

УДК 519.642

СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОДАВЛЕНИЯ АРТЕФАКТОВ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ

А. В. Лихачев

*Институт автоматизи и электрометрии СО РАН,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 1
E-mail: ipt1@iae.nsk.su*

Предложен новый метод подавления артефактов томографической реконструкции, в котором используется выборочная оценка математического ожидания невязки между фантомами, представляющими случайное распределение, и их томограммами. Проведено обоснование метода как теоретически, так и путём вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: артефакты томографической реконструкции, математическое ожидание невязки.

Введение. Результаты томографической реконструкции всегда содержат искажения. Далее они будут называться артефактами. Среди них в первую очередь следует выделить те, которые обусловлены наличием в проекционных данных случайного шума, сопровождающего любые реальные измерения. Его влияние исследовалось, например, в работах [1–4]. Для получения устойчивых решений при реконструкции по зашумлённым данным часто применяется статистическая регуляризация [5, 6].

Обычно используемое на практике лучевое приближение предполагает, что показание отдельного детектора может быть представлено как интеграл вдоль прямой линии от искомой функции [7, 8]. Именно на него ориентировано большинство томографических алгоритмов, основанных на обращении интегральных преобразований [9]. Отклонения процесса регистрации данных от лучевой модели, вызванные конечной шириной зондирующего пучка, рассеянием излучения и другими факторами, также приводят к искажениям получаемого изображения. Ряд работ посвящён исследованию связанных с этим проблем, причём при рассмотрении рассеяния широко используется метод Монте-Карло [10–12].

Важную роль играют особенности геометрии регистрирующей системы. Здесь большое внимание уделяется проекционным схемам, которые не обеспечивают измерений в некотором диапазоне углов, что является причиной существенной деформации восстановленного объекта [13–15]. Другой изучаемый вопрос — малое количество ракурсов наблюдения, которое приводит к характерным артефактам [8, 16]. Отметим, что и в таком случае для реконструкции нередко привлекаются статистические методы [17, 18].

Наконец, часть артефактов связана с индивидуальными свойствами алгоритмов. Формула обращения двумерного преобразования Радона предполагает фильтрацию данных с каждого ракурса посредством оператора дифференцирования с последующей свёрткой с ядром Гильберта, что эквивалентно в фурье-области умножению на модуль частоты [7, 9]. Эта операция существует лишь в смысле обобщённых функций. Различные способы её реализации численными методами приводят, как правило, к появлению различных артефактов. Если задача томографии решается в рамках алгебраического подхода [7], то полученная функция содержит артефакты другого типа (см., например, [7, 19]).

Из вышеизложенного можно заключить, что искажения результата реконструкции вызываются как случайными причинами, так и не случайными, зависящими от использу-

емых методов измерений и вычислений. При этом в основе многих процедур подавления артефактов и того и другого рода лежит статистический подход. Разработке одной из процедур посвящено данное исследование. Посылкой является гипотеза о том, что артефакты, полученные при реконструкции различных функций в одинаковых условиях, имеют общие свойства. Искомое изображение считается реализацией случайного распределения, которое определяется своей выборкой. В этом состоит основное отличие от обычного подхода, где исходя из априорных положений задаются первые моменты распределения (в частности, математическое ожидание и ковариационная матрица) или даже функция плотности вероятности.

Рассмотрим множество сходных математических объектов, которые далее будут называться «фантомами». Например, в приложении к медицинской рентгеновской томографии это могут быть изображения определённого сечения тел нескольких пациентов. Зафиксируем геометрию системы регистрации, т. е. количество и ориентацию ракурсов наблюдения. Для всех элементов множества смоделируем проекционные данные. Проведя по ним реконструкцию выбранным алгоритмом, получим набор томограмм. Назовём разность фантома с его томограммой «невязкой». Разумно предположить, что после усреднения по рассматриваемому множеству составляющая невязки, обусловленная индивидуальными свойствами фантомов, подавляется и полученная функция будет характеризовать общие черты артефактов реконструкции при заданных условиях.

Пусть стоит задача интроскопии объекта, близкого к тем, по которым вычислялась средняя невязка, причём используются та же система регистрации и тот же алгоритм. Тогда, если к томограмме исследуемого объекта добавить усреднённую невязку, из приведённых выше рассуждений следует, что часть артефактов на ней будет подавлена. Далее представлено теоретическое обоснование и результаты вычислительного эксперимента, которые также подтверждают, что предлагаемый метод приводит к улучшению результата реконструкции.

Теория. Для определённости будем рассматривать двумерный случай. Пусть изображения задаются на сетке, состоящей из $J = n \times n$ узлов. Положим, что каждый фантом является единичной реализацией J -мерного вектора ξ со случайными значениями компонент. Зафиксируем фантом \mathbf{g} . Обозначим через $\mathbf{f} \in R^I$ проекционные данные от него, здесь I — полное число измерений на всех ракурсах наблюдения. Пусть R^{-1} — оператор, соответствующий алгоритму реконструкции. Обозначим томограмму фантома \mathbf{g} через $\tilde{\mathbf{g}}$, а их невязку через δ , т. е. $\tilde{\mathbf{g}} = R^{-1}\mathbf{f}$, $\delta = \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{g}}$. Они являются реализациями случайных векторов ξ и η соответственно.

Рассмотрим разность

$$\xi - \tilde{\xi} = (\xi - M\{\xi\}) - (\tilde{\xi} - M\{\tilde{\xi}\}) + (M\{\xi\} - M\{\tilde{\xi}\}). \quad (1)$$

Здесь $M\{\cdot\}$ — математическое ожидание. Обозначим последний член в правой части (1) через Ω . В силу известных свойств математического ожидания $\Omega = M\{\xi - \tilde{\xi}\} = M\{\eta\}$. Из равенства векторов следует равенство их норм. Учитывая, что квадрат нормы есть скалярное произведение вектора на себя, из (1) получаем

$$\begin{aligned} \|\xi - \tilde{\xi}\|^2 &= \|\xi - M\{\xi\}\|^2 + \|\tilde{\xi} - M\{\tilde{\xi}\}\|^2 + \|\Omega\|^2 + \\ &+ 2\langle(\xi - M\{\xi\}), \Omega\rangle - 2\langle(\xi - M\{\xi\}), (\tilde{\xi} - M\{\tilde{\xi}\})\rangle - 2\langle(\tilde{\xi} - M\{\tilde{\xi}\}), \Omega\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

где обозначения $\|\cdot\|$ и $\langle\cdot, \cdot\rangle$ — норма и скалярное произведение соответственно.

Теперь найдём квадрат нормы вектора $\xi - (\tilde{\xi} + \Omega)$. Предварительно перепишем его в следующем виде:

$$\xi - (\tilde{\xi} + \Omega) = \xi - (\tilde{\xi} + M\{\xi\} - M\{\tilde{\xi}\}) = (\xi - M\{\xi\}) - (\tilde{\xi} - M\{\tilde{\xi}\}). \quad (3)$$

Тогда

$$\|\xi - (\tilde{\xi} + \Omega)\|^2 = \|\xi - M\{\xi\}\|^2 + \|\tilde{\xi} - M\{\tilde{\xi}\}\|^2 - 2\langle(\xi - M\{\xi\}), (\tilde{\xi} - M\{\tilde{\xi}\})\rangle. \quad (4)$$

Возьмём математическое ожидание от равенств (2) и (4). Поскольку Ω — постоянный вектор, имеет место

$$M\{\langle(\xi - M\{\xi\}), \Omega\rangle\} = \langle(M\{\xi\} - M\{\xi\}), \Omega\rangle = 0. \quad (5)$$

Аналогично обращается в нуль последний член в правой части (2). Нетрудно видеть, что разность математических ожиданий квадратов норм векторов $\xi - \tilde{\xi}$ и $\xi - (\tilde{\xi} + \Omega)$ есть $\|\Omega\|^2$. Она всегда неотрицательна и равна нулю только в том случае, если Ω — нулевой вектор.

Из проведённого рассмотрения следует, что при добавлении к томограмме математического ожидания невязки между фантомом и результатом его реконструкции Ω математическое ожидание среднеквадратичной ошибки уменьшается на величину $\|\Omega\|^2$. Таким образом, если $\Omega \neq \mathbf{0}$, то решение в среднем будет улучшено. Предположим, что это не так, т. е. $\Omega = \mathbf{0}$ для любой геометрии регистрации данных. Тогда каждая из компонент Ω равна нулю, поэтому можно записать

$$M\{\xi_j\} - M\{\tilde{\xi}_j\} = M\{\xi_j - \tilde{\xi}_j\} = 0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (6)$$

Будем считать оператор R^{-1} линейным, поскольку в формулу обращения преобразования Радона входят только линейные процедуры. Проецирующий оператор P , переводящий фантом в набор проекционных данных, также линейный. В таком случае имеет место $\tilde{\xi}_j = \sum_{i=1}^J a_{ji} \xi_i$, где коэффициенты a_{ji} зависят только от операторов R^{-1} и P , но не от конкретной реализации случайного вектора ξ . При этом выражение (6) принимает вид

$$M\{\xi_j\} - \sum_{i=1}^J a_{ji} M\{\xi_i\} = 0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (7)$$

Пусть математическое ожидание распределения фантомов таково, что его k -я компонента равна единице, а все остальные — нулю. Тогда из (7) следует

$$-a_{jk} M\{\xi_k\} = 0, \quad j \neq k; \quad M\{\xi_k\} - a_{kk} M\{\xi_k\} = 0. \quad (8)$$

Из первых $J - 1$ уравнений системы (8) имеем $a_{jk} = 0$, $j \neq k$, а из последнего — $a_{kk} = 1$. Это означает, что оператор R^{-1} должен точно восстанавливать произвольно расположенный единичный импульс по любому набору данных. Но ни один известный в настоящее время алгоритм реконструкции такого обеспечить не может. С другой стороны, всякое изображение можно представить в виде линейной комбинации единичных импульсов. Отсюда следует, что какое бы распределение фантомов не рассматривалось, для линейного оператора R^{-1} математическое ожидание невязки в общем случае не является нулевым

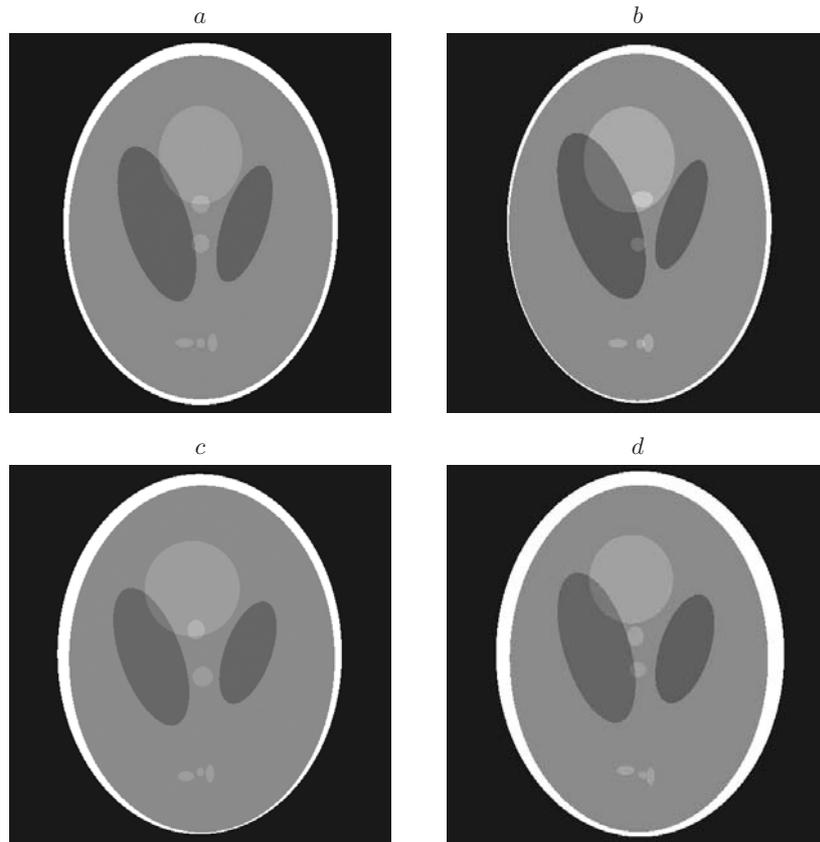


Рис. 1

вектором. Исключение составляет случай, когда одновременно $M\{\xi\} = 0$ и $M\{\tilde{\xi}\} = 0$. Однако в большинстве практических приложений (в частности, в рентгеновской томографии) интерес представляет реконструкция объектов, которым можно сопоставить математический фантом, принимающий только неотрицательные значения, в том числе отличные от нуля. Такой фантом всегда можно включить в распределение, имеющее не равное нулю (положительное) математическое ожидание.

Обсуждение результатов вычислительного эксперимента. Для вычислительного эксперимента случайный вектор ξ генерировался на основе начального фантома \mathbf{g}_0 , представляющего собой сумму эллипсов (рис. 1, *a*). Параметры эллипсов приведены в таблице, где x_0, y_0 — координаты центра; a, b — полуоси; β — угол поворота относительно координатной системы; C — амплитуда. Начальный фантом сходен с известным фантомом Шеппа — Логана, но отличается большей контрастностью.

Чтобы получить единичную реализацию ξ , параметры эллипсов задавались случайными величинами, имеющими непрерывное равномерное распределение с математическим ожиданием, равным значению соответствующего параметра для \mathbf{g}_0 . Размер диапазона значений параметров за исключением x_0, y_0 составлял 1–10 % от величины их математического ожидания. Для координат центра эллипса он составлял 3–7 % от длины его большей оси в составе фантома \mathbf{g}_0 . На рис. 1, *b–d* приведены примеры полученных таким образом реализаций ξ . Их нормированное среднеквадратичное отклонение от \mathbf{g}_0 равнялось 0,432, 0,327 и 0,526 соответственно.

Отметим, что некоторые из эллипсов, входящих в начальный фантом, имеют отрицательную амплитуду, в частности, для того, чтобы смоделировать кольцо более плотного

№ п/п	x_0	y_0	a	b	β	C
1	0,0	0,0	0,69	0,92	0,0	2,0
2	0,0	-0,0184	0,6624	0,874	0,0	-0,98
3	0,22	0,0	0,11	0,31	-18,0	-0,2
4	-0,22	0,0	0,16	0,41	18,0	-0,2
5	0,0	0,35	0,21	0,25	0,0	0,1
6	0,0	0,1	0,046	0,046	0,0	0,1
7	0,0	-0,1	0,046	0,046	0,0	0,1
8	-0,08	-0,605	0,046	0,023	0,0	0,1
9	0,0	-0,605	0,023	0,023	0,0	0,1
10	0,06	-0,605	0,023	0,046	0,0	0,1

материала на границе. При случайном смещении их центров может оказаться, что некоторые значения полученной при этом функции будут отрицательными. Такие реализации исключались из рассмотрения, т. е. полагалось, что ξ имеет только неотрицательные компоненты.

Разработанный метод исследовался для двух алгоритмов, представляющих разные классы. Один из них, основанный на формуле обращения двумерного преобразования Радона, был предложен в [20]. В настоящее время он широко используется в различных приложениях томографии. Другой, ART (Algebraic Reconstruction Techniques) [7], принадлежит к алгебраическим методам. Он также часто применяется при решении томографических задач.

Расчёты проводились на квадратной сетке размера 513×513 узлов. Область реконструкции представляла собой квадрат с центром в начале координат и длиной стороны равной 2. Моделировалась система регистрации в параллельных лучах [7]. Число ракурсов наблюдения, равномерно распределённых по углу в интервале от 0 до π , составляло K . На каждом направлении было 513 отсчётов. При исследовании устойчивости метода по отношению к шумам измерений к данным в каждой точке добавлялась случайная величина, имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием равным 0 и дисперсией $D = \sigma^2 \bar{f}^2$, где σ — положительное число, \bar{f} — среднее значение проекционных данных при отсутствии шума.

Для оценки математического ожидания вектора невязки η , обозначенного выше как Ω , из распределения ξ бралась выборка $V^{(1)}$ объёма N . Для её элементов насчитывались проекционные данные, по которым проводилась реконструкция. После этого вычислялась невязка каждой полученной томограммы с соответствующим ей фантомом. Вектор Ω оценивался как среднее выборочное:

$$\Omega \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta^i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{g}^{(1)i} - \tilde{\mathbf{g}}^{(1)i}). \quad (9)$$

Здесь и далее верхними индексами (1) и (2) обозначаются фантомы, принадлежащие соответственно выборке $V^{(1)}$ и выборке $V^{(2)}$, которая определена далее.

В расчётах варьировались объём выборки $V^{(1)}$, число ракурсов наблюдения K и значение параметра σ , определяющего уровень шума. Чтобы численно описать полученные результаты, из распределения ξ была сделана выборка $V^{(2)}$, состоящая из 15 фантомов. При этом соблюдалось условие $V^{(1)} \cap V^{(2)} = \emptyset$, т. е. для оценки вектора Ω и контроля

точности использовались различные множества. На рис. 1 представлены фантомы как из $V^{(1)}$ (см. рис. 1, *b, c*), так и из $V^{(2)}$ (см. рис. 1, *d*). Для выборки $V^{(2)}$ вычислялись средние нормированные ошибки Δ_1 и Δ_2 , характеризующие точность до и после применения метода:

$$\Delta_1 = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J (g_j^{(2)i} - \tilde{g}_j^{(2)i})^2}{\sum_{j=1}^J (g_j^{(2)i})^2}}; \quad (10)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J (g_j^{(2)i} - \tilde{g}_j^{(2)i} - \Omega_j)^2}{\sum_{j=1}^J (g_j^{(2)i})^2}}.$$

Вычислительный эксперимент показал, что предлагаемый метод позволяет улучшить результат реконструкции обоими рассматриваемыми алгоритмами. Этот вывод основан как на сравнении ошибок Δ_1 и Δ_2 , так и на визуальной оценке качества томограмм.

По рис. 2 можно судить о влиянии количества ракурсов наблюдения. Рис. 2, *a*, как и рис. 3, *a, 4, a*, относится к алгоритму Шеппа — Логана, а рис. 2, *b, 3, b, 4, b* — к алгоритму ART. На рис. 2, *a, b* кривые 1, 2 и 3 — зависимости ошибок Δ_1 , Δ_2 и разности $\Delta_1 - \Delta_2$

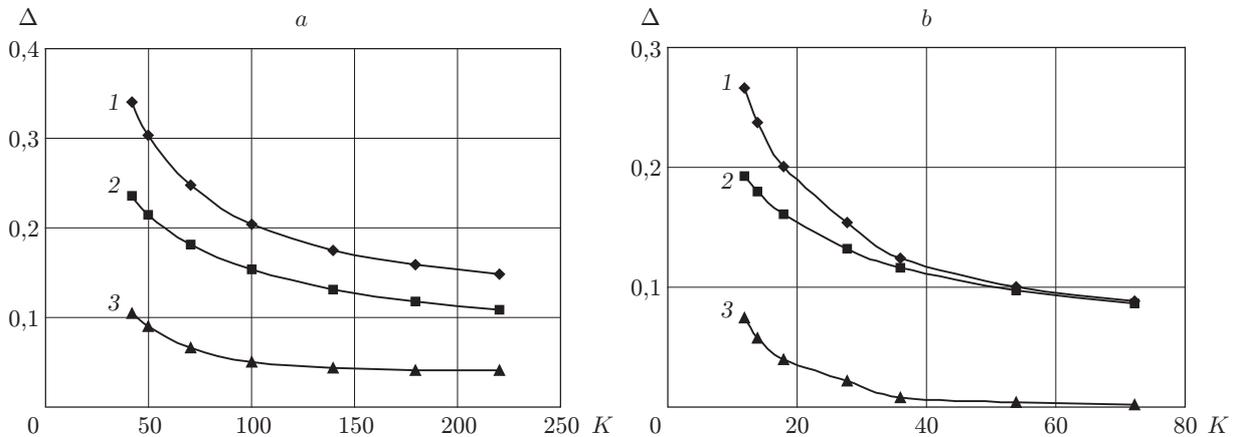


Рис. 2

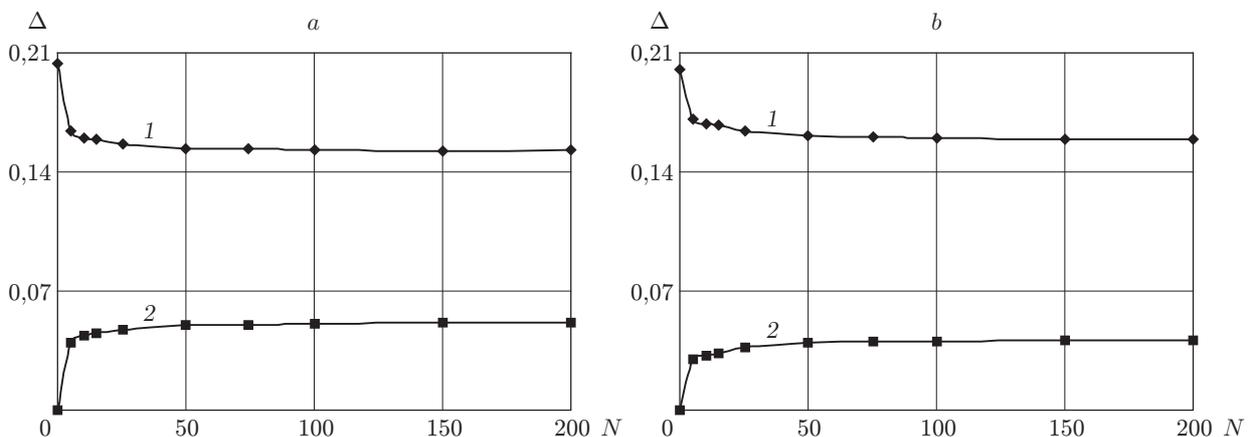


Рис. 3

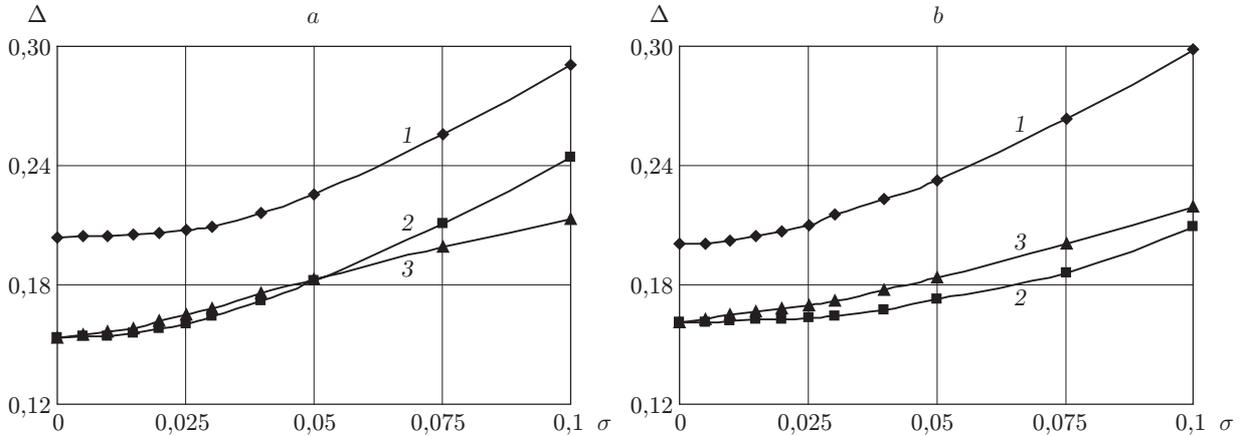


Рис. 4

соответственно от числа K . Объём выборки $V^{(1)}$ составляет 50 фантомов. Проекционные данные не содержат случайного шума. (Результаты, представленные на рис. 3, 5–7, также получены при отсутствии шума.)

Как видно из рис. 2, эффект от применения предлагаемого метода падает по мере увеличения количества проекционных данных. Это соответствует представлению о том, что с ростом числа измерений априорная информация оказывает всё меньшее влияние на решение задачи томографии. В рассматриваемом случае вектор Ω содержит априорную информацию об артефактах, возникающих при реконструкции в определённых условиях некоторого класса фантомов. Отметим, что для алгебраического алгоритма разность $\Delta_1 - \Delta_2$ становится незначительной уже при числе ракурсов наблюдения $K \cong 40$.

Результаты, полученные при изменении объёма выборки $V^{(1)}$, по которой оценивается вектор Ω , приведены на рис. 3, где кривые 1 и 2 — зависимости ошибки Δ_2 и разности $\Delta_1 - \Delta_2$ от числа фантомов N , составляющих выборку $V^{(1)}$. При этом ошибке Δ_1 соответствует пересечение кривых 1 с осью ординат. Количество ракурсов наблюдения для алгоритма Шеппа — Логана (см. рис. 3, *a*) равно 100, а для ART (см. рис. 3, *b*) — 18. В этом случае оба алгоритма дают приблизительно одинаковые ошибки Δ_1 . Из рисунка видно, что при рассматриваемых объёмах выборки $V^{(1)}$ разность $\Delta_1 - \Delta_2$ монотонно увеличивается, однако основной её рост приходится на промежуток $N \in]0, 10]$.

Из рис. 2 и 3 следует, что разность ошибок, которую обеспечивает предлагаемый метод, для алгоритма Шеппа — Логана больше, чем для ART. Это подтверждает известный факт, что алгоритмы фильтрации и обратного проецирования дают контрастные изображения с ярко выраженными артефактами. В то же время посредством итерационных алгебраических алгоритмов получают более гладкие томограммы, и артефакты, связанные с геометрией регистрирующей системы, проявляются на них меньше (см., например, [19]). Артефакты, получаемые при реконструкции рассматриваемыми методами, можно также сравнить с приведёнными на рис. 6 и 7.

Путём вычислительного эксперимента исследовалось влияние случайного шума на точность метода. По результатам был сделан вывод, что если оценка вектора Ω проводится по проекционным данным, содержащим шум, то при вычислении томограмм $\tilde{\mathbf{g}}^{(1)i}$ целесообразно применять регуляризацию. В предлагаемой работе для этой цели использовалось сглаживание данных с каждого ракурса одномерными регуляризующими сплайнами [21]. Если томограммы $\tilde{\mathbf{g}}^{(2)i}$, по которым рассчитываются ошибки, реконструировались по зашумлённым данным, то последние также сглаживались сплайнами.

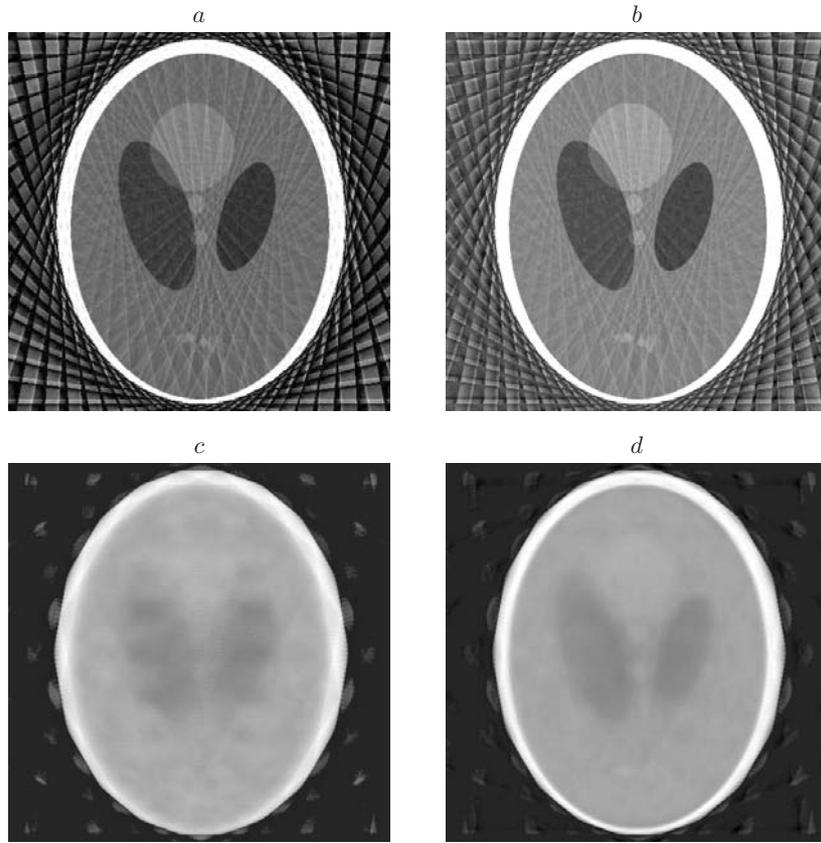


Рис. 5

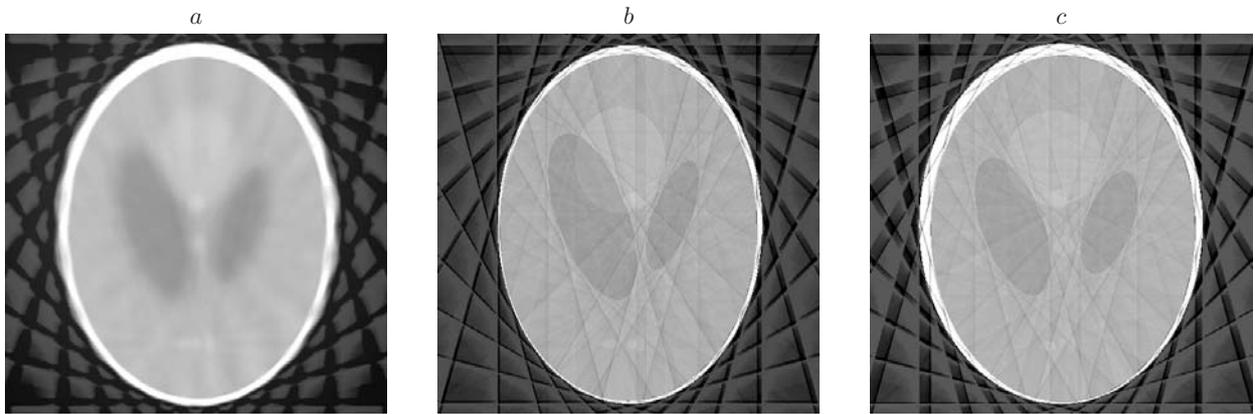


Рис. 6

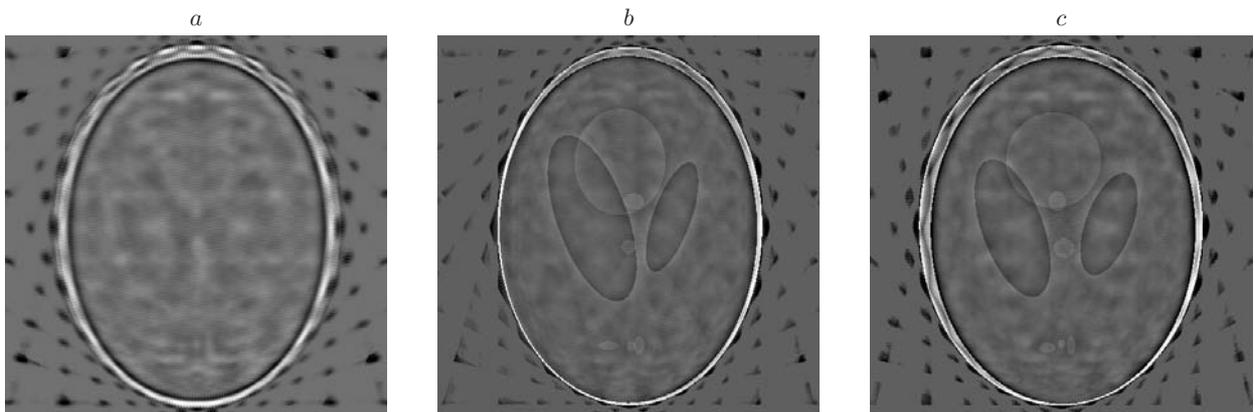


Рис. 7

Вообще говоря, дисперсия шума в данных, используемых для оценки Ω , может не совпадать с дисперсией шума в данных, по которым проводится томографическая реконструкция искомой функции. Вычислительный эксперимент показал, что при $\sigma \geq 0,05$ для алгоритма Шеппа — Логана предлагаемый метод обеспечивает наименьшую ошибку, если уровень шума в обоих случаях одинаковый в смысле $\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)}$. Для ART, располагая только полученными результатами, такого вывода сделать нельзя. Оказалось, что для него при фиксированном $\sigma^{(1)}$ ошибка Δ_2 тем ниже, чем меньше $\sigma^{(2)}$. Одно из возможных объяснений состоит в том, что в рассматриваемом случае шум после сглаживания сплайнами при реконструкции алгоритмом Шеппа — Логана приводит к артефактам, зависящим от его уровня, тогда как для ART это явление выражено слабее.

Изложенное выше иллюстрирует рис. 4, где приведены зависимости ошибок от параметра σ . Кривые 1 соответствуют ошибке Δ_1 , которую обеспечивают алгоритм Шеппа — Логана (см. рис. 4, *a*) и ART (см. рис. 4, *b*). Кривые 2 и 3 относятся к предлагаемому в работе методу и представляют ошибку Δ_2 . Вектор Ω оценивается по проекционным данным, содержащим шум. Причём для каждой из точек, по которым строятся кривые, уровень шума соответствует величине σ , равной значению абсциссы этой точки. Таким образом, вектор Ω изменяется при движении вдоль кривых 2 и 3. Различие между ними состоит в следующем. Для кривых 2 ошибка Δ_2 вычисляется по томограммам, реконструированным в отсутствие шума. Для кривых 3 томограммы $\tilde{g}^{(1)i}$ и $\tilde{g}^{(2)i}$ были получены по данным с шумом, определяемым одинаковым значением параметра σ .

На рис. 5, *a, c* представлены томограммы фантома, изображённого на рис. 1, *d*, реконструированные алгоритмом Шеппа — Логана и алгоритмом ART соответственно. Число ракурсов наблюдения в первом случае составляло 50, а во втором — 18. На рис. 5, *b, d* показаны изображения, полученные в результате добавления к этим томограммам вектора Ω . Напомним, что вектор Ω различается для этих рисунков. Он зависит от алгоритма реконструкции и проекционной геометрии.

Представление о картине артефактов реконструкции дают алгоритм Шеппа — Логана (см. рис. 6) и алгоритм ART (см. рис. 7). На рис. 6, *a* и 7, *a* приведены усреднённые невязки (вектор Ω). Объём выборки $V^{(1)}$ 500 фантомов, число проекций $K = 12$. На рис. 6, *b, c* и 7, *b, c* показаны невязки, полученные при реконструкции фантомов, изображённых на рис. 1, *b, c* (оба они входят в выборку $V^{(1)}$).

Заключение. В предлагаемой работе рассматривается новый метод повышения качества томограмм путём статистической компенсации общих артефактов, присущих конкретному алгоритму при реконструкции сходных объектов по данным, зарегистрированным в определённой проекционной геометрии. Артефакты, связанные с индивидуальными свойствами отдельных объектов, подавляются путём усреднения по выборке, взятой из рассматриваемого класса. Проведено доказательство того, что применение метода уменьшает математическое ожидание среднеквадратичной ошибки результата реконструкции. Вычислительный эксперимент показал, что разработанный метод существенно улучшает решение, полученное как алгоритмами, основанными на формуле обращения двумерного преобразования Радона, так и итерационными алгебраическими алгоритмами. В частности, для алгоритма Шеппа — Логана снижение усреднённой ошибки составило 25–30 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bennett K. E., Byer R. L.** Fan-beam-tomography noise theory // JOSA A. 1986. **3**, N 5. P. 624–633.
2. **Лаврентьев М. М., Зеркаль С. М., Трофимов О. Е.** Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. Новосибирск: Изд-во ИДМИ НГУ, 1999. 172 с.

3. **Guillemet J.-P., Novikov R. G.** A noise property analysis of single-photon emission computed tomography data // *Inverse Problems*. 2004. **20**, N 1. P. 175–198.
4. **Soares E. J., Byrne C. L., Glick S. J.** Noise characterization of block-iterative reconstruction algorithms: I. Theory // *IEEE Trans. Med. Imag.* 2000. **19**, N 4. P. 261–270.
5. **Троицкий И. Н.** Статистическая теория томографии. М.: Радио и связь, 1989. 239 с.
6. **Rafecas M., Boning G., Pichler B. J. et al.** Effect of noise in the probability matrix used for statistical reconstruction of PET data // *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 2004. **51**, N 1. P. 149–156.
7. **Хермен Г. Т.** Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 342 с.
8. **Пикалов В. В., Мельникова Т. С.** Томография плазмы. Новосибирск: Наука, 1995. 229 с.
9. **Наттерер Ф.** Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 279 с.
10. **Likhachov A. V., Pickalov V. V.** Three-dimensional tomography with finite aperture beams // *Nucl. Instrum. & Methods in Phys. Res. A*. 1998. **405**, N 2–3. P. 506–510.
11. **Werling A., Bublitz O., Doll J. et al.** Fast implementation of the single scatter simulation algorithm and its use in iterative image reconstruction of PET data // *Phys. Med. and Biol.* 2002. **47**, N 5. P. 2947–2960.
12. **Zaidi H., Koral K. F.** Scatter modelling and compensation in emission tomography // *Eur. Journ. Nucl. Med. Mol. Imaging*. 2004. **31**, N 5. P. 761–782.
13. **Prince J. L., Willsky A. S.** Constrained sinogram restoration for limited-angle tomography // *Opt. Eng.* 1990. **29**, N 5. P. 535–544.
14. **Лихачев А. В.** Алгоритм пополнения проекционных данных в задачах томографии с ограниченным диапазоном углов обзора // *Автометрия*. 2009. **45**, № 1. С. 83–91.
15. **Важенцева Н. В., Лихачев А. В.** Сравнение алгоритмов томографии, использующих условие Кавальери, в задачах с ограниченным углом обзора объекта // *Автометрия*. 2012. **48**, № 6. С. 35–45.
16. **Филонин О. В.** Малоракурсная томография. Самара: СНЦ РАН, 2006. 256 с.
17. **Hanson K. M., Wecksung G. W.** Bayesian approach to limited-angle reconstruction in computed tomography // *JOSA*. 1983. **73**, N 11. P. 1501–1509.
18. **Siltanen S., Kolehmainen V., Jarvenpaa S. et al.** Statistical inversion for medical X-ray tomography with few radiographs: I. General theory // *Phys. Med. and Biol.* 2003. **48**, N 10. P. 1437–1463.
19. **Лихачев А. В.** Повышение контрастности малоракурсных томограмм, полученных алгебраическими алгоритмами реконструкции // *Вычислительные технологии*. 2009. **14**, № 3. С. 38–48.
20. **Shepp L. A., Logan B. F.** The Fourier reconstruction of a head section // *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1974. **1**, N 3. P. 21–43.
21. **Василенко В. А.** Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983. 214 с.

Поступила в редакцию 24 апреля 2013 г.