

где E — энергия, выделившаяся при взрыве, r_{Φ} — радиус фронта ударной волны, $A = 3001 \text{ атм}$, $B = 3000 \text{ атм}$, $n = 7$ для воды.

Оценка по этой формуле показывает, что при выделении 0.6 дж на расстоянии 1.7 см от точки взрыва образуется ударная волна со скачком давления $\Delta p_{\Phi} = 150 \text{ атм}$, что согласуется по порядку величины с приведенным выше экспериментальным результатом.

Лучшее согласие теоретических и экспериментальных данных получается для случая, исследованного в работе [2], где измерялась амплитуда ударной волны на расстоянии 0.3 см от пробоя при выделении энергии $E \sim 0.1 \text{ дж}$. По данным измерений $\Delta p_{\Phi} \approx 500 \text{ атм}$, оценка по формуле (2) дает $\Delta p_{\Phi} \approx 550 \text{ атм}$.

Авторы благодарят Н. Ф. Пилипецкого и Ю. П. Райзера за внимание и интерес к работе, а также Ю. А. Сидорина за помощь при проведении эксперимента.

Поступила 29 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Аскарьян Г. А., Прохоров А. М., Чантурия Г. Ф., Шипуло Г. П. Луч оптического квантового генератора в жидкости. ЖЭТФ, 1963, т. 44, вып. 6, стр. 2180—2182.
2. Carome E. F., Moeller C. E., Clark N. A. Intense ruby laser — induced acoustic impulses in liquids. J. Acoust. Soc. America, 1966, vol. 40, No. 6, p. 1462.
3. Bell C. E., Landt J. A. Laser-induced high-pressure shock waves in water. Appl. Phys. Letters, 1967, vol. 10, No. 2.
4. Carome E. F., Carriera E. M., Prochaska C. J. Photographic studies of laser induced pressure impulses in liquids. Appl. Phys. Letters, 1967, vol. 11, No. 2, p. 64.
5. Jones D. L. Intermediate strength blast wave. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 8, p. 1664.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. М. Сагалаков, В. Н. Штерн

(Новосибирск)

В рамках линейной теории исследуется устойчивость плоскопараллельных течений вязкой электропроводящей жидкости в поперечном магнитном поле. Магнитные числа Рейнольдса считаются малыми. Получены зависимости критического числа Рейнольдса от числа Гартмана во всем диапазоне изменения последнего. Детально изучен спектр малых возмущений на примере течения Гартмана. Построены нейтральные кривые для симметричных и антисимметричных возмущений. Исследовано дестабилизирующее влияние магнитного поля в случае модифицированного течения Куэтта. Полученные результаты согласуются с расчетами Локка и Какутани (там где они пересекаются) и расходятся с результатами К. Б. Павлова.

1. Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости между параллельными пластинами в поперечном магнитном поле. Магнитные числа Рейнольдса предполагаются малыми. Уравнение для амплитуды функции тока возмущения $\varphi(y)$ имеет вид [1,2]

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi = i\alpha R [(u - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - u''\varphi] + G^2\varphi \quad (1.1)$$

$$-1 \leq y \leq 1$$

с граничными условиями

$$\varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь α — волновое число, u — профиль скорости, R — число Рейнольдса, G — число Гартмана, $c = X + iY$ — комплексная фазовая скорость возмущения, собственное значение задачи. Значение $Y < 0$ соответствует затуханию возмущения, значение $Y > 0$ — росту. В качестве единицы длины выбирается полуширина канала, за единицу скорости принимается максимальная скорость потока для течения Гартмана

и половина относительной скорости пластин для течения Куэтта. Задача гидродинамической устойчивости сводится к анализу спектра собственных значений модифицированного уравнения Орра — Зоммерфельда (1.1) с граничными условиями (1.2).

Чаще всего ограничиваются изучением нейтральных возмущений, что достаточно для нахождения критических чисел Рейнольдса. Однако для ряда задач, например для развития нелинейной теории, при изучении поведения произвольного возмущения во времени представляет интерес информация о полном спектре малых возмущений. В задачах магнитогидродинамической устойчивости полный спектр малых возмущений ранее не изучался. Наиболее полные результаты по устойчивости течения Гартмана были получены Локком [1]. Устойчивость модифицированного течения Куэтта изучалась К. Б. Павловым [3] и Какутани [2]. Они получили различные результаты относительно зависимости критического числа Рейнольдса от числа Гартмана.

2. Для расчета собственных значений уравнения (1.1) использовалась модификация численного метода решения задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, развитого в работе [4]. При заданных G, R, α решение задачи на собственные значения (1.1), (1.2) дает счетное множество спектральных номеров $c_n(\alpha, R, G)$. Для малых и больших значений α можно получить асимптотические выражения для c_n . Предполагая, что

$$|c| \gg \max(|u|, |u''|) \quad (2.1)$$

получаем из (1.1), (1.2)

$$Y_n = -[\pi^2(n+1)^2 + 4G^2] / 4\alpha R \quad (2.2)$$

при таких малых α , где выполняется (2.1). Для течения Гартмана значения $n = 1, 3, 5, \dots$ отвечают симметричным возмущениям, значения $n = 2, 4, 6, \dots$ отвечают антисимметричным возмущениям. (При небольших четных n асимптотическое выражение (2.2) для Y_n выполняется приближенно.) В качестве асимптотического выражения для X_n при малых α принимается средняя по сечению канала скорость потока

$$X_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} u \, dy \quad (2.3)$$

хотя можно получить и более точную оценку. Спектральная нумерация производится в соответствии с порядком расположения спектральных гармоник при малых α . При больших α асимптотическое выражение для Y_n имеет вид

$$Y_n = -\alpha / R \quad (2.4)$$

такой же как в случае обычного течения Пуазейля. Если $n \gg 1$, то при конечных R спектр собственных значений в первом приближении совпадает со спектром покоящейся жидкости, и, следовательно, для профилей скорости рассматриваемого здесь типа неустойчивость не может быть связана с большими n .

Таким образом, область численного анализа ограничивается исследованием конечного числа спектральных номеров n и конечным диапазоном изменения α . Это обстоятельство делает численные расчеты обозримыми. При изучении спектра построение зависимости $c_n(\alpha)$ (при фиксированных G, R) начиналось с асимптотических выражений (2.2), (2.3). Далее осуществлялось «движение по непрерывности» до асимптотических значений c_n при больших α (2.4). Для нахождения зависимости критического числа Рейнольдса R_* и критического волнового числа α_* от G и для построения нейтральных кривых тоже применялось движение по непрерывности. Собственные значения находились с заданной точностью (три значащих цифры). Численные расчеты проводились на электронно-вычислительной машине БЭСМ-6.

3. Устойчивость течения Гартмана

$$u = (\operatorname{ch} G - \operatorname{ch} Gy) / (\operatorname{ch} G - 1)$$

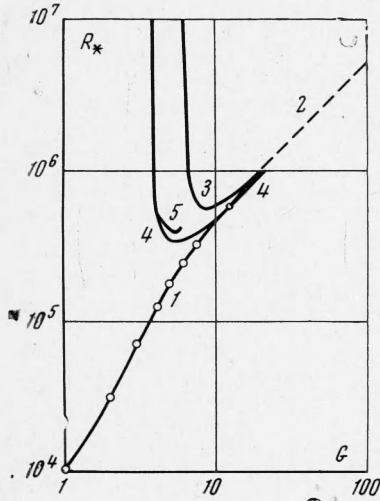
изучалась Локком [1] с помощью асимптотического метода Гейзенберга — Линя. Им были получены зависимости $R_*(G)$ и $\alpha_*(G)$ во всем диапазоне изменения аргумента.

Проведенные авторами численные расчеты, которые носили контрольный для численного алгоритма характер, дали хорошее совпадение с результатами Локка. На фиг. 1 численные расчеты представлены сплошной линией (кривой 1), а результаты Локка — точками. Штриховой линией 2 нанесена асимптотическая зависимость $R_* = 50000 G$, построенная Локком для предельного случая больших чисел G , когда про-

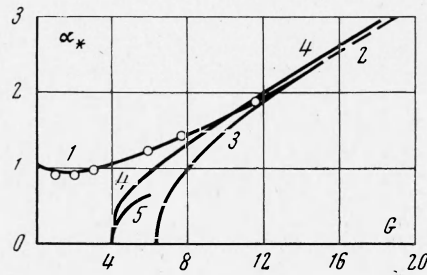
филь скорости вырождается в экспоненциальный

$$u = 1 - \exp [G (y - 1)] \quad (3.1)$$

как в случае пограничного слоя с отсосом. На фиг. 2 изображена зависимость $\alpha_*(G)$. (Сплошная линия 1 — расчеты авторов, точки — данные Локка, штриховая линия 2 — асимптотическая формула Локка $\alpha_* = 0.16 G$). Локк обнаружил, что при больших числах G неустойчивыми могут становиться и антисимметричные возмущения. Проведенные расчеты иллюстрируют характер этой неустойчивости. На фиг. 1 и 2 кривыми 3 представлены зависимости $R_*(G)$ и $\alpha_*(G)$ для антисимметричных возмущений.



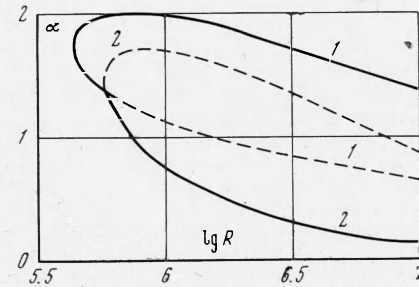
Фиг. 1



Фиг. 2

Число R_* становится конечным при $G > 6.5$, далее с ростом G достигает минимального значения $R_* = 5.4 \cdot 10^5$ при $G = 9.1$ и затем вновь возрастает, выходя на асимптотическую зависимость 2 при $G > 15$. Хотя R_* для симметричных возмущений меньше, как это видно на фиг. 1, может реализоваться ситуация, когда симметричные возмущения загухают, а антисимметричные будут нейтральными или нарастающими.

На фиг. 3 приведены нейтральные кривые для симметричных (кривая 1) и антисимметричных (кривая 2) возмущений при $G = 10$. Общая нейтральная кривая для потока (проведенная сплошной линией) одной своей частью состоит из нейтральной кривой для симметричных возмущений, а другой — из нейтральной кривой для антисимметричных возмущений. Она имеет вид, необычный для задач гидродинамической устойчивости. Характерно, что вдоль нижней ветви нейтральной кривой 2 уже при $R > 10^6$ хорошо выполняется асимптотическая зависимость $\alpha \sim 10^6 / R$. Так как критическая точка y_c расположена от стенки на расстоянии порядка $(\alpha R)^{-1/3}$ [5], то вдоль рассматриваемой ветви нейтральных колебаний с ростом R она не стремится к стенке, а остается на фиксированном расстоянии от нее, равном 0.015 для $G = 10$. Вдоль других ветвей нейтральных кривых параметр αR возрастает и критическая точка стремится к стенке при $R \rightarrow \infty$.



Фиг. 3

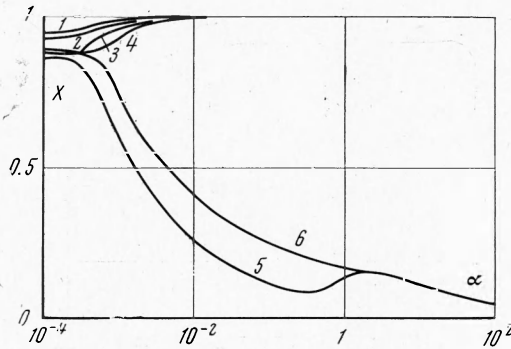
Наличие неустойчивых гармоник с разными спектральными номерами, равно как и соображения, изложенные в 2, побуждают к изучению всего спектра малых возмущений. Проследим изменение спектра малых возмущений с ростом G . В предельном случае $G = 0$ (течение Пуазейля) спектр подробно изучен в [6]. Его характерной особенностью является четкое разделение спектральных гармоник с ростом волнового числа на два класса: возмущения, локализованные у стенки канала, с фазовой скоростью, стремящейся к нулю, и приосевые, локализованные у оси канала, с фазовой скоростью, стремящейся к единице. В случае $G < 1$ распределение спектральных гармоник такое же, как и для течения Пуазейля: возмущения с номерами $n = 1, 2, 5, 8, \dots$ являются

пристенными, возмущения с номерами $n = 3, 4, 6, 7, \dots$ — приосевыми. С ростом G спектр существенно перестраивается.

При $G = 3$ к неустойчивости приводит первая симметричная гармоника, также как в случае профиля — параболы Пуазейля, однако возмущения с 2 и 5 спектральными номерами, бывшие пристенными при $G = 0$, стали приосевыми; возмущение с $n = 4$, бывшее приосевым, стало пристенным. При $G = 6$ спектр претерпевает дальнейшую перестройку, и, в частности, неустойчивость уже связана с третьей гармоникой. На фиг. 4, 5 представлены зависимости

$$c_n(\alpha) = X_n(\alpha) + iY_n(\alpha) \text{ для } G = 10, R = 6 \cdot 10^5$$

При больших G профиль скорости можно разбить на два участка: пристенный с



Фиг. 4

размером $\sim 1/G$, где справедлива формула (3.1); и ядро, где можно принять $u \equiv 1$. Соответственно, и спектр приосевых возмущений с большой точностью соответствует спектру профиля $u \equiv 1$. В рассматриваемом случае, как и, по-видимому, для любых гладких выпуклых профилей, неустойчивость всегда связана при малых G с четными, а при больших G — с нечетными пристенными возмущениями. Собственные значения при больших волновых числах для симметричных и антисимметричных пристенных возмущений асимптотически сближаются в соответствии со свойствами локальности [8]. Именно, коротковолновые возмущения практически отличны от нуля на небольшом интервале изменения α

порядка $1/\alpha$ и не зависят от характера однородных граничных условий на оси канала. При $\alpha_* > 2$ собственные значения для нарастающих возмущений и R_* в симметричном и антисимметричном случаях совпадают, как это видно на фиг. 1, 2.

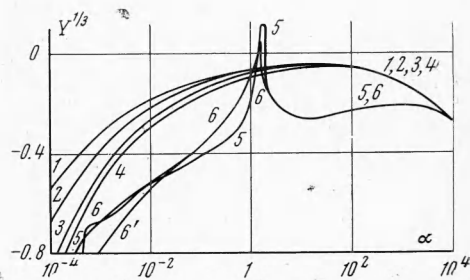
Поведение приосевых возмущений также иллюстрирует свойства локальности. На фиг. 4, 5 видно, что уже при небольших волновых числах, когда критическая точка еще сравнительно удалена от оси и условия симметрии и антисимметрии не существенны, соответствующие собственные значения попарно сливаются. С ростом α (в районе максимумов зависимостей $Y_n(\alpha)$), когда ось попадает в малую окрестность u_c , условия на оси начинают сказываться и собственные значения расслаиваются на небольшом диапазоне изменения α , а затем они выходят на общую асимптотическую зависимость. Расслоение кривых $c_n(\alpha)$ весьма невелико, и поэтому не приведено на иллюстрациях, чтобы избежать загромождения фигур. Свойства локальности для приосевых возмущений подробно проанализированы в [8] на примере течения Пуазейля.

С увеличением G растет спектральный номер неустойчивых возмущений. Как видно из фиг. 5, при $G = 10$ неустойчивыми являются возмущения с $n = 5, 6$. При $G = 15$ одному из неустойчивых возмущений отвечает $n = 8$, при $G = 18$ — $n = 10$. Таким образом, спектральный номер неустойчивых возмущений возрастает пропорционально G .

Расчеты спектров малых возмущений для течения Гартмана проводились без члена $G^2\varphi''$ в (1.1). Это пренебрежение оправдано при условии $\alpha R \gg G^2$. Последнее будет не выполняться лишь при $\alpha \ll \alpha_*$. На фиг. 5 кривая $6'$ отвечает шестой спектральной ветви, рассчитанной с учетом члена $G^2\varphi''$ в правой части (1.1). Его влияние приводит к более быстрому затуханию возмущений в рассматриваемом спектре при малых α . Асимптотические зависимости при малых α для спектральных ветвей 6 и $6'$ существенно различаются в соответствии с формулой (2.2).

4. Модифицированное течение Куэтта

$$u = \text{sh } Gy / \text{sh } G$$



Фиг. 5

в поперечном магнитном поле представляет интересный случай дестабилизирующего влияния магнитного поля.

Профиль скорости деформируется магнитным полем таким образом, что рейнольдсовы напряжения могут приводить к неустойчивости. Последняя не связана непосредственно с точкой перегиба профиля скорости [2]. Кривая 4 на фиг. 1, 2 представляет собой зависимости $R_*(G)$, $\alpha_*(G)$. Кривая 5 на этих фигурах соответствует результатам, полученным Какутани [2]. Численные расчеты авторов хорошо согласуются с результатами Какутани при малых значениях α_* . Точнее, чем в [2], определено минимальное R_* . (На неточность определения указывал сам автор [2].) Просчет области средних чисел Гартмана ($5 < G < 15$) позволяет теперь судить об устойчивости рассматриваемого течения во всем диапазоне чисел Гартмана. Какутани пришел к выводу, что асимптотические выражения для R_* , α_* при $G > 15$ должны совпадать с соответствующими асимптотическими выражениями Локка для течения Гартмана.

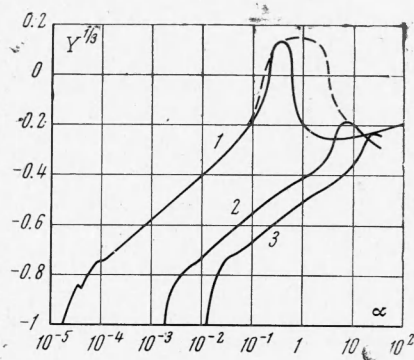
Результаты данной работы показывают, что при $G > 15$ зависимость $R_*(G)$ мало отличается от локковской. Отметим, что зависимости $R_*(G)$, $\alpha_*(G)$ подобны зависимостям для антисимметричных возмущений в случае течения Гартмана.

На фиг. 6 представлены зависимости $Y(\alpha)$ для наиболее опасного спектрального номера при $R = 10^6$ для различных G . Кривая 1 отвечает $G = 5$, кривая 2 — $G = 45$, кривая 3 — $G = 100$. Соответствующие вычисления были проведены с учетом члена $G^2\varphi''$ в (1.1). Изломы спектральных ветвей отвечают возникновению при малых α колебательных возмущений, как в случае обычного течения Куэтта. На фиг. 6 штриховой линией представлена зависимость $\Pi = \max_{\alpha} Y(G)$ для наиболее опасного спектрального номера при $R = 10^6$, которая иллюстрирует влияние магнитного поля на поток при фиксированном R .

Неустойчивость возникает при $G = 4$, далее инкременты наиболее опасных возмущений увеличиваются с ростом G , достигая максимума при $G = 8$, затем убывают, и при $G = 21$ поток вновь становится устойчивым. В работе [3] сделан вывод о том, что модифицированное течение Куэтта становится неустойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям при $R \sim 25$ для $G = 1-3$. Принимая во внимание полученные здесь результаты и работу [2], следует сделать вывод об ошибочности этого заключения. Неверным является также утверждение К. Б. Павлова о том, что физические нереальные возмущения с большими значениями α .

В заключение отметим, что хотя непосредственным предметом исследования авторов была устойчивость магнитогидродинамических течений, полученные результаты демонстрируют влияние формы профиля скорости на спектр малых возмущений и критические числа Рейнольдса фактически независимо от характера тех физических эффектов, которые формируют профиль скорости.

Авторы благодарят М. А. Гольдштика за внимание к работе.



Фиг. 6

Поступила 28 VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. L o c k R. C. The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field. Proc. Roy. Soc., 1955, A 233, No. 1192.
2. K a k u t a n i T. The hydromagnetic stability of the modified plane Couette flow in the presence of a transverse magnetic field. J. Phys. Soc. Japan, 1964, vol. 19, No. 6.
3. П а в л о в К. Б. Об устойчивости плоского течения Куэтта в присутствии магнитного поля. В сб.: «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы», Рига, Изд. АН Латв.ССР, 1962.
4. Г о л ь д ш т и к М. А., С а п о ж н и к о в В. А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии поля массовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
5. Л и н ь Цзя-цзяо Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
6. С а п о ж н и к о в В. А., Г о л ь д ш т и к М. А., Ш т е р н В. Н. Локальные свойства профиля скорости и гидродинамическая устойчивость. II Респ. конф. по аэрогидродинамике, теплообмену и массообмену, (Аннот. докл.), Киев, 1969.