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: sergey@hydro.nsc.ru

Построены все неприводимые регулярные частично инвариантные подмодели с одной неинвариантной функцией для уравнений идеальной магнитогидродинамики. Подмодели приведены в инволюцию, выполнено их частичное интегрирование. Полученные подмодели задают либо движения типа вихря Овсянникова, либо движения с однородной деформацией по некоторым пространственным направлениям.

Ключевые слова: идеальная магнитная гидродинамика, частично инвариантные решения, переопределенные системы дифференциальных уравнений.

Введение. Понятие частично инвариантного решения как естественного обобщения инвариантных решений дифференциальных уравнений впервые предложено в работах Л. В. Овсянникова [1, 2]. Построенные многочисленные примеры частично инвариантных решений для уравнений газовой динамики (см. [3–6], а также работу [7] и библиографию к ней), гидродинамики [8–10], динамики вязкого теплопроводного газа [11], магнитогидродинамики [12, 13], уравнений упругости и пластичности [15, 16], уравнений других моделей механики и физики [17–19] свидетельствуют о содержательности данного обобщения. В отличие от инвариантных частично инвариантные подмодели задаются переопределенной системой уравнений, что усложняет их анализ, но позволяет получить классы решений, обладающих бо́льшим произволом по сравнению с инвариантными решениями.

Общая теория частично инвариантных решений дифференциальных уравнений изложена в [20]. Используемое на практике понятие регулярности частично инвариантного решения введено в [21]. При анализе частично инвариантных решений важным свойством является редуцируемость: в некоторых случаях частично инвариантные решения совпадают с инвариантными решениями того же ранга. Обнаружение редукции решения важно, поскольку это избавляет от выполнения большого объема лишней работы по приведению уравнений подмодели в инволюцию. Известные достаточные признаки редукции некоторых специальных классов частично инвариантных решений приведены в [20, 22].

Для упрощения и систематизации исследования множества частично инвариантных подмоделей заданной системы дифференциальных уравнений в работе [23] введено понятие иерархии частично инвариантных решений. Наличие иерархической структуры позволяет свести построение множества всех частично инвариантных подмоделей к анализу только неприводимых подмоделей, из которых все остальные получаются путем инвариантной редукции, что значительно упрощает вычисления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00047) и в рамках Программ Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-2826.2008.1) и молодых кандидатов наук (грант № МК-1521.2007.1).

В настоящей работе выполнен анализ регулярных частично инвариантных решений для уравнений идеальной магнитогидродинамики. Исследованы только небарохронные подмодели, в которых давление является функцией пространственных координат. Множество барохронных подмоделей предполагается исследовать отдельно по аналогии с барохронными подмоделями в газовой динамике [24]. Выделено восемь типов неприводимых подмоделей. Уравнения всех подмоделей с одной неинвариантной функцией приведены в инволюцию, получены уравнения подмодели, более простые по сравнению с уравнениями исходной модели. Получены первые интегралы подмоделей. Установлено, что найденные регулярные частично инвариантные подмодели для уравнений идеальной магнитогидродинамики либо являются вихрем Овсянникова и его обобщениями, либо соответствуют движениям с однородной деформацией по некоторым пространственным переменным. Следует отметить, что в общем случае решения уравнений магнитогидродинамики с однородной деформацией по всем пространственным переменным изучались в работе [25]. В настоящей работе проведен только математический анализ подмоделей, физическое содержание полученных решений является предметом отдельного исследования.

1. Классификация частично инвариантных решений. Рассматриваются уравнения идеальной магнитной гидродинамики [26]

$$\begin{gathered} D\rho + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \qquad D\boldsymbol{u} + \rho^{-1}\nabla(p + \boldsymbol{B}^2/2) - \rho^{-1}(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} = 0, \\ Dp + A(p,\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \qquad D\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\operatorname{div}\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = 0, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \qquad D = \partial_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости; $\boldsymbol{B} = (H, K, L)$ — вектор напряженности магнитного поля; p, ρ — давление и плотность. Справедливо уравнение состояния $p = F(S, \rho)$ с энтропией S. Функция $A(p, \rho)$ определяется уравнением состояния $A = \rho\,(\partial F/\partial\rho)$. Все функции зависят от времени t и декартовых координат $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$.

Уравнения (1.1) допускают 11-мерную группу преобразований G_{11}, являющуюся расширением (с помощью гомотетии) группы Галилея [18, 27]. Соответствующая ей алгебра Ли L_{11} порождается следующими базисными операторами:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_y, \qquad X_3 = \partial_z, \\ X_4 = t\,\partial_x + \partial_u, \qquad X_5 = t\,\partial_y + \partial_v, \qquad X_6 = t\,\partial_z + \partial_w, \\ X_7 = y\,\partial_z - z\,\partial_y + v\,\partial_w - w\,\partial_v + K\,\partial_L - L\,\partial_K, \\ X_8 = z\,\partial_x - x\,\partial_z + w\,\partial_u - u\,\partial_w + L\,\partial_H - H\,\partial_L, \\ X_9 = x\,\partial_y - y\,\partial_x + u\,\partial_v - v\,\partial_u + H\,\partial_K - K\,\partial_H, \\ X_{10} = \partial_t, \qquad X_{11} = t\,\partial_t + x\,\partial_x + y\,\partial_y + z\,\partial_z. \end{gathered}$$

В силу строения операторов алгебры L_{11} частично инвариантные решения уравнений магнитной гидродинамики порождаются теми же представителями оптимальной системы, что и в уравнениях газовой динамики в отсутствие магнитного поля. Поэтому при их построении можно использовать имеющиеся результаты [3–6]. Ниже рассматриваются только небарохронные частично инвариантные решения, т. е. решения, в которых давление p зависит от пространственных координат.

В работе [23] дана классификация неприводимых небарохронных регулярных частично инвариантных решений уравнений (1.1), построенных на подалгебрах алгебры Ли L_{11}. Показано, что в класс неприводимых регулярных небарохронных частично инвариантных подмоделей для уравнений идеальной магнитогидродинамики (1.1) входят следующие подмодели:

1) подмодель $\{X_1, X_4\}$ ранга 3 дефекта 1;

2) подмодели

$$\begin{gathered}\{X_2,\ X_3,\ X_7\}, \qquad \{X_5,\ X_6,\ X_7\}, \qquad \{X_7,\ X_8,\ X_9\},\\ \{X_3+X_5,\ X_2-X_6,\ X_7\}, \qquad \{X_3,\ X_5,\ X_2+X_6\}\end{gathered} \tag{1.2}$$

ранга 2 дефекта 1;

3) подмодель $\{X_2, X_3, X_5, X_6\}$ ранга 2 дефекта 2;

4) подмодель $\{X_2, X_3, X_5, X_6, X_7\}$ ранга 2 дефекта 3.

Ниже построены все частично инвариантные подмодели уравнений (1.1) дефекта 1. Уравнения каждой подмодели приведены в инволюцию и исследованы на нередуцируемость. В окончательном виде каждая подмодель представлена системой уравнений с меньшим по сравнению с исходной системой числом неизвестных. Уравнения для неинвариантной функции во всех случаях полностью проинтегрированы.

2. Подмодель ранга 3. Рассмотрим частично инвариантное решение, порождаемое двумерной подалгеброй $\{X_1, X_4\}$. Инвариантами подалгебры являются все независимые переменные и искомые функции, кроме первой декартовой координаты x и первой компоненты вектора скорости u. Для получения представления решения все искомые величины, кроме функции u, будем считать зависящими только от времени t и декартовых координат y, z. Соответствующие инвариантные компоненты вектора скорости обозначим V и W. Неинвариантную функцию u будем считать зависящей от всех исходных независимых переменных: $u = u(t, x, y, z)$.

Из первого уравнения системы (1.1) (уравнения неразрывности) следует, что u зависит от x линейно, т. е. определяет движение с однородной деформацией в направлении оси Ox (тензор скоростей деформации не зависит от координаты x). Для функции u выберем следующее представление:

$$u = xU(t, y, z) + M(t, y, z).$$

Полученное представление решения подставим в систему (1.1) и приравняем к нулю коэффициенты при нулевой и первой степени переменной x. В результате получим следующие уравнения подмодели:

$$\tilde{D}\rho + \rho(U + V_y + W_z) = 0; \tag{2.1а}$$

$$\tilde{D}U + U^2 = 0; \tag{2.1б}$$

$$\tilde{D}M + UM - \rho^{-1}(KH_y + LH_z) = 0; \tag{2.1в}$$

$$\tilde{D}V + \rho^{-1}p_y + \rho^{-1}(HH_y + LL_y - LK_z) = 0; \tag{2.1г}$$

$$\tilde{D}W + \rho^{-1}p_z + \rho^{-1}(HH_z + KK_z - KL_y) = 0; \tag{2.1д}$$

$$\tilde{D}p + A(p, \rho)(U + V_y + W_z) = 0; \tag{2.1е}$$

$$\tilde{D}H + H(V_y + W_z) - KM_y - LM_z = 0; \tag{2.1ж}$$

$$\tilde{D}K + K(U + W_z) - LV_z = 0; \tag{2.1з}$$

$$\tilde{D}L + L(U + V_y) - KW_y = 0; \tag{2.1и}$$

$$KU_y + LU_z = 0; \tag{2.1к}$$

$$K_y + L_z = 0. \tag{2.1л}$$

Здесь $\tilde{D} = \partial_t + V\,\partial_y + W\,\partial_z$. Система (2.1) является переопределенной, поскольку содержит 11 уравнений для девяти искомых функций. Условием совместности уравнений (2.1б) и (2.1к) для функции U является соотношение

$$U_z(\tilde{D}L - KW_y - LW_z) + U_y(\tilde{D}K - KV_y - LV_z) = 0.$$

С учетом (2.1з) и (2.1и) это уравнение сводится к следующему:

$$(KU_y + LU_z)(U + V_y + W_z) = 0.$$

В силу (2.1к) последнее уравнение выполнено тождественно. При проверке совместности уравнения (2.1л) с остальными уравнениями системы заметим, что имеет место тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(2.1\text{л}) = \frac{\partial}{\partial y}\,((2.1\text{з}) - V(2.1\text{л})) + \frac{\partial}{\partial z}\,((2.1\text{и}) - W(2.1\text{л})) - (2.1\text{к}) - U(2.1\text{л}).$$

Здесь (2.1х) — левые части соответствующих уравнений. Таким образом, если равенство (2.1л) выполняется для начальных данных при $t = 0$, то оно выполняется и во все последующие моменты времени. Это означает, что система (2.1) является переопределенной системой в инволюции. Покажем, что переопределенность системы уравнений можно уменьшить за счет частичного интегрирования.

В силу (2.1л) для некоторой гладкой функции ψ имеем

$$K = -\psi_z, \qquad L = \psi_y. \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (2.1к), получим уравнение $-U_y\psi_z + U_z\psi_y = 0$, из которого следует функциональная зависимость $U = U(\psi)$. Из уравнения (2.1б) находим

$$\Big(\frac{1}{U(\psi)}\Big)'\tilde{D}\psi = 1. \tag{2.3}$$

Здесь и далее штрих означает производную по ψ. Дифференцируя уравнение (2.3) по y и z, получаем

$$V_y\psi_y + W_y\psi_z + \tilde{D}\psi_y = \Big(\frac{1}{(1/U(\psi))'}\Big)'\psi_y, \qquad V_z\psi_y + W_z\psi_z + \tilde{D}\psi_z = \Big(\frac{1}{(1/U(\psi))'}\Big)'\psi_z.$$

Сравнивая последние уравнения с уравнениями (2.1з), (2.1и) в нетривиальном случае $\psi_y^2 + \psi_z^2 \neq 0$, для функции $U(\psi)$ имеем уравнение

$$\Big(\frac{1}{(1/U(\psi))'}\Big)' + U = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим $U = C_1\,\mathrm{e}^{C_2\psi}$ с произвольными константами C_1 и C_2. Уравнение (2.1б) становится уравнением для функции ψ: $\tilde{D}(\mathrm{e}^{-C_2\psi}) = C_1$. Таким образом, удалось проинтегрировать уравнения (2.1б), (2.1з)–(2.1л). Остальные уравнения системы (2.1) представляют собой совместную систему уравнений для определения всех искомых функций.

3. Подмодели ранга 2. Существует пять подмоделей (1.2) ранга 2. Подмодели $\{X_7, X_8, X_9\}$ и $\{X_2, X_3, X_7\}$, называемые сферическим и плоским вихрями Овсянникова, изучены в работах [12, 13] соответственно. Ниже рассматриваются остальные три подмодели.

3.1. *Подмодель* $\{X_5, X_6, X_7\}$. Данная подмодель аналогична плоскому вихрю Овсянникова [13]. Представление решения запишем в виде

$$\begin{gathered}
u = U(t,x), \quad v = y/t + V(t,x)\cos\omega(t,x,y,z), \quad w = z/t + V(t,x)\sin\omega(t,x,y,z),\\
H = H(t,x), \quad K = N\cos\left(\omega(t,x,y,z) + \sigma(t,x)\right), \quad L = N\sin\left(\omega(t,x,y,z) + \sigma(t,x)\right),\\
p = p(t,x), \qquad \rho = \rho(t,x).
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Подставим представление (3.1) в систему (1.1). В силу уравнения неразрывности введем вспомогательную инвариантную функцию $h(t,x)$, определяемую уравнением

$$\tilde{D}\rho + \rho(U_x + 2/t + hV) = 0, \qquad \tilde{D} = \partial_t + U\,\partial_x. \tag{3.2}$$

Из оставшейся части уравнения неразрывности получим соотношение для неинвариантной функции ω:

$$\sin\omega\,\omega_y - \cos\omega\,\omega_z + h = 0. \tag{3.3}$$

Из первых компонент векторных уравнений импульса и индукции, а также из уравнения для давления найдем соотношения, связывающие только инвариантные функции:

$$\begin{gathered}\tilde{D}U + \rho^{-1}p_x + \rho^{-1}NN_x = 0,\\ \tilde{D}H + H(2t^{-1} + hV) = 0,\\ \tilde{D}p + A(p,\rho)(U_x + 2t^{-1} + hV) = 0.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Остальные уравнения системы (1.1) образуют переопределенную систему для функции ω. Составляя невырожденные линейные комбинации уравнений импульсов в проекциях на оси Oy и Oz, получим

$$\begin{multline}\rho V\omega_t + (\rho UV - HN\cos\sigma)\omega_x + (\rho V(yt^{-1} + V\cos\omega) - N^2\cos\sigma\cos(\omega+\sigma))\omega_y +\\ + (\rho V(zt^{-1} + V\sin\omega) - N^2\cos\sigma\sin(\omega+\sigma))\omega_z - H(N_x\sin\sigma + N\cos\sigma\sigma_x) = 0;\end{multline} \tag{3.5}$$

$$\begin{multline}HN\sin\sigma\,\omega_x + N^2\sin\sigma\cos(\omega+\sigma)\,\omega_y + N^2\sin\sigma\sin(\omega+\sigma)\,\omega_z +\\ + \rho\tilde{D}V + HN\sin\sigma\,\sigma_x - HN_x\cos\sigma + t^{-1}V\rho = 0.\end{multline} \tag{3.6}$$

Составив аналогичные комбинации двух остальных проекций уравнения индукции, имеем следующие уравнения:

$$\begin{multline}N\omega_t + (NU - HV\cos\sigma)\,\omega_x + N(V\sin\sigma\sin(\omega+\sigma) + yt^{-1})\,\omega_y -\\ - N(V\sin\sigma\cos(\omega+\sigma) - zt^{-1})\,\omega_z + N\tilde{D}\sigma + HV_x\sin\sigma = 0;\end{multline} \tag{3.7}$$

$$\begin{multline}HV\sin\sigma\,\omega_x + NV\cos\sigma\sin(\omega+\sigma)\,\omega_y -\\ - NV\cos\sigma\cos(\omega+\sigma)\,\omega_z - \tilde{D}N + HV_x\cos\sigma - N(U_x + t^{-1}) = 0.\end{multline} \tag{3.8}$$

Наконец, из последнего уравнения в (1.1) следует

$$N(\sin(\omega+\sigma)\omega_y - \cos(\omega+\sigma)\,\omega_z) - H_x = 0. \tag{3.9}$$

Переопределенная система (3.3), (3.5)–(3.9) содержит шесть уравнений для одной функции ω. Будем искать такие решения этой системы, в которых ω находится с функциональным произволом. Для этого в данных уравнениях приравняем к нулю все ранговые миноры матрицы, составленной из коэффициентов при производных функции ω. Как и в случаях плоского и сферического вихрей Овсянникова [12, 13], это условие выполняется и из него следует нетривиальное решение только при $\sigma = 0$ или $\sigma = \pi$. Будем считать, что $\sigma = 0$, а N может иметь произвольный знак. В этом случае система уравнений подмодели сводится к следующей. Инвариантную часть системы образуют уравнения (3.2), (3.4). При $\sigma = 0$ уравнение (3.6) редуцируется к уравнению

$$\rho\tilde{D}V - HN_x + t^{-1}V\rho = 0.$$

С учетом (3.3) из уравнения (3.8) получаем

$$\tilde{D}N + NU_x - HV_x + N(hV + t^{-1}) = 0.$$

Наконец, уравнение (3.9) с учетом (3.3) запишем в виде

$$H_x + hN = 0.$$

Неинвариантную функцию ω определим из уравнений (3.3), (3.5), (3.7). Исключив производную ω_t, получим классифицирующее соотношение

$$(\rho V^2 - N^2)(H\omega_x + N(\cos\omega\,\omega_y + \sin\omega\,\omega_z)) = 0.$$

Ниже рассматривается только случай равенства нулю второго множителя в этом соотношении (условие сохранения ω вдоль магнитных силовых линий). Выведем условия совместности уравнений для ω. Используя стандартную процедуру, получим следующие уравнения для инвариантных функций:

$$N\tilde{D}h - HVh_x + t^{-1}hN = 0, \qquad Hh_x + h^2N = 0.$$

Как и в плоском вихре Овсянникова, при $h \neq 0$ имеем интеграл

$$H = t^{-1}H_0h$$

с произвольной константой H_0. Окончательно систему уравнений для инвариантных функций запишем в следующем виде:

$$\begin{gathered}\tilde{D}\rho + \rho(U_x + 2t^{-1} + hV) = 0,\\ \tilde{D}U + \rho^{-1}p_x + \rho^{-1}NN_x = 0,\\ \tilde{D}V - \rho^{-1}t^{-1}H_0hN_x + t^{-1}V = 0,\\ \tilde{D}p + A(p,\rho)(U_x + 2t^{-1} + hV) = 0,\\ \tilde{D}N - t^{-1}H_0hV_x + N(U_x + t^{-1} + hV) = 0,\\ \tilde{D}h + Vh^2 + t^{-1}h = 0, \qquad t^{-1}H_0h_x + hN = 0.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Условием совместности двух последних уравнений для функции h является уравнение для N той же системы. Таким образом, система (3.10) находится в инволюции.

Рассмотрим систему для определения неинвариантной функции ω. Как и в случае плоского и сферического вихрей Овсянникова, функция ω сохраняется вдоль траекторий частиц и вдоль магнитных силовых линий. При $h \neq 0$ общее решение подсистемы для неинвариантной функции имеет следующий вид:

$$F\Big(\frac{y}{t} - \frac{\cos\omega}{th}, \frac{z}{t} - \frac{\sin\omega}{t\,h}\Big) = 0 \tag{3.11}$$

(F — произвольная гладкая функция). Таким образом, решение свелось к исследованию системы уравнений в инволюции (3.10) и конечного соотношения (3.11), которое может быть выполнено аналогично исследованию плоского вихря Овсянникова [14].

3.2. *Подмодель* $\{X_3 + X_5, X_2 - X_6, X_7\}$. Представление решения запишем в виде

$$\begin{gathered}u = U(t,x), \quad v = \frac{ty+z}{t^2+1} + V(t,x)\cos\omega(t,x,y,z), \quad w = \frac{tz-y}{t^2+1} + V(t,x)\sin\omega(t,x,y,z),\\ H = H(t,x), \quad K = N\cos(\omega(t,x,y,z) + \sigma(t,x)), \quad L = N\sin(\omega(t,x,y,z) + \sigma(t,x)),\\ p = p(t,x), \qquad \rho = \rho(t,x).\end{gathered} \tag{3.12}$$

Подставим представление (3.12) в систему (1.1). Как и выше, в силу уравнения неразрывности функцию $h(t,x)$ определим следующим образом:

$$\tilde{D}\rho + \rho\Big(U_x + \frac{2t}{t^2+1} + hV\Big) = 0, \qquad \tilde{D} = \partial_t + U\,\partial_x. \tag{3.13}$$

Для функции ω имеем

$$\sin\omega\,\omega_y - \cos\omega\,\omega_z + h = 0. \tag{3.14}$$

Запишем соотношения для инвариантных функций:

$$\begin{gathered}
\tilde{D}U + \rho^{-1}p_x + \rho^{-1}NN_x = 0, \\
\tilde{D}H + H(2t(t^2+1)^{-1} + hV) = 0, \\
\tilde{D}p + A(p,\rho)(U_x + 2t(t^2+1)^{-1} + hV) = 0.
\end{gathered} \tag{3.15}$$

Из остальных уравнений системы (1.1) получим переопределенную систему для функции ω. Из уравнения импульсов находим

$$\begin{aligned}
&\rho V\omega_t + (\rho UV - HN\cos\sigma)\omega_x + \\
&\quad + (\rho V((ty+z)(t^2+1)^{-1} + V\cos\omega) - N^2\cos\sigma\cos(\omega+\sigma))\omega_y + \\
&\quad + (\rho V((tz-y)(t^2+1)^{-1} + V\sin\omega) - N^2\cos\sigma\sin(\omega+\sigma))\omega_z - \\
&\quad - H(N_x\sin\sigma + N\cos\sigma\sigma_x) - \rho V(t^2+1)^{-1} = 0;
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
&HN\sin\sigma\,\omega_x + N^2\sin\sigma\cos(\omega+\sigma)\,\omega_y + N^2\sin\sigma\sin(\omega+\sigma)\,\omega_z + \\
&\quad + \rho\tilde{D}V + HN\sin\sigma\,\sigma_x - HN_x\cos\sigma + t(t^2+1)^{-1}V\rho = 0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Из уравнений индукции выводим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&N\omega_t + (NU - HV\cos\sigma)\,\omega_x + N((ty+z)(t^2+1)^{-1} + V\sin\sigma\sin(\omega+\sigma))\,\omega_y - \\
&\quad - N(-(tz-y)(t^2+1)^{-1} + V\sin\sigma\cos(\omega+\sigma))\omega_z + N(\tilde{D}\sigma + (t^2+1)^{-1}) + \\
&\quad + HV_x\sin\sigma = 0;
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
&HV\sin\sigma\,\omega_x + NV\cos\sigma\sin(\omega+\sigma)\omega_y - \\
&\quad - NV\cos\sigma\cos(\omega+\sigma)\omega_z - \tilde{D}N + HV_x\cos\sigma - N(U_x + t(t^2+1)^{-1}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Последнее уравнение системы (1.1) приведем к виду

$$N(\sin(\omega+\sigma)\omega_y - \cos(\omega+\sigma)\,\omega_z) - H_x = 0. \tag{3.20}$$

Как и выше, функция ω определяется с функциональным произволом только при $\sin\sigma = 0$. В этом случае уравнения редуцируются к следующим. Инвариантную часть подмодели составляют уравнения (3.13), (3.15). При $\sin\sigma = 0$ из уравнения (3.17) получаем

$$\tilde{D}V - \rho^{-1}HN_x + t(t^2+1)^{-1}V = 0.$$

Из уравнения (3.19) находим

$$\tilde{D}N - HV_x + N(U_x + hV + t(t^2+1)^2) = 0.$$

Наконец, из (3.20) получаем

$$H_x + hN = 0.$$

Уравнения для неинвариантной функции ω выводятся из (3.14), (3.16) и (3.18). При $\sin\sigma = 0$ последние два уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
&\rho V\omega_t + (\rho UV - HN)\omega_x + (\rho V((ty+z)(t^2+1)^{-1} + V\cos\omega) - N^2\cos\omega)\omega_y + \\
&\quad + (\rho V((tz-y)(t^2+1)^{-1} + V\sin\omega) - N^2\sin\omega)\omega_z - (t^2+1)^{-1}\rho V = 0;
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
&N\omega_t + (NU - HV)\omega_x + N(ty+z)(t^2+1)^{-1}\omega_y + \\
&\quad + N(tz-y)(t^2+1)^{-1}\omega_z + (t^2+1)^{-1}N = 0.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Условие совместности уравнений (3.14) и (3.22) для функции ω запишем в терминах только инвариантных функций:

$$N\tilde{D}h - HVh_x + t(t^2+1)^{-1}hN = 0.$$

Из условия совместности уравнений (3.14) и (3.21) получим еще одно уравнение для функции ω:

$$((\rho V^2 - N^2)h\sin\omega + \rho V(t^2+1)^{-1}(t\sin\omega - 2\cos\omega))\omega_y - \\ - ((\rho V^2 - N^2)h\cos\omega + \rho V(t^2+1)^{-1}(t\cos\omega + 2\cos\omega))\omega_z - \\ - \rho V\tilde{D}h - HNh_x = 0. \qquad (3.23)$$

Последнее уравнение содержит производные от ω только по y и z. При $V \neq 0$ уравнения (3.14), (3.23) можно разрешить относительно этих производных. Выполнив перекрестное дифференцирование этих уравнений, найдем условие их совместности в виде

$$((\rho V\tilde{D}h - HNh_x)\sin\omega + (\rho V^2 - N^2)h^2\sin\omega + \rho Vh(t^2+1)^{-1}(t\sin\omega - 2\cos\omega))^2 + \\ + ((\rho V\tilde{D}h - HNh_x)\cos\omega + (\rho V^2 - N^2)h^2\cos\omega + \\ + \rho Vh(t^2+1)^{-1}(t\cos\omega + 2\cos\omega))^2 = 0. \qquad (3.24)$$

Уравнение (3.24) выполнено только при $h = 0$. При этом из уравнений (3.14), (3.23) следует $\omega_y = \omega_z = 0$, что означает редукцию рассматриваемого частично инвариантного решения к инвариантному решению относительно группы $\{X_3+X_5, X_2-X_6\}$. Аналогичная редукция доказана в работе [28] для уравнений газовой динамики в отсутствие магнитного поля. Поскольку множество инвариантных решений уравнений магнитогидродинамики (1.1) в основном изучено [18, 29], далее данное решение не исследуется.

3.3. *Подмодель* $\{X_3, X_5, X_2+X_6\}$. Представление решения запишем следующим образом:

$$u = U(t,x), \quad w = y - tv + W(t,x), \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t,x), \quad p = p(t,x), \quad \rho = \rho(t,x). \qquad (3.25)$$

Здесь функция $v = v(t,z,y,z)$ является неинвариантной. Из последнего уравнения в (1.1) найдем $H = H(t)$. После подстановки представления (3.25) в уравнение неразрывности разделим его на инвариантную и неинвариантную части. Для удобства введем новую инвариантную функцию $h(t,x)$:

$$\tilde{D}\rho + \rho(U_x + h) = 0, \qquad \tilde{D} = \partial_t + U\,\partial_x.$$

Для неинвариантной функции v получаем уравнение

$$v_y - tv_z = h. \qquad (3.26)$$

Еще одно соотношение для функции v найдем из уравнения импульсов в проекции на ось Oy:

$$\tilde{D}v + vv_y + (y + W - tv)v_z - \rho^{-1}HK_x = 0. \qquad (3.27)$$

Условием совместности уравнений (3.26), (3.27) является следующее соотношение для v, линейно независимое с ними:

$$hv_y + (2 - th)v_z + \tilde{D}h = 0. \qquad (3.28)$$

Это уравнение пополняет систему уравнений для неинвариантной функции v. Из уравнений (3.26), (3.28) следует, что функция v линейно зависит от y и z, т. е. решение определяет движение сплошной среды с однородной деформацией в направлении осей координат Oy и Oz (тензор скоростей деформации не зависит от координат y и z).

Полученный класс решений опишем следующим образом:

$$u = U(t,x), \quad \bar{\boldsymbol{v}} = M(t,x)\bar{\boldsymbol{y}} + \bar{\boldsymbol{b}}(t,x), \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t,x), \quad p = p(t,x), \quad \rho = \rho(t,x). \tag{3.29}$$

Здесь $\bar{\boldsymbol{v}} = (v,w)^{\text{т}}$, $\bar{\boldsymbol{y}} = (y,z)^{\text{т}}$, $\bar{\boldsymbol{b}} = (b^2,b^3)^{\text{т}}$, $\bar{\boldsymbol{B}} = (K,L)^{\text{т}}$ — укороченные векторы; M — квадратная матрица размером 2×2. Подставляя представление решения (3.29) в систему (1.1), получим следующие уравнения. Из уравнения неразрывности и уравнения для давления находим

$$\tilde{D}\rho + \rho(U_x + \operatorname{tr} M) = 0, \qquad \tilde{D}p + A(p,\rho)(U_x + \operatorname{tr} M) = 0. \tag{3.30}$$

Проецируя уравнение импульсов и уравнение индукции (первое и четвертое уравнения системы (1.1)) на ось Ox, имеем

$$\tilde{D}U + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\Big(p + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{B}}^2\Big) = 0, \qquad \tilde{D}H + H(U_x + \operatorname{tr} M) - HU_x = 0. \tag{3.31}$$

Проецируя уравнение импульсов на оси Oy и Oz, получаем

$$(\tilde{D}M + M^2)\bar{\boldsymbol{y}} + M\,\bar{\boldsymbol{b}} + \tilde{D}\bar{\boldsymbol{b}} - \rho^{-1}H\bar{\boldsymbol{B}}_x = 0. \tag{3.32}$$

Аналогично, проецируя уравнения индукции на оси Oy и Oz, имеем

$$\tilde{D}\bar{\boldsymbol{B}} + (U_x + \operatorname{tr} M)\bar{\boldsymbol{B}} - HM_x\bar{\boldsymbol{y}} - H\bar{\boldsymbol{b}}_x - M\bar{\boldsymbol{B}} = 0. \tag{3.33}$$

Наконец, последнее уравнение в (1.1) упрощается до соотношения $H_x = 0$. Расщепление уравнения (3.32) относительно $\bar{\boldsymbol{y}}$ приводит к соотношениям

$$\tilde{D}M + M^2 = 0, \qquad \tilde{D}\bar{\boldsymbol{b}} + M\,\bar{\boldsymbol{b}} - \rho^{-1}H\bar{\boldsymbol{B}}_x = 0. \tag{3.34}$$

Общее решение первого уравнения в (3.34) запишем в виде

$$M = (E + tM_0)^{-1}M_0, \qquad \tilde{D}M_0 = 0, \tag{3.35}$$

где E — единичная матрица. При этом

$$\operatorname{tr} M = \tilde{D}\ln(j_2t^2 + j_1t + 1), \qquad j_1 = \operatorname{tr} M_0, \quad j_2 = \det M_0. \tag{3.36}$$

Приравнивание к нулю коэффициента при $\bar{\boldsymbol{y}}$ в уравнении (3.33) приводит к дилемме: $H(t) \equiv 0$ либо $M = M(t)$. Рассмотрим первый вариант. В этом случае, интегрируя второе уравнение в (3.34), получаем

$$\bar{\boldsymbol{b}} = (E + tM_0)^{-1}\bar{\boldsymbol{b}}_0, \qquad \tilde{D}\bar{\boldsymbol{b}}_0 = 0.$$

Из уравнения (3.33) с использованием (3.30) найдем $\bar{\boldsymbol{B}}$:

$$\bar{\boldsymbol{B}} = (\rho/\rho_0)(E + tM_0)^{-1}\bar{\boldsymbol{B}}_0, \qquad \tilde{D}\bar{\boldsymbol{B}}_0 = 0, \qquad \tilde{D}\rho_0 = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае ($H = 0$) получаем редуцированные уравнения магнитной гидродинамики (1.1) вида (3.29):

$$\begin{gathered}\tilde{D}\rho + \rho(U_x + \operatorname{tr} M) = 0, \qquad \tilde{D}p + A(p,\rho)(U_x + \operatorname{tr} M) = 0,\\ \tilde{D}U + \rho^{-1}(p + \bar{\boldsymbol{B}}^2/2)_x = 0, \qquad \tilde{D}\psi = 0,\\ M = (E + tM_0)^{-1}M_0, \qquad \bar{\boldsymbol{B}} = \rho(E + tM_0)^{-1}\bar{\boldsymbol{B}}_0/\rho_0.\end{gathered} \tag{3.37}$$

Здесь M_0, $\bar{\boldsymbol{B}}_0$, ρ_0 — матрица, вектор и скаляр, произвольно зависящие от ψ.

Рассмотрим второй вариант ($M = M(t)$). В этом случае в представлении (3.35) M_0 является произвольной постоянной матрицей. С использованием выражения (3.36) проинтегрируем второе уравнение в (3.31):

$$H = H_0/(j_2t^2 + j_1t + 1).$$

В рассматриваемом случае уравнения подмодели принимают следующий вид:

$$\tilde{D}\rho + \rho(U_x + \operatorname{tr} M) = 0, \qquad \tilde{D}p + A(p,\rho)(U_x + \operatorname{tr} M) = 0,$$
$$\tilde{D}U + \rho^{-1}(p + \bar{\boldsymbol{B}}^2/2)_x = 0, \qquad \tilde{D}\bar{\boldsymbol{B}} + (U_x + \operatorname{tr} M)\bar{\boldsymbol{B}} - H\bar{\boldsymbol{b}}_x - M\bar{\boldsymbol{B}} = 0, \qquad (3.38)$$
$$\tilde{D}\bar{\boldsymbol{b}} + M\bar{\boldsymbol{b}} - \rho^{-1}H\bar{\boldsymbol{B}}_x = 0.$$

Решение с однородной деформацией по y и z вида (3.29) описывается системами уравнений (3.37), (3.38) в случаях $H = 0$ и $H \neq 0$ соответственно. Отметим, что в обоих случаях в решении имеется особенность в момент времени $t = -1/\lambda$ (λ — собственный корень матрицы M_0).

Заключение. Проведенный анализ завершает исследование условий совместности частично инвариантных подмоделей дефекта 1 уравнений идеальной магнитогидродинамики. Дальнейший анализ полученных систем уравнений может быть основан на вычислении группы симметрий, допускаемой построенными подмоделями, и выделении классов их точных решений. При этом основная часть допускаемой группы наследуется из исходной модели, однако возможны случаи расширения исходной группы по сравнению с наследуемой. В данной работе не исследовались также регулярные частично инвариантные подмодели дефектов 2 и 3 и класс барохронных решений для уравнений идеальной магнитогидродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ovsyannikov L. V.** Partially invariant solutions of the equations admitting a group // Proc. of the 11th Intern. congr. appl. mech., Munich, 1964. Berlin: Springer, 1966. P. 868–870.
2. **Овсянников Л. В.** Частичная инвариантность // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186, № 1. С. 22–25.
3. **Овсянников Л. В.** Регулярные типа (2,1) подмодели уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 3–13.
4. **Овсянников Л. В., Чупахин А. П.** Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 990–999.
5. **Чупахин А. П.** О регулярных подмоделях типа (1,2) и (1,1) уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 40–49.
6. **Хабиров С. В.** Нерегулярные частично инвариантные решения ранга 2 дефекта 1 уравнений газовой динамики // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 1151–1164.
7. **Овсянников Л. В.** Некоторые итоги выполнения программы “ПОДМОДЕЛИ” для уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 362–372.
8. **Andreev V. K.** Applications of group-theoretical methods in hydrodynamics / V. K. Andreev, O. V. Kaptsov, V. V. Pukhnachov, A. A. Rodionov. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.
9. **Meleshko S. V.** Methods for constructing exact solutions of partial differential equations. Mathematical and analytical techniques with applications to engineering. N. Y.: Springer, 2005.
10. **Мелешко С. В., Пухначев В. В.** Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье — Стокса // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 24–33.
11. **Бублик В. В.** О регулярных частично инвариантных решениях ранга 1 дефекта 1 уравнений плоских движений вязкого теплопроводного газа // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 6. С. 23–33.
12. **Golovin S. V.** Singular vortex in magnetohydrodynamics // J. Phys. A: Math. Gen. 2005. V. 38. P. 4501–4516.
13. **Головин С. В.** Плоский вихрь Овсянникова: уравнения подмодели // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5. С. 27–40.

14. **Головин С. В.** Плоский вихрь Овсянникова: свойства описываемого движения и точные решения // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6. С. 55–68.
15. **Аннин Б. Д.** Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б. Д. Аннин, В. О. Бытев, С. И. Сенашев. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1995.
16. **Аннин Б. Д.** Новые точные решения пространственных уравнений пластичности Треска // Докл. РАН. 2007. Т. 415, № 4. С. 482–485.
17. **Ибрагимов Н. Х.** Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
18. **CRC** handbook of Lie group analysis of differential equations. V. 2. Applications in engineering and physical sciences / Ed. by N. H. Ibragimov. Boca Raton (FL): CRC Press, 1995.
19. **Martina L., Soliani G., Winternitz P.** Partially invariant solutions of a class of nonlinear Schrodinger equations // J. Phys. A: Math. Gen. 1992. V. 25, N 16. P. 4425–4435.
20. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
21. **Овсянников Л. В.** Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156–159.
22. **Ondich J.** The reducibility of partially invariant solutions of systems of partial differential equations // Eur. J. Appl. Math. 1995. V. 6, N 4. P. 329–354.
23. **Golovin S. V.** On the hierarchy of partially invariant submodels of differential equations // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. V. 41. 265501.
24. **Чупахин А. П.** О барохронных движениях газа // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 5. С. 624–626.
25. **Куликовский А. Г.** О движениях с однородной деформацией в магнитной гидродинамике // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 5. С. 984–986.
26. **Куликовский А. Г.** Магнитная гидродинамика / А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов. М.: Физматгиз, 1962.
27. **Fuchs J. C.** Symmetry groups and similarity solutions of MHD equations // J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 1703–1708.
28. **Головин С. В.** Об одном инвариантном решении уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 1. С. 3–10.
29. **Picard P. Y.** Some exact solutions of the ideal MHD equations through symmetry reduction method // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 337. P. 360–385.

Поступила в редакцию 6/XI 2008 г.