

13. Дрюма В. С. Об аналитическом решении осесимметричного уравнения Кортевега—де Вриза.— Изв. АН СССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1976, № 3.
14. Kajitara K. The leading wave of a tsunami.— Bull. Earthq. Res. Inst., 1963, vol. 41, p. 535.
15. Казаченко Л. С., Христофоров Б. Д. Поверхностные явления при подводных взрывах.— ФГВ, 1972, т. 8, № 3.
16. Ко К., Kuehl H. H. Cylindrical and spherical KdV solitary waves.— Phys. Fluids, 1979, vol. 22, N 7.

УДК 532.517.4

О ПЕРЕМЕШИВАНИИ КОНТАКТНОЙ ГРАНИЦЫ, ЗАМЕДЛЯЕМОЙ СТАЦИОНАРНЫМИ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

В. Е. Неужаев, В. Г. Яковлев
(Челябинск)

В работе [1] экспериментально обнаружено явление турбулентного перемешивания границы раздела двух газов разной плотности, замедляемой плоскими стационарными ударными волнами, движущимися из легкого газа в тяжелый.

Ниже показано, что в рамках полуэмпирических моделей [1—3] это явление определяется размером начальных возмущений — шероховатостью границы раздела. Если характерный размер этих возмущений устремить к нулю, то ширина области перемешивания также стремится к нулю. Это явление объясняется δ -образным характером ускорения.

Если ускорение изменяется плавно, например постоянно, то перемешивание будет развиваться всегда, в том числе и при бесконечно малой шероховатости. Приводится аналитическая зависимость ширины области перемешивания от начальной шероховатости.

Граница раздела газов (жидкостей) неустойчива к малым возмущениям, если ускорение направлено от легкого к тяжелому. Эта неустойчивость возникает при достаточно малых коэффициентах вязкости и поверхностном натяжении.

В полуэмпирических моделях [1—3] полагается, что турбулентное перемешивание проявляется одновременно с действием ускорения, хотя в действительности наличие вязкости и поверхностного натяжения приводит к возникновению конечного по времени промежутка, в течение которого происходит постепенный переход к турбулентному движению.

Известные автомодельные решения [3—5] получены в предположении малости начальных возмущений. Реально эти возмущения могут быть и не малыми. Ниже установлен закон, по которому происходит выход на автомодельное решение при постоянном ускорении. Неожиданно обнаружилось слабое «забывание» начальных неровностей поверхности.

1. Приближенная модель. Рассмотрим диффузионную модель турбулентного перемешивания в приближенной постановке работы [5]: жидкости несжимаемы, а турбулентная скорость v предполагается функцией только времени. Тогда процесс турбулентного перемешивания будет описываться двумя уравнениями для двух искомых величин (плотности смеси ρ и характерной турбулентной скорости v):

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = lv \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2};$$

$$(1.2) \quad \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} + \frac{v}{\alpha} \frac{v^3}{L} = \alpha v \omega^2,$$

где L — эффективная ширина области перемешивания, равная расстоянию между точками, в которых безразмерная плотность $\delta = (\rho - \rho_2)/(\rho_1 - \rho_2)$ принимает значения 0,1 и 0,9; ρ_1 и ρ_2 — плотности легкой и тяжелой жидкостей, так что для плотности смеси имеет место равенство $\rho = \rho_1 + \rho_2$; v — вторая эмпирическая постоянная; $\bar{\omega}^2$ — усредненное по области пе-

ремешивания выражение $g \partial \ln \rho / \partial x$; g — ускорение. Концентрация легкой жидкости выражается через плотность ρ :

$$c = \frac{\rho_2}{\rho} = \frac{\rho_2^0 (\rho - \rho_2^0)}{\rho (\rho_1^0 - \rho_2^0)},$$

поэтому в дальнейшем рассмотрении не участвует.

Полагается, что характерная турбулентная длина, входящая в коэффициент диффузии, связана с областью перемешивания некоторой постоянной α , определяемой из эксперимента:

$$l = \alpha L.$$

Будем считать, что границей раздела в начальный момент является точка $x = 0$. Так как ρ_1^0 и ρ_2^0 — начальные плотности тяжелой и легкой жидкостей — постоянны, а l и v — функции только времени, то уравнение (1.4) преобразуется заменой переменных к уравнению диффузии с постоянным коэффициентом [5]:

$$(1.3) \quad \partial \rho / \partial \tau = \partial^2 \rho / \partial x^2,$$

где $d\tau = l v dt$. Решение уравнения (1.3) может быть представлено через интеграл вероятности, а для ширины L справедливо выражение

$$(1.4) \quad L = 4\eta_0 \tau^{1/2}, \quad \eta_0 = 0,906.$$

Исключая τ из (1.4), получим уравнение

$$(1.5) \quad \frac{dL}{dt} = 8\eta_0 \alpha v.$$

2. Зависимость от начальных данных при постоянном ускорении. Исследованию подлежат уравнения (1.2), (1.5) при произвольных начальных данных L_0 и v_0 .

Ограничимся сперва случаем $v_0 = 0$. Уравнение (1.2) преобразуем к виду

$$(2.1) \quad \frac{dv}{dt} = \alpha A_1 - \frac{v \cdot v^2}{\alpha L},$$

где A_1 — некоторая постоянная, определяемая начальными данными. Из (1.5), (2.1) следует уравнение

$$\frac{dL}{dv} = \frac{8\eta_0^2 \alpha^2 v L}{\alpha^2 A_1 L - v^2}.$$

Его решение имеет вид

$$(2.2) \quad v^2 = \frac{A_1 \alpha^2}{4\alpha^2 \eta_0^2 + v} L + c L^{-v/4\eta_0^2 \alpha^2},$$

где c — произвольная постоянная. При нулевых начальных данных $L_0 = v_0 = 0$ постоянная $c = 0$, а подстановка (2.2) в (1.5) и последующее интегрирование приводят к известному решению

$$L = 16\eta_0^4 \alpha^4 \frac{A_1}{4\eta_0^2 \alpha^2 + v} t^2.$$

Если начальная шероховатость $L_0 \neq 0$, а $v_0 = 0$, то задача сведется к уравнению

$$\frac{dL}{dt} = \frac{8\eta_0^2 \alpha^2 \sqrt{A_1}}{\sqrt{4\alpha^2 \eta_0^2 + v}} \sqrt{L - L_0 \left(\frac{L_0}{L}\right)^{v/4\eta_0^2 \alpha^2}}.$$

Проинтегрируем его приближенно, отбросив второе слагаемое под корнем:

$$(2.3) \quad \sqrt{L} = \frac{4\eta_0^2 \alpha^2 \sqrt{A_1}}{\sqrt{4\alpha^2 \eta_c^2 + v}} t + \sqrt{L_0}.$$

Обозначим через L' решение с начальным возмущением L_0 , тогда устанавливается связь с невозмущенным решением L :

$$\sqrt{L'/L} = 1 + \sqrt{L_0/L}.$$

Из приводимой формулы вытекает слабое «забывание» начальных данных. Так, однопроцентная шероховатость ($L_0/L = 0,01$) приводит к двадцати-процентному отклонению от точного решения ($L'/L = 1,21$).

В общем случае ненулевых начальных данных v_0 и L_0 можно указать качественно картину выхода на автомоделный режим. Из (1.5), (2.1) получим начальное значение второй производной от функции \sqrt{L}

$$\left. \frac{d^2 \sqrt{L}}{dt^2} \right|_{t=0} = - (16\eta_0^4 \alpha^2 + 4\eta_0^2 v) \frac{v_0^2}{L_0} + \frac{4\eta_0^2 \alpha^2 A_1}{\sqrt{L_0}}.$$

Если $v_0 = 0$, то $d^2 \sqrt{L}/dt^2 > 0$. В этом случае выход на линейный закон в переменных \sqrt{L} , t происходит с затяжкой (фиг. 1, кривая 1).

Если $v_0 \neq 0$, то возможен случай, когда $d^2 \sqrt{L}/dt^2 < 0$. Тогда в начальный момент имеет место более быстрое развитие с последующим замедлением и выходом на линейный закон (фиг. 1, кривая 2).

Штриховая прямая на фиг. 1 отвечает приближенному решению (2.3).

3. δ -образный вид ускорения. Этим случаем моделируется прохождение стационарной ударной волны через контактную границу. Изучим зависимость от начальных данных. Рассмотрим случай, когда до прихода ударной волны граница имеет некоторую шероховатость L_0 . Действие ударной волны приводит к тому, что начальные данные для турбулентной скорости становятся ненулевыми.

Действительно, проинтегрировав по времени исходное уравнение (1.2) и устремив к нулю верхний предел интегрирования, получим

$$(3.1) \quad v_0 = \alpha U_0 A_2,$$

где U_0 — скорость границы после прохождения ударной волны; A_2 — постоянная. Далее уравнение (1.2) нужно рассматривать с нулевой правой частью и с начальными данными (3.1):

$$(3.2) \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\alpha} \frac{v^2}{L} = 0.$$

Два уравнения (1.5) и (3.2) сводятся к одному:

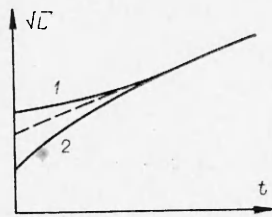
$$\frac{dL}{dv} = - \frac{8\alpha^2 \eta_0^2}{v} \frac{L}{v}.$$

Его решение имеет вид

$$L = L_0 \left(\frac{v_0}{v} \right)^{8\alpha^2 \eta_0^2 / v}.$$

Из последней формулы вытекает, что ненулевое решение возможно только при $L_0 \neq 0$. Закон развития ширины области перемешивания определится после интегрирования уравнения (1.5):

$$(3.3) \quad L = L_0 \frac{v}{v + 8\alpha^2 \eta_0^2} \left(\frac{v + 8\alpha^2 \eta_0^2}{\alpha} v_0 t + L_0 \right)^{\frac{8\alpha^2 \eta_0^2}{v + 8\alpha^2 \eta_0^2}}.$$



Фиг. 1

Степень всегда меньше единицы. При $L_0 = 0$ возможно только тривиальное решение.

4. Сравнение с результатами других работ. В [1] изучалось турбулентное перемешивание воздуха с гелием. Первоначально газы были разделены тонкой пленкой, затем стационарная ударная волна с числом Маха $M = 1,3$ проходила границу, входила в гелий, отражалась от жесткой стенки и снова приходила на границу. После отражения от нее, а затем и от жесткой стенки

ударная волна многократно замедляла контактную границу. Экспериментально наблюдалось турбулентное перемешивание границы раздела.

Нами был проведен численный расчет этой задачи. Использовалась следующая система уравнений:

$$(4.1) \quad d\rho/dt + \rho \partial u / \partial x = 0 \text{ — уравнение неразрывности;}$$

$$(4.2) \quad du/dt = -\partial p / \rho \partial x \text{ — уравнение движения;}$$

$$(4.3) \quad dc/dt = -\partial j / \rho \partial x, \quad j = -\rho l v \partial c / \partial x \text{ — уравнение для концентраций;}$$

$$(4.4) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{d(1/\rho)}{dt} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad q = -\rho l v \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + p \frac{\partial (1/\rho)}{\partial x} \right) \text{ —}$$

уравнение энергии;

$$(4.5) \quad \frac{d\rho v^2}{dt} + v \frac{\rho v^3}{l} = \rho l v \omega^2 + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho l \frac{\partial v^3}{\partial x} \right),$$

где $\omega^2 = g(\partial \rho / \rho \partial x + g/a^2)$; $g = -\partial p / \rho \partial x$; a — скорость звука; $p = p_1(1-c) + p_2c$; $\varepsilon = \varepsilon_1(1-c) + \varepsilon_2c$; $\beta = 0,5$.

Представленная модель турбулентного перемешивания отличается от [2] введением уравнения (4.5) для турбулентной скорости v . Это изменение модели позволяет описать неавтономные задачи с резко изменяющимся ускорением.

Сравнение с моделью [1] показывает, что в основных чертах модели совпадают. Различия относятся к несущественным членам, а также к выбранным эмпирическим постоянным. Для выводов данной работы это несущественно.

Уравнения (4.1) — (4.5) заменялись разностными по схеме, предложенной в [2]. Способ вычисления ширины области перемешивания взят из [2].

Рассматриваемая задача оказалась весьма чувствительной к пространственной сетке. Это объясняется способом вычисления ширины области перемешивания. В методе он таков, что начальная ширина имеет ненулевое значение порядка сеточного интервала. Точнее,

$$L_0 = \frac{1}{2} (h_1 + h_2),$$

где h_1 и h_2 — шаги по пространству слева и справа от границы раздела.

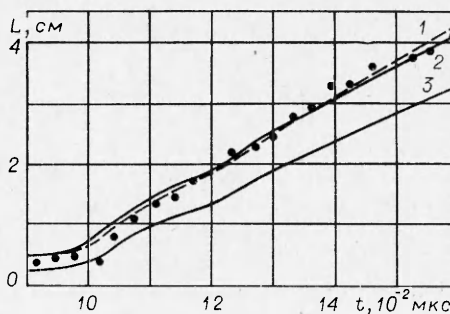
При плавно меняющемся ускорении начальная ширина может вычисляться по аналитической формуле, как в [2], но в данном случае такой способ неприемлем. Поэтому была прослежена сходимость путем дробления сеточных интервалов в районе границы. Получилось, как и при теоретическом анализе в п. 3, что перемешивание с малой начальной шириной L_0 мало.

На фиг. 2 точками изображены результаты эксперимента [1]. В эксперименте к моменту первого замедления $t = 1000$ мкс наблюдалась область возмущения $L_0 \approx 5$ мм. Из формулы (3.3) следует, что соответствующим подбором α и ν при фиксированном L_0 можно добиться совпадения с экспериментом. Удовлетворительное совпадение с экспериментом получено,

например, при $\alpha = 0,31$ и $\nu = 1,25$ (кривая 2), а также при $\alpha = 0,25$ и $\nu = 0,3$ (кривая 1). Кривая 3 соответствует постоянной кривой 2 и $L_0 = 2,5$ мм.

В расчетах [1] турбулентное перемешивание включалось в момент первого торможения. Начальная ширина области перемешивания была ненулевой и определила весь дальнейший процесс.

Таким образом, модели турбулентного перемешивания в [1] и в данной работе таковы, что ширина области перемешивания, развивающаяся под действием серии стационарных ударных волн, полностью определяется характером размером начального возмущения.



Ф и г. 2

Поступила 29 XII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов В. А., Бахрах С. М. и др. Турбулентное перемешивание на контактной поверхности, ускоримой ударными волнами.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, № 2(8).
2. Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г. Турбулентное перемешивание границы раздела в численном газодинамическом расчете.— ЖВММФ, 1976, т. 16, № 2.
3. Беленький С. З., Фрадкин Е. С. Теория турбулентного перемешивания.— Труды ФИАН им. Лебедева, 1965, т. 29, с. 207—238.
4. Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г. К теории турбулентного перемешивания границы раздела жидкостей в поле тяжести.— ПМТФ, 1976, № 4.
5. Неуважаев В. Е. К теории турбулентного перемешивания.— ДАН СССР, 1975, т. 222, № 5.

УДК 532.517.6 : 532.11 : 533.69

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ В ВЫЕМКЕ, ОБТЕКАЕМОЙ ДОЗВУКОВЫМ ИЛИ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

А. Н. Антонов, А. Н. Вишняков, С. П. Шалаев
(Москва)

Рассматривается дозвуковое или сверхзвуковое обтекание выемки малой глубины при ламинарном, переходном и турбулентном режимах течения в пограничном слое перед точкой отрыва. При некоторых условиях (числе Маха внешнего потока, размере и форме выемки и т. д.) в спектре пульсаций давления выемки наблюдаются дискретные составляющие. Это явление при турбулентном течении в пограничном слое перед выемкой исследовалось как экспериментально [1—4], так и теоретически [5]. В работах [1, 4] выявлена нестационарная картина течения в окрестности выемки в основном с помощью теневых фотографий, полученных с малой экспозицией ($\sim 10^{-6}$ с). В работе [3] определены частоты дискретных составляющих в спектре давления трехмерной прямоугольной выемки.

В данной работе подробно исследована нестационарная картина течения в выемке и ее окрестности при ламинарном, переходном и турбулентном режимах течения в пограничном слое перед выемкой. Показано, что при ламинарном течении в пограничном слое вследствие пульсаций давления в выемке перед ней образуется нестационарная отрывная зона малого размера, которая периодически исчезает и возникает вновь. Скачки уплотнения, образовавшиеся перед этой зоной отрывного течения, и сформировавшиеся в зоне вихря периодически сносятся потоком после очередного исчезновения этой зоны.