

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ КОНВЕКЦИЯ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ

С. С. Бродский, А. М. Головин

(Москва)

Для описания конвекции в шлаке на поверхности жидкого металла и в жидком металле в отсутствие шлака применимы соответственно модели конвекции в слое жидкости со свободной нижней поверхностью и в слое жидкости на поверхности твердого тела. Условия возникновения конвекции в жидкости на поверхности твердого тела за счет термокапиллярного эффекта рассмотрены ранее в работе [1], а при совместном учете гравитационного и термокапиллярного эффектов в работе [2].

Предполагается, что слой жидкости достаточно тонкий, что в уравнениях движения можно пренебречь архимедовой силой, но толщина слоя жидкости достаточно велика, чтобы термокапиллярная конвекция возникала при не слишком больших температурных градиентах и можно было бы пренебречь зависимостью вязкости от температуры. Рассчитано поле скоростей движения шлака или металла в конвективной ячейке. Результаты применены для определения диффузионного потока через поверхность жидкости.

1. Основные уравнения. Рассматривается слой жидкости, ограниченный плоскостями $z = 0$ (верхняя поверхность) и $z = h$ (нижняя поверхность). Предполагается, что жидкость покоится в слое. Тогда при условии однородного распределения температуры вдоль граничных поверхностей распределение температуры в жидкости имеет линейный профиль $T = T_0 + Az$.

Безразмерные переменные вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= h\xi, & y &= h\eta, & z &= h\xi, & t' &= (h^2/\nu) t \\ v_x &= (\nu/h) u, & v_y &= (\nu/h) v, & v_z &= (\nu/h) w \\ p &= \rho (\nu/h)^2 \Pi, & T &= T_0 + Ah(\xi + \theta) \end{aligned}$$

Здесь ν — кинематическая вязкость, ρ — плотность жидкости, p — давление, t' — время.

Уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости и конвективного переноса тепла в безразмерной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla \Pi + \Delta \mathbf{v}, & \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \theta &= \frac{1}{P} \Delta \theta - w & \left(P = \frac{\nu}{\chi} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь χ — коэффициент температуропроводности. Термокапиллярная конвекция возникает вследствие зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры и, следовательно, осуществляется при неоднородном распределении температуры вдоль граничных поверхностей.

Если температурный градиент превышает некоторое критическое значение, то, как показано ниже, однородное распределение температуры оказывается неустойчивым. Появляющееся движение жидкости при малых отклонениях температуры от однородного распределения способству-

ет возрастанию этого отклонения и установлению неоднородного распределения температуры вдоль поверхности. При этом весь слой жидкости, как и в случае гравитационной конвекции, разбивается на ячейки [3]. Около оси каждой ячейки жидкость опускается, а по краям ячейки — поднимается, либо наоборот.

Известно [4,5], что изменение поверхностного натяжения σ вдоль граничной поверхности приводит к появлению тангенциальной силы, величина которой на единицу площади поверхности равна $\nabla\sigma$. Полагая, что изменение температуры вдоль поверхности $z = 0$ не велико, можно считать $\nabla\sigma = -\gamma\nabla T$ ($\gamma = \text{const}$).

Условия непроницаемости поверхности и непрерывности тангенциальных составляющих тензора напряжений означают, что при $z = 0$

$$v_z = 0, \quad \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} = \gamma \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial v_y}{\partial z} = \gamma \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\mu = \rho\nu) \quad (1.2)$$

Из уравнения неразрывности и (1.2) следует, что

$$\gamma \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0$$

или в безразмерном виде при $\zeta = 0$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = -C \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \theta \quad \left(C = \frac{\gamma Ah^2}{\mu\nu} \right) \quad (1.3)$$

Предполагается, что на верхней поверхности жидкости происходит теплообмен с окружающей средой, так что соответствующее граничное условие имеет вид

$$\kappa \partial T / \partial z = Q_0 + q (T - T_0)$$

Здесь κ — коэффициент теплопроводности жидкости, Q_0 — плотность теплового потока с единицы поверхности жидкости при температуре поверхности T_0 , $q (T - T_0)$ — изменение плотности теплового потока при малом отклонении температуры от значения T_0 .

Переход к безразмерному виду приводит к условию при $\zeta = 0$

$$\partial \theta / \partial \zeta = B \theta \quad (B = qh/\kappa) \quad (1.4)$$

При изучении движения в слое шлака на поверхности жидкого металла предполагается, что ниже расположенный металл характеризуется пренебрежимо малой вязкостью и существенно большей теплопроводностью по сравнению с жидким шлаком. Тогда границу шлак — металл можно считать свободной, а температуру постоянной

$$w = \partial^2 w / \partial \zeta^2 = \theta = 0 \quad \text{при } \zeta = 1 \quad (1.5)$$

Аналогично, для слоя жидкого металла, учитывая, что на твердой поверхности имеет место условие прилипания, а тепловой поток при высокой теплопроводности жидкого металла не зависит от изменения температуры поверхности, следует записать

$$w = \partial w / \partial \zeta = \partial \theta / \partial \zeta = 0 \quad \text{при } \zeta = 1 \quad (1.6)$$

2. Стационарная линеаризованная система уравнений. Вследствие однородности системы уравнений и граничных условий поле скоростей и температур определяется с точностью до произвольного множителя, называемого в дальнейшем амплитудой.

Аналитическое решение стационарной линейризованной системы позволит определить C_* — критические значения параметра C , при котором возможно стационарное решение.

Исследование устойчивости состояния покоя относительно малых возмущений сводится заменой

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \exp(-st), \quad \Pi = \Pi_1 \exp(-st), \quad \theta = \theta_1 \exp(-st)$$

($\mathbf{v}_1, \Pi_1, \theta_1$ не зависят от времени) к задаче с соответствующими граничными условиями на отыскание собственных значений системы уравнений

$$-s\mathbf{v}_1 = -\nabla\Pi_1 + \Delta\mathbf{v}_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0$$

$$-s\theta_1 = P^{-1}\Delta\theta_1 - w_1$$

Состояние покоя неустойчиво, если среди собственных значений этой системы имеется хотя бы одно с неположительной действительной частью $\operatorname{Re} s \leq 0$. Поэтому момент возникновения устойчивости определяется появлением решений с $\operatorname{Re} s = 0$.

В данной работе рассматривается возникшее в результате неустойчивости стационарное конвективное движение, поэтому следует искать решение при $s = 0$. Соответствующие этому состоянию значения градиента температуры A и параметра C будут критическими A_*, C_* . Стационарное конвективное движение невозможно при $C < C_*$.

В настоящее время, по-видимому, не существует удовлетворительно строгого исследования устойчивости и возникновения термокапиллярной конвекции. Однако достаточно общие и убедительные соображения, высказанные Ландау при исследовании возникновения турбулентности^{5]}, позволяют сделать некоторые предположения о характере возникающего движения.

Если считать, что значения C немного превышают критические, то, следуя Ландау, можно предположить как для линейризованной, так и нелинейной стационарной задач пропорциональность амплитуды поля скоростей параметру $\varepsilon = \sqrt{(C - C_*) / C_*}$. Возникающее конвективное движение обладает малой амплитудой и решение линейризованной системы позволяет искать решение нелинейной системы методом возмущений по малому параметру

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^t &= \varepsilon \mathbf{v}^{(0)} + \varepsilon^2 \mathbf{v}^{(1)} + \varepsilon^3 \mathbf{v}^{(2)} + \dots \\ \Pi &= \varepsilon \Pi^{(0)} + \varepsilon^2 \Pi^{(1)} + \varepsilon^3 \Pi^{(2)} + \dots \\ \theta &= \varepsilon \theta^{(0)} + \varepsilon^2 \theta^{(1)} + \varepsilon^3 \theta^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\varepsilon \mathbf{v}^{(0)}, \varepsilon \Pi^{(0)}, \varepsilon \theta^{(0)}$ — решение линейризованной задачи. Линеаризованная стационарная система уравнений

$$\Delta \mathbf{v} - \nabla \Pi = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \Delta \theta - Pw = 0 \quad (2.2)$$

может быть сведена к системе относительно функции w и θ , если, используя второе из уравнений (2.2), исключить u, v, Π

$$\Delta \Delta w = 0, \quad \Delta \theta = Pw \quad (2.3)$$

Следуя [3], можно принять, что при стационарной конвекции происходит разбиение слоя жидкости на цилиндрические ячейки с осевой симметрией. В цилиндрической системе координат w, θ будут функциями двух переменных ρ и ξ , где ρ — безразмерная радиальная координата (отношение размерной к толщине слоя h).

Решение системы (2.3) с соответствующими граничными условиями методом разделения переменных имеет вид

$$w = kJ_0(a\rho) W(\xi), \quad \theta = kPJ_0(a\rho) \theta(\xi) \quad (2.4)$$

Здесь k — амплитуда поля скоростей, J_0 — функция Бесселя нулевого индекса, a — константа разделения переменных.

Функции W и Θ удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - a^2\right) W = 0, \quad \left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - a^2\right) \Theta = W \quad (2.5)$$

Ограниченность поля скоростей в конвективной ячейке и обращение радиальной компоненты скорости v_p в нуль на боковой границе цилиндрической ячейки выделяет функцию Бесселя нулевого индекса из множества решений уравнений Бесселя, которое получается для радиальной переменной при разделении, и требует действительности a^2 .

Если предположить, что радиальная компонента поля скоростей обращается впервые в нуль при $\rho \neq 0$ на границе ячейки, то очевидно, что безразмерный радиус ячейки равен $\rho_0 = x_{11} / a_*$, где x_{11} — наименьший положительный корень функции Бесселя первого индекса $J_1(x)$, а a_* — значение параметра a , соответствующее началу конвективного движения, т. е. C_* .

Теперь видно, что в формулах (2.4) a имеет не произвольное значение, а лишь такое, что $a\rho_0 = x_{11}$, где x_{11} — l -й положительный корень функции Бесселя первого индекса.

В этой работе рассмотрение конвективного движения производится для значений C , лишь немного превышающих критическое, поэтому значение a принимается равным a_* .

Решение уравнений (2.5) можно получить для двух наборов граничных условий, соответствующих двум рассматриваемым случаям: конвекции в шлаке и металле.

На верхней границе $\zeta = 0$ граничные условия имеют вид

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} W = a^2 C \Theta, \quad \frac{d}{d\zeta} \Theta = B \Theta, \quad W = 0 \quad (2.6)$$

Для случая шлака условия (2.6) дополняются условиями

$$W = \frac{d^2}{d\zeta^2} W = \Theta = 0 \quad \text{при } \zeta = 1 \quad (2.7)$$

Для металла

$$W = \frac{d}{d\zeta} W = \frac{d}{d\zeta} \Theta = 0 \quad \text{при } \zeta = 1 \quad (2.8)$$

Решение уравнений (2.5) с условиями (2.6), (2.7), описывающими конвекцию в шлаке, имеет вид

$$W = \text{sh } a\zeta + \zeta \text{ sh}^2 a \text{ sh } a\zeta - \zeta \text{ sh } a \text{ ch } a \text{ ch } a\zeta \quad (2.9)$$

$$\Theta = \frac{2\text{sh}^2 a}{aC} \left(\text{ch } a\zeta + \frac{B}{a} \text{ sh } a\zeta \right) + \frac{1}{a} \int_0^\zeta W(\zeta') \text{ sh } a(\zeta - \zeta') d\zeta'$$

$$\left(C = \frac{8a \text{ sh}^2 a (a \text{ ch } a + B \text{ sh } a)}{(a + \text{sh } a \text{ ch } a) \text{ sh } a - 2a^2 \text{ ch } a} \right) \quad (2.10)$$

$$C = 8a^2 \left(1 + \frac{B}{a} \right) \text{ при } a \gg 1, \quad C = \frac{45}{a^2} (1 + B) \text{ при } a \ll 1$$

Расчет зависимости $C(a, B)$ при различных значениях параметра B представлен на фиг. 1.

Как видно из полученных результатов, термокапиллярная конвекция в слое со свободной нижней границей возникает при критических значениях C_* и a_* , зависящих от параметра B . При значениях $C < C_*$ стационарное конвективное движение не возникает.

В случае жидкости, ограниченной снизу твердой поверхностью, решение уравнений (2.5) с условиями (2.6), (2.8) имеет вид

$$W = a \operatorname{sh} a \zeta + (\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a - a) \zeta \operatorname{sh} a \zeta - \zeta \operatorname{sh}^2 a \operatorname{ch} a \zeta \quad (2.11)$$

$$\Theta = \frac{\operatorname{sh} 2a - 2a}{aC} \left(\operatorname{ch} a \zeta + \frac{B}{a} \operatorname{sh} a \zeta \right) + \frac{1}{a} \int_0^\zeta W(\zeta') \operatorname{sh} a (\zeta - \zeta') d\zeta'$$

$$C = \frac{4a(a \operatorname{sh} a + B \operatorname{ch} a)(\operatorname{sh} 2a - 2a)}{\operatorname{sh}^2 a \operatorname{ch} a - 2a \operatorname{sh} a + a^2 \operatorname{ch} a - a^3 \operatorname{sh} a} \quad (2.12)$$

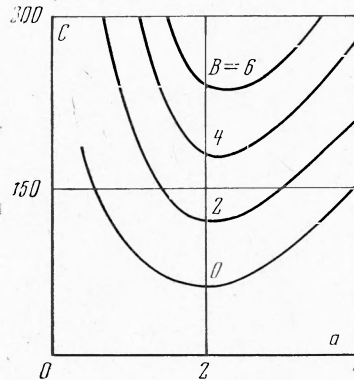
$$C = 8a^2 (1 + B/a) \quad \text{при } a \gg 1$$

$$C = 48 (1 + B/a^2) \quad \text{при } a \ll 1$$

Из сравнения фиг. 1 и фиг. 2 (фиг. 2 взята из работы [1]) видно, что возникновение конвекции в первом случае происходит при значениях C , примерно в полтора раза меньших, чем во втором.

3. Амплитуда поля скоростей. Поле скоростей линеаризованной системы уравнений вычисляется с точностью до амплитуды, определение которой связано с условием существования решения нелинейной системы стационарных уравнений. Аналогичное рассмотрение для гравитационной конвекции ранее было выполнено в работе [6].

Если исключить C из граничных условий, что достигается введением вместо θ новой функции $\tau = C\theta$, то уравнения движения и переноса тепла в операторной форме можно записать в виде



Фиг. 1

$$L' X' = F$$

$$L' = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & -\frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & -\frac{\partial}{\partial \zeta} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial \xi} & -\frac{\partial}{\partial \eta} & -\frac{\partial}{\partial \zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{PC} \Delta \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \Pi \\ \tau \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} (v \nabla) u \\ (v \nabla) v \\ (v \nabla) w \\ 0 \\ \frac{v \nabla \tau}{C} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Очевидно, что в отличие от случая гравитационной конвекции [6], оператор L' не является самосопряженным. Однако если вместо функций v, Π, τ рассматривать $v, \Pi - \zeta \tau, \tau$, то из уравнений (3.1) следует система,

которую можно представить в операторном виде с самосопряженным оператором

$$LX = F \quad (3.2)$$

$$L = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial \xi} & -\zeta \frac{\partial}{\partial \xi} \\ 0 & \Delta & 0 & -\frac{\partial}{\partial \eta} & -\zeta \frac{\partial}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & \Delta & -\frac{\partial}{\partial \zeta} & -\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} & -1 \\ -\frac{\partial}{\partial \xi} & -\frac{\partial}{\partial \eta} & -\frac{\partial}{\partial \zeta} & 0 & 0 \\ -\zeta \frac{\partial}{\partial \xi} & -\zeta \frac{\partial}{\partial \eta} & -\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} & -1 & 0 & \frac{1}{PC} \Delta \end{pmatrix}$$

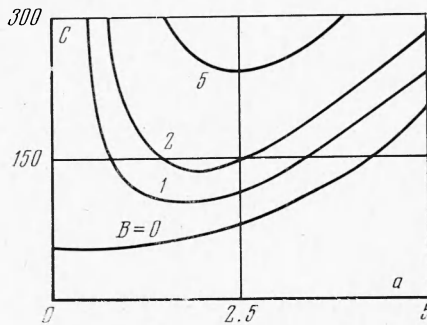
$$X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \Pi - \zeta \tau \\ \tau \end{pmatrix}$$

Систему уравнений (3.2) можно решать методом разложения по малому параметру ε , причем необходимо учесть, что $1/C = (1 - \varepsilon^2)/C_*$.

Таким образом, получаются следующие системы уравнений:

$$L_0 X^{(0)} = 0, \\ L_0 X^{(1)} = F^{(1)}, \quad L_0 X^{(2)} = F^{(2)} \quad (3.3)$$

В соответствии с альтернативой Фредгольма неоднородные системы уравнений (3.3) имеют решения $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ только в том случае, когда правые части этих уравнений $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ ортогональны $X^{(0)}$ решению однородной системы уравнений



Фиг. 2

$$\int \left[\mathbf{v}^{(0)} (\mathbf{v}^{(0)} \nabla) \mathbf{v}^{(0)} + \frac{1}{C_*} \tau^{(0)} \mathbf{v}^{(0)} \nabla \tau^{(0)} \right] d^3 r = 0 \\ \int \left[\mathbf{v}^{(0)} (\mathbf{v}^{(0)} \nabla) \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(0)} (\mathbf{v}^{(1)} \nabla) \mathbf{v}^{(0)} + \frac{1}{C_*} \tau^{(0)} (\mathbf{v}^{(0)} \nabla \tau^{(1)} + \right. \quad (3.4) \\ \left. + \mathbf{v}^{(1)} \nabla \tau^{(0)}) + \tau^{(0)} w^{(0)} \right] d^3 r = 0 \\ (d^3 r = 2\pi r dr d\zeta)$$

Отсутствие нормальной компоненты скорости на поверхности ячейки и уравнение неразрывности позволяют преобразовать (3.4) к виду:

$$\int \left[\mathbf{v}^{(0)} (\mathbf{v}^{(0)} \nabla) \mathbf{v}^{(1)} + \frac{1}{C_*} \tau^{(0)} \mathbf{v}^{(0)} \nabla \tau^{(1)} + \tau^{(0)} w^{(0)} \right] d^3 r = 0 \quad (3.5)$$

Условие (3.5) выполняется лишь при определенном значении амплитуды поля скоростей движения жидкости в конвективной ячейке.

Действительно, $X^{(1)}$ -решение нелинейной системы уравнений (3.3) будем искать в виде

$$\mathbf{v}^{(1)} = \sum_{n,l} \alpha_{nl} \mathbf{v}_{nl}, \quad \Pi^{(1)} = \sum_{n,l} \beta_{nl} \Pi_{nl}, \quad \tau^{(1)} = \sum_{n,l} \gamma_{nl} \tau_{nl} \quad (3.6)$$

Здесь \mathbf{v}_{nl} вектор с компонентами в цилиндрической системе координат $(v_{nl\rho}, 0, w_{nl})$ (3.7)

$$\begin{aligned} v_{nl\rho} &= -(\pi n / a_l) J_1(a_l \rho) \cos \pi n \zeta, & w_{nl} &= J_0(a_l \rho) \sin \pi n \zeta \\ \tau_{nl} &= -\frac{(a_l^2 + \pi^2 n^2)^2}{a_l^2} J_0(a_l \rho) \sin \pi n \zeta, & \Pi_{nl} &= -\pi n \frac{a_l^2 + \pi^2 n^2}{a_l^2} J_0(a_l \rho) \cos \pi n \zeta \\ & & a_l &= x_{1l} / \rho_0 \quad (l, n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{nl} &= \nabla \Pi_{nl} + \tau_{nl} \mathbf{e}_\zeta, & \operatorname{div} \mathbf{v}_{nl} &= 0 \\ \Delta \tau_{nl} &= R_{nl} w_{nl} & (R_{nl} &= (a_l^2 + \pi^2 n^2)^3 / a_l^2) \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{e}_ζ — орт в направлении оси ζ . Полнота системы функций (3.7) в области $0 \leq \rho \leq \rho_0, 0 \leq \zeta \leq 1$ и уравнение неразрывности позволяет искать $X^{(1)}$ в виде (3.6). Подстановка (3.6) в систему уравнений (3.3) и скалярное умножение этой системы на вектор с компонентами $\mathbf{v}_{mk}, \Pi_{mk}, \tau_{mk}$ приводит к следующей системе уравнений:

$$\sum_{n,l} \alpha_{nl} W_{mknl} = V_{mk}, \quad \sum_{n,l} \left(-\alpha_{nl} + \frac{1}{PC_*} R_{nl} \gamma_{nl} \right) W_{nlmk} = T_{mk} \quad (3.8)$$

$$W_{mknl} = \int w_{mk} \tau_{nl} d^3r$$

$$V_{mk} = \int \mathbf{v}_{mk} (\mathbf{v}^{(0)} \nabla) \mathbf{v}^{(0)} d^3r, \quad T_{mk} = \frac{1}{C_*} \int \tau_{mk} \mathbf{v}^{(0)} \nabla \tau^{(0)} d^3r$$

С помощью формулы (3.7) можно получить

$$\begin{aligned} W_{mknl} &= W_{nl} \delta_{mn} \delta_{kl} & \left(\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \right) \\ (W_{nl} &= -1/2\pi (a_l + \pi^2 n^2 / a_l)^2 \rho_0^2 J_0^2(x_{1l})) \end{aligned}$$

Тогда из уравнений (3.8)

$$\alpha_{nl} = V_{nl} / W_{nl}, \quad \gamma_{nl} = PC_* (T_{nl} + V_{nl}) / R_{nl} W_{nl} \quad (3.9)$$

Подстановка в (3.9) выражений (2.4), (3.7) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \alpha_{nl} &= \lambda_{nl} a_l [(2a_*^2 + \pi^2 n^2 A_{1l}) B_{1n} + \pi n (1 - 2A_{1l}) B_{2n}] & (3.10) \\ \gamma_{nl} &= \lambda_{nl} \Phi_{nl} PC_* [a_l^3 (2a_*^2 + \pi^2 n^2 A_{1l}) \Phi_{nl}^2 B_{1n} + \pi n a_l^3 (1 - 2A_{1l}) \Phi_{nl}^2 B_{2n} + \\ & + a_* a_l^2 (A_{2l} - A_{3l}) B_{3n} + \pi n a_* a_l^2 A_{2l} B_{4n}] \end{aligned}$$

$$\lambda_{nl} = -\frac{4k^2 \Phi_{nl}^2 L_l}{\varepsilon^2 x_{1l}^2 J_0^2(x_{1l})}, \quad \Phi_{nl} = \frac{1}{a_l^2 + \pi^2 n^2}, \quad L_l = \int_0^{\rho_0} J_1^2(a_* \rho) J_1(a_l \rho) d\rho$$

$$A_{1l} = \frac{2}{4 - \delta_l^2}, \quad A_{2l} = \frac{4}{\delta_l (4 - \delta_l^2)}, \quad A_{3l} = \frac{4 - 2\delta_l^2}{\delta_l (4 - \delta_l^2)}, \quad \delta_l = \frac{x_{1l}}{x_{11}}$$

$$B_{1n} = \int_0^1 W \frac{dW}{d\zeta} \sin \pi n \zeta d\zeta, \quad B_{2n} = \int_0^1 \left(\frac{dW}{d\zeta} \right)^2 \cos \pi n \zeta d\zeta$$

$$B_{3n} = \int_0^1 \frac{dW}{d\zeta} \Theta \sin \pi n \zeta d\zeta, \quad B_{4n} = \int_0^1 W \Theta \cos \pi n \zeta d\zeta$$

Если подставить разложение (3.6) в условие разрешимости (3.5), то

$$\sum_{n, l} \int \left[\alpha_{nl} \mathbf{v}^{(0)} (\mathbf{v}^{(0)} \nabla) \mathbf{v}_{nl} + \frac{\gamma_{nl}}{C_*} \tau^{(0)} \mathbf{v}^{(0)} \nabla \tau_{nl}^* \right] d^3r + \int \tau^{(0)} w^{(0)} d^3r = 0 \quad (3.11)$$

Предполагается, что основной вклад в разложение (3.6) дают члены с первыми отличными от нуля значениями коэффициентов α_{11} , γ_{11} .

Интегралы в формуле (3.11) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \int \mathbf{v}^{(0)} (\mathbf{v}^{(0)} \nabla) \mathbf{v}_{11} d^3r &= \frac{2\pi k^2 L_1}{\varepsilon^2 a_*^3} \{ B_{11} [(a_*^2 - \pi^2) A_{11} - 2a_*^2 A_{21}] + \pi B_{21} (1 - A_{31}) \} \\ \int \tau^{(0)} \mathbf{v}^{(0)} \nabla \tau_{11} d^3r &= - \frac{2\pi k^2 L_1}{\varepsilon^2 a_*^3 \varphi_{11}^2} C_* (A_{11} B_{31} + \pi \varphi_{11} A_{21} B_{41}) \\ \int \tau^{(0)} w^{(0)} d^3r &= \frac{k^2}{\varepsilon^2} C_* \pi \rho_0^2 J_0^2(x_{11}) B_{40} \quad (L_1 = \frac{0.31}{a_*}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Вычисление интегралов в (3.10) и (3.12) по переменной ζ проводилось приближенно с использованием первых членов разложения подынтегральных функций в ряд Фурье с выделением линейных частей для улучшения сходимости.

Расчет амплитуды поля скоростей конвективного движения в шлаке ($P \gg 1$) приводит к следующему результату:

$$k = \pm \frac{2.3\varepsilon}{P} \frac{a_*^2 + \pi^2}{a_* \operatorname{sh} a_*} \left[\frac{C_* (a_*^2 + \pi^2)}{\operatorname{sh} a_*} \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

В случае конвекции в слое металла ($P \ll 1$) амплитуда имеет вид

$$k = \pm 3.7\varepsilon b_2 \sqrt{F b_1 P} \quad (3.14)$$

$$1/b_1 = 4\pi a_* \varphi_{11}^2 (\operatorname{sh} a_* \operatorname{ch} a_* + \operatorname{sh} a_* - a_* - a_* \operatorname{ch} a_*)$$

$$1/b_2 = 8\pi a_* \varphi_{21}^2 (\operatorname{sh} a_* \operatorname{ch} a_* + a_* \operatorname{ch} a_* - a_* - \operatorname{sh} a_*)$$

$$F = \frac{\operatorname{sh} 2a_* - 2a_*}{a_*} \left(\operatorname{ch} a_* + \frac{B}{a_*} \operatorname{sh} a_* + 1 \right) + \frac{C_* \operatorname{ch} a_*}{4} + \frac{C_* \operatorname{sh} a_* (1 - \operatorname{ch} 2a_*)}{8a_*^3}$$

В частности, в соответствии с этими результатами амплитуда движения в шлаке равна $k \approx \pm 50\varepsilon / P$ при $B = 0$, а в жидком металле $k \approx \pm 100\varepsilon \sqrt{P}$ при $B = 1$.

4. Конвективная диффузия. Для расчета скорости удаления газа из слоя жидкости требуется решить уравнение конвективной диффузии, которое для стационарного случая в безразмерных переменных имеет вид

$$P_D \left(v_\rho \frac{\partial c}{\partial \rho} + w \frac{\partial c}{\partial \zeta} \right) = \frac{\partial^2 c}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial c}{\partial \rho} \quad \left(P_D = \frac{v}{D} \right) \quad (4.1)$$

Здесь P_D — диффузионное число Прандтля, c — концентрация газа в жидкости.

Осевая компонента скорости w определяется формулами (2.4), (2.9), (2.11), а радиальная в соответствии с уравнением неразрывности равна

$$v_\rho = - (k/a_*) J_1(a_* \rho) dW/d\zeta \quad (4.2)$$

Так как в жидкостях обычно $P_D \gg 1$, то даже при малой амплитуде движения жидкости в конвективной ячейке может быть выполнено условие $kP_D \gg 1$ ($k > 0$).

В этом случае можно воспользоваться теорией конвективной диффузии В. Г. Левича [4], в соответствии с которой распределение концентрации растворенного вещества в объеме характеризуется наличием тонкого

диффузионного слоя, так что изменение концентрации будет происходить только в тонком слое вблизи поверхности $\zeta = 0$, где поле скоростей описывается первыми членами разложения по степеням ζ

$$w = k\alpha_i J_0(a_* \rho) \zeta, \quad v_\rho = -k(\alpha_i / a_*) J_1(a_* \rho) \quad (4.3)$$

$$(\alpha_1 = a_* - \text{sh } a_* \text{ ch } a_*, \quad \alpha_2 = a_*^2 - \text{sh}^2 a_*)$$

индексы $i = 1, 2$ отвечают соответственно конвекции в шлаке и металле. Тогда задача сводится к отысканию решения уравнения

$$-k\alpha_i P_D \left[\frac{1}{a_*} J_1(a_* \rho) \frac{\partial c}{\partial \rho} - J_0(a_* \rho) \zeta \frac{\partial c}{\partial \zeta} \right] = \frac{\partial^2 c}{\partial \tau^2} \quad (4.4)$$

с граничными условиями, определяющими концентрацию $c = c_\infty$ в объеме расплава ($\zeta \rightarrow \infty$) и в окрестности точки (если $w < 0$ при $\rho = 0$) или линии (если $w > 0$ при $\rho = 0$) набегания и $c = c_0$ на граничной поверхности ($\zeta = 0$) за исключением точки или линии набегания.

Преобразование Мизеса [4] означает переход от переменных ρ, ζ к новым ψ, τ , где

$$\psi = \frac{\rho \zeta}{a_*} J_1(a_* \rho) \quad \left(\frac{\rho}{k\alpha_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \quad \frac{w}{k\alpha_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \quad (4.5)$$

Тогда уравнение (4.4) принимает вид уравнения типа теплопроводности

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c}{\partial \psi^2} \quad \left(d\tau = -\frac{\rho^2}{k\alpha_i P_D a_*} J_1(a_* \rho) d\rho \right) \quad (4.6)$$

Если $w > 0$ ($k < 0$), то линия набегания потока соответствует $a_* \rho = x_{11}$, а поэтому функцию τ удобно выбрать в виде

$$k\alpha_i P_D a_*^4 \tau_+ = [x_{11}^2 J_2(x_{11}) - a_*^2 \rho^2 J_2(a_* \rho)] \quad (4.7)$$

Если $w < 0$ ($k > 0$), то точка набегания, очевидно, соответствует $\rho = 0$, поэтому нужно выбрать

$$-k\alpha_i P_D a_*^2 \tau_- = \rho^2 J_2(a_* \rho) \quad (4.8)$$

В обоих случаях граничные условия имеют одинаковый вид

$$c = c_0 \quad \text{при} \quad \psi = 0, \quad \tau \neq 0 \quad (4.9)$$

$$c \rightarrow c_\infty \quad \text{при} \quad \psi \rightarrow \infty$$

$$c \rightarrow c_\infty \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0, \quad \psi \neq 0$$

Уравнение (4.6) с граничными условиями (4.9) допускает автомодельное решение

$$\frac{c - c_0}{c_\infty - c_0} = \text{erf} \frac{\psi}{2\sqrt{\tau}} \quad \left(\text{erf } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \right) \quad (4.10)$$

Таким образом, плотность диффузионного потока на границе раздела фаз равна

$$j = -\frac{D}{h} \left(\frac{\partial c}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} = -\frac{D(c_\infty - c_0) \rho J_1(a_* \rho)}{h a_* \sqrt{\pi \tau}} \quad (4.11)$$

Полный поток с площади поверхности, приходящийся на одну ячейку

$$I = \frac{2\pi h^2}{a_*^2} \int_0^{x_{11}} j x dx = - \frac{2h x_{11}}{a_*^2} (c_\infty - c_0) \sqrt{\pi D \nu J_2(x_{11}) |k \alpha_i|} \quad (4.12)$$

Средняя плотность потока с единицы площади поверхности расплава равна

$$I_0 = - \frac{D}{\delta} (c_\infty - c_0) \left(\delta = \frac{x_{11} h \sqrt{\pi D}}{4 \sqrt{\nu J_2(x_{11}) |k \alpha_i|}} \right) \quad (4.13)$$

В частных случаях толщина диффузионного пограничного слоя имеет вид

$$\delta \approx 0.1 (D / \chi \varepsilon)^{1/2}, \quad P \gg 1, \quad B = 0$$

$$\delta \approx 0.1 (D^2 \chi / \nu^3 \varepsilon^2)^{1/4}, \quad P \ll 1, \quad B = 1$$

Поступила 27 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. P e a r s o n J. R. A. On convection cells induced by surface tension. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, p. 489.
2. N i e l d D. A. Surface tension and buoyancy effects in cellular convection. J. Fluid Mech., 1964, vol. 19, p. 341.
3. R a y l e i g h. On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. Sci. Papers, Cambridge, Univ. Press, 1916, vol. 6, p. 432.
4. Л е в и ч В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
5. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
6. С о р о к и н В. С. О стационарных движениях жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.