

5. С. А. Ждан, В. В. Митрофанов.— В сб.: Детонация. Критические явления. Физико-химические превращения в ударных волнах. Черноголовка, 1978.
6. В. Ф. Куропатенко.— В сб.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 8, № 6. Новосибирск, 1977.
7. Р. Рихтмайер, К. Мортон. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
8. Г. Б. Алалыкин, С. К. Годунов и др. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М.: Наука, 1970.
9. С. К. Годунов, А. В. Забродин и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
10. А. В. Пинаев. ФГВ, 1977, 13, 3.
11. Е. С. Щетинков. Физика горения газов. М.: Физматгиз, 1966.
12. А. А. Борисов, Б. Е. Гельфанд и др.— В сб.: Химическая физика процессов горения и взрыва. Детонация. Черноголовка, 1977.

ТЕПЛО- И МАССООБМЕН НАД СЛОЕМ ГОРЮЧЕГО ЗА УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Н. И. Зверев, Н. Н. Смирнов
(Москва)

В трубах, заполненных газообразным окислителем, с тонким слоем горючего на стенках возможно распространение детонации [1—7]. Характерной особенностью детонации в таких системах является то, что окислитель и горючее заранее не перемешаны и находятся в разных фазах, а образование смеси, способной гореть и детонировать, происходит в результате испарения и диффузии паров горючего в пограничный слой за головной ударной волной, распространяющейся вдоль оси трубы. Одним из основных определяющих параметров такого процесса является массовая скорость испарения, так как она лимитирует энерговыделение в детонационном комплексе и от точности ее определения во многом зависит точность определения других параметров детонации в предварительно не перемешанных гетерогенных системах.

Цель настоящей работы — исследование задачи об определении массовой скорости испарения слоя горючего за ударной волной.

Рассмотрим для этого полупространство над тонким слоем горючего, заполненное газообразным окислителем, по которому распространяется ударная волна с постоянной скоростью U_s . За ударной волной над слоем горючего образуется пограничный слой с испарением и горением, а в слое горючего — температурный пограничный слой (движением в слое горючего пренебрегаем). Для описания этого процесса удобно использовать подвижную систему координат, в которой ось y связана с ударной волной, так как в этом случае пограничные слои в газе и жидкости стационарны. Ось x ориентирована в противоположном движении ударной волны направлении.

Если при этом ось x совпадает с поверхностью раздела фаз, то уравнение энергии в слое жидкости в приближении пограничного слоя имеет вид

$$\rho_f u_f c_{pf} \frac{\partial T}{\partial x} + \rho_f v_f c_{pf} \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda_f \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (1)$$

где ρ , c_p , λ , T , u , v — плотность, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, температура и составляющие скорости по осям x и y соответственно; индексом f отмечены параметры жидкого горючего, при этом $u_f = U_s$.

Вид уравнения (1) в выбранной системе координат (x , y) удобен для сравнения встречающихся в литературе методов определения массовой

скорости испарения, которые основывались на решении уравнения энергии в слое жидкости (1) в пренебрежении одним из членов левой его части и имели следующие постановки.

В предположении $v_f \cdot \partial T / \partial y \ll u_f \cdot \partial T / \partial x$ (пренебрегается поперечным переносом энергии [3—5]) уравнение (1) принимает вид

$$\rho_f u_f c_{pf} \cdot \partial T / \partial x = \lambda_f \cdot \partial^2 T / \partial y^2 \quad (2)$$

и соответствует задаче о прогреве стенки за ударной волной в отсутствие испарения, которая решена, например, в [8]. Метод ее решения с соответствующим изменением граничных условий можно использовать и в случае испарения, если считать, что поверхность раздела фаз неподвижна [3—5] (вариант А).

В предположении $v_f \cdot \partial T / \partial y \gg u_f \cdot \partial T / \partial x$ (пренебрегается продольным переносом энергии [6]) уравнение (1) принимает вид

$$\rho_f v_f c_{pf} \cdot \partial T / \partial y = \lambda_f \cdot \partial^2 T / \partial y^2 \quad (3)$$

и соответствует задаче об обтекании испаряющейся пластины в системе координат, связанной с пластиной (вариант Б). Эта задача исследована, например, в [9].

Из уравнения сохранения потоков массы через поверхность раздела фаз следует, что

$$v_f / v_{gw} = \rho_g / \rho_f \sim 10^{-2},$$

где индексом g отмечены параметры газа, индексом W — параметры на поверхности раздела. При этом из оценки параметров пограничного слоя в газе следует, что

$$v_{gw} \ll u_{gw} = u_w = u_f,$$

поэтому

$$v_f / u_f \ll 1.$$

Эту оценку можно провести более точно, однако, хотя она говорит в пользу варианта А, оценить степень точности сделанных приближений можно только после оценки производных $\partial T / \partial x$ и $\partial T / \partial y$, что представляется возможным лишь после решения полного уравнения (1).

Для нахождения аналитического решения в общем случае перейдем к связанной с ударной волной подвижной системе координат (\tilde{x}, \tilde{y}) , ось \tilde{x} которой прямолинейна и частично совпадает с положением поверхности раздела в области, где не происходит испарения (рис. 1).

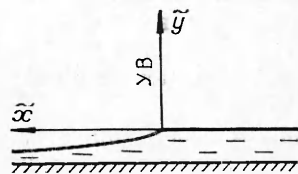


Рис. 1.

В системе координат (\tilde{x}, \tilde{y}) скорость $v_f = 0$ и уравнение (1) принимает вид

$$\partial T / \partial \tilde{x} = \lambda_f / \rho_f u_w c_{pf} \cdot \partial^2 T / \partial \tilde{y}^2, \quad (4)$$

при этом неподвижная поверхность раздела $\tilde{y} = y_w(\tilde{x})$ в области $\tilde{x} > 0$ криволинейна, и ее положение подлежит определению в процессе решения. Уравнение (4) в области $\tilde{x} > 0$, $\tilde{y} \leq y_w(\tilde{x})$ решается со следующими граничными условиями:

$$T = T_0 \text{ при } \tilde{x} = 0, \tilde{y} \rightarrow -\infty, \quad (5)$$

$$T = T_w \text{ при } \tilde{x} > 0, \tilde{y} = y_w(\tilde{x}).$$

В рассматриваемой задаче температура поверхности раздела T_w постоянна, задача автомодельна и с помощью введения переменной

$$\xi = \frac{\tilde{y} \sqrt{\rho_f u_w c_{pf}}}{2 \sqrt{\lambda_f \tilde{x}}}$$

уравнение (4) и граничные условия (5) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \Psi'' + 2\Psi'\xi = 0, \quad \Psi(\xi) = T/T_0, \\ \Psi(\xi_w) = T_w/T_0, \quad \Psi(-\infty) = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\xi = \frac{y_w(\tilde{x}) \sqrt{\rho_f \mu_w c_{pf}}}{2 \sqrt{\lambda_f \tilde{x}}}.$$

Интегрируя (6), получим

$$\begin{aligned} \Psi' e^{\xi^2} = C_1, \\ \Psi(\xi) - \Psi(-\infty) = C_1 \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi \end{aligned}$$

и далее, используя граничные условия, найдем

$$\Psi(\xi) = \frac{\left(\frac{T_w}{T_0} - 1\right) \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi}{\int_{-\infty}^{\xi_w} e^{-\xi^2} d\xi} + 1.$$

Переходя к физическим переменным, получим решение уравнения энергии для распределения температур в слое горючего

$$T - T_0 = \frac{(T_w - T_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{\tilde{y} \sqrt{\rho_f c_{pf} \mu_w}}{2 \sqrt{\lambda_f \tilde{x}}}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{y_w(\tilde{x}) \sqrt{\rho_f c_{pf} \mu_w}}{2 \sqrt{\lambda_f \tilde{x}}}\right)}, \quad (7)$$

где $\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z$; $\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz$. Для определения теплового потока в слой горючего $q_s = -(\lambda \cdot \partial T / \partial y)_{fw}$ из решения (7) получим

$$q_s = \frac{(T_w - T_0) \sqrt{\rho_f \lambda_f c_{pf} \mu_w} e^{-\frac{y_w^2(\tilde{x}) \rho_f c_{pf} \mu_w}{4 \lambda_f \tilde{x}}}}{\sqrt{\pi \tilde{x}} \operatorname{erfc}\left(\frac{y_w(\tilde{x}) \sqrt{\rho_f c_{pf} \mu_w}}{2 \sqrt{\lambda_f \tilde{x}}}\right)}. \quad (8)$$

Решение (7) содержит неизвестную температуру поверхности фазового перехода T_w . Для замыкания задачи необходимо использовать условия на поверхности фазового перехода и соотношения, описывающие процессы переноса в пограничном слое в газе.

Из уравнений сохранения потоков массы, энергии и потока i -го компонента через поверхность раздела в системе координат (\tilde{x}, \tilde{y}) получим

$$\begin{aligned} (\rho_g v_g)_w + \rho_g u_w \frac{d\tilde{y}_w}{d\tilde{x}} = \rho_f u_w \frac{d\tilde{y}_w}{d\tilde{x}} = \dot{m}, \\ -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)_{gw} - \sum_{i=1}^N \left(\rho D H_i \frac{\partial Y_i}{\partial y}\right)_{gw} + \dot{m} (Y_i H_i)_{gw} = \end{aligned} \quad (9)$$

$$= - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{fW} + \dot{m} (Y_i H_i)_{fW}, \quad (10)$$

$$\dot{m} Y_{igW} - \left(\rho D \frac{\partial Y_i}{\partial y} \right)_{gW} = \dot{m} Y_{ifW}, \quad (11)$$

где \dot{m} — массовая скорость испарения; Y_i — концентрация i -го компонента; D — коэффициент диффузии. Из (9)–(11) при условии, что горючее однокомпонентно, следует

$$- \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{fW} - \left(- \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{gW} = \dot{m} h_L, \quad (12)$$

где h_L — скрытая теплота парообразования.

Для определения зависимости температуры поверхности фазового перехода от парциального давления паров горючего p_{NW} используем условие равновесного испарения Клайперона — Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{h_L}{T \Delta \left(\frac{1}{\rho} \right)},$$

которое с учетом температурной зависимости скрытой теплоты парообразования $dh_L - \Delta c_p dT$ в пренебрежении удельным объемом жидкой фазы по сравнению с удельным объемом газообразной фазы может привести к уравнению

$$\frac{p_0}{p_{NW}} = \left(\frac{T_0}{T_W} \right)^{\frac{\Delta c_p m_N T_{кр}}{R}} \exp \left[\frac{\Delta c_p m_N T_{кр}}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_W} \right) \right], \quad (13)$$

где $p_{NW} = Y_{NW} p_e \frac{m}{m_N}$; $m = \left(\sum_{i=1}^N Y_{igW} / m_i \right)^{-1}$ — средняя молекулярная масса смеси; m_i — молекулярная масса i -го компонента; R — универсальная газовая постоянная.

Уравнения ламинарного пограничного слоя над испаряющейся поверхностью горючего за ударной волной в химически реагирующей смеси газов [4] после преобразований допускают первые интегралы, из которых с учетом граничных условий следует [7]

$$\begin{aligned} Y_{igW} &= 1/(1+B) \cdot (Y_{ige} - Y_{ige} \Phi_i), \quad i = 2, \dots, N-1, \\ Y_{NgW} &= 1/(1+B) \cdot (B + Y_{Nge} - Y_{ige} \Phi_N), \\ Y_{AgW} &= 1/(1+B) \cdot Y_{Age}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{gW} &= \frac{v_W}{u_e - v_W} \left[c_p (T_e - T_W) + \frac{(u_e - u_W)^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + (Y_{Nge} - Y_{NgW}) \Delta H - B \Delta H (1 - Y_{NgW}) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

где $B = \frac{\dot{m} (u_W - u_e)}{v_W}$ — безразмерный параметр массообмена; $\Phi_i =$

$$= \frac{m_i (v'_i - v''_i)}{m_1 (v'_1 - v''_1)}; \quad \Delta H = \frac{\sum_{i=1}^N h_i^0 m_i (v'_i - v''_i)}{m_N (v'_N - v''_N)}; \quad h_i^0$$

— удельная энтальпия образования i -го компонента; v'_i ; v''_i — стехиометрические коэффициенты до и после реакции; индекс e относится к параметрам внешнего потока за ударной волной, индекс 1 — к параметрам окислителя, N — горючего, A — инертного компонента; индекс g в дальнейших выкладках опускаем.

Напряжение трения τ_w представим в виде [10] $\tau_w = \tau_w^0 \frac{\ln(1+B)}{B}$, где τ_w^0 — напряжение трения за ударной волной при отсутствии испарения, для которого в [8] получена аппроксимационная формула

$$\tau_w^0 = 0,489(u_w - u_e) \sqrt{\frac{\rho_w \mu_w (u_e + 1,665u_w)}{2x}} \left(\frac{\rho_e \mu_e}{\rho_w \mu_w} \right)^{0,29}. \quad (16)$$

При этом

$$\dot{m} = 0,489 \ln(1+B) \sqrt{\frac{\rho_w \mu_w (u_e + 1,665u_w)}{2x}} \left(\frac{\rho_e \mu_e}{\rho_w \mu_w} \right)^{0,29}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (9) и интегрируя с учетом $y_w(0) = 0$, находим

$$y_w(\tilde{x}) = 0,489 \ln(1+B) \frac{1}{\rho_f} \sqrt{\rho_w \mu_w \left(\frac{u_e}{u_w} + 1,665 \right)} \sqrt{\frac{2x}{u_w}}. \quad (18)$$

Соотношения (8) и (12)–(18) представляют замкнутую систему для определения массовой скорости испарения горючего. Комбинируя (8), (12) и (15)–(17), получим

$$T_w - T_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\rho_f \lambda_f c_{pf} \mu_w}} \left[c_{pg}(T_e - T_w) + \frac{(u_e - u_w)^2}{2} + \Phi_N Y_{1e} \Delta H - B h_L \right] \times \\ \times \kappa \frac{\ln(1+B)}{B} \exp \left\{ [\kappa \ln(1+B)]^2 \frac{c_{pf}}{(\rho \lambda)_f u_w} \right\} \operatorname{erfc} \left[\kappa \ln(1+B) \sqrt{\frac{c_{pf}}{(\rho \lambda)_f u_w}} \right], \quad (19)$$

где $\kappa = 0,489 \left(\frac{\rho_e \mu_e}{\rho_w \mu_w} \right)^{0,29} \sqrt{\frac{\rho_w \mu_w (u_e + 1,665u_w)}{2}}$,

а из (13), (14)

$$B = Y_{1e} \Phi_N - Y_{Ne} + \left[\sum_{i=2}^{N-1} \frac{m_N}{m_i} (Y_{ie} - Y_{1e} \Phi_i) + \frac{m_N}{m_A} Y_{Ae} \right] \times \\ \times \left\{ \left(\frac{T_e}{T_w} \right)^{\frac{\Delta c_p m_N}{R}} \exp \left[\frac{\Delta c_p m_N T_{кр}}{R} \left(\frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_w} \right) \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad (20)$$

Трансцендентные уравнения (19), (20) составляют систему для определения параметра массообмена B и температуры поверхности фазового перехода T_w при заданной скорости ударной волны U_s .

Заметим, что от решения уравнения энергии в системе (19), (20) зависит только первое уравнение. Зависимость $y_w(\tilde{x})$, т. е. кривизну поверхности фазового перехода, в (19) учитывают последние два множителя. Если положить $y_w = 0$, то последние два множителя будут равны единице и уравнение (19) примет вид, соответствующий приближению А, т. е. решению уравнения энергии (2) в системе координат (x, y) с неподвижной границей [4, 5]. Если еще дополнительно в (19) отбросить члены, учитывающие испарение и горение, то полученное соотношение совпадает с решением [8] для определения температуры поверхности стенки за ударной волной.

В приближении Б, основанном на решении уравнения энергии (3) в системе координат (x, y) , уравнение, соответствующее (19), имеет вид

$$T_w - T_0 = \frac{1}{B c_{pf}} \left[c_{pg}(T_e - T_w) + \frac{(u_e + u_w)^2}{2} + \Phi_N \Delta H Y_{1e} - B h_L \right]. \quad (21)$$

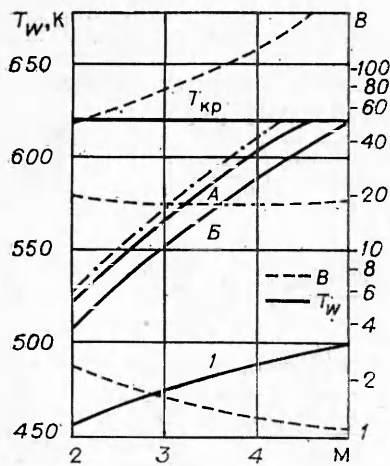


Рис. 2.

метра массообмена B и температуры T_w от числа Маха скорости головной ударной волны $M = U_s/a_0$. Как видно из графиков, для ламинарного пограничного слоя приближения А и Б дают существенно завышенные результаты по сравнению с точным решением (кривая 1) как по температуре, так и по значению параметра массообмена.

Для сравнения на рис. 2 штрихпунктирной кривой изображено изменение температуры поверхности при предположении, что концентрация паров горючего у поверхности $Y_{Nw} = 1$, которое делается, например, в [11].

Завышенные результаты по температуре и соответственно параметру массообмена объясняются тем, что при каждом из приближений (А или Б) учитывается только часть энергии, теряющейся на прогрев горючего, что вызывает увеличение доли потока энергии, расходуемого на фазовый переход. Следует отметить, что для скорости массоподачи \dot{m} различие не так велико, как для параметра массообмена B , ввиду того, что $\dot{m} \sim \ln(1+B)$, как видно из формулы (17).

Для турбулентного пограничного слоя получение точного решения уравнения (1) затруднено ввиду неавтономности задачи, однако проведенные исследования показывают, что пренебрежение любым из рассмотренных выше факторов при решении уравнения энергии в слое горючего может привести к значительным ошибкам.

Поступила в редакцию
6/XI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Комов, Я. К. Трошин. Докл. АН СССР, 1975, 175, 1, 109.
2. В. В. Митрофанов, А. В. Пинаев. Докл. АН СССР, 1975, 225, 3, 616.
3. K. W. Ragland. AIAA. J., 1970, 7, 3.
4. И. Н. Зверев, Н. И. Зверев, Н. Н. Смирнов.— В сб.: Газовая и волновая динамика. Вып. 2. М., 1979.
5. В. М. Гендугов. ФГВ, 1978, 14, 2, 66.
6. С. А. Лесняк, В. Г. Слуцкий. ПМТФ, 1974, 3, 86.
7. Н. И. Зверев, Н. Н. Смирнов. Вестн. МГУ. Математика. Механика, 1979, 6, 82.
8. Г. Майрлс.— В кн.: Ударные трубы. М., 1962.
9. Лиз.— В сб.: Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций. М.: ИЛ, 1962.
10. У. Х. Дорренс. Гиперзвуковые течения вязкого газа. М., 1966.
11. В. М. Гендугов. ФГВ, 1973, 9, 2, 291.