меньше единицы, то справедлива простая асимптотическая формула

$$A(y) = \left(2\sqrt{3}\pi\omega_0^2|x_0|\right)^{-1}\frac{\zeta^2}{\zeta^4+\zeta^2+1}\int\limits_{-c}^{c} a(\sigma)\,d\sigma + \ldots,\ \zeta = \left[y\sqrt{1-\omega_0^2}/\omega_0|x_0|\right]^{1/3}.$$

Отсюда следует, что $A(y) = O(|x_0|^{-1})$ при $|x_0| \to \infty$. Решение краевой задачи (5.6), (5.7) можно записать в квадратурах с помощью метода интегральных преобразований. Способ однозначного выделения решения этой задачи указан в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Габов С. А., Крутицкий П. А.** О нестационарной задаче Ларсена // ЖВММФ.— 1987.— Т. 2, № 8.
2. **Крутицкий П. А.** Малые нестационарные колебания вертикальных пластин в канале со стратифицированной жидкостью //ЖВММФ.— 1988.— Т. 28, № 12.
3. **Габов С. А., Свешников А. Г.** Задачи динамики стратифицированных жидкостей.— М.: Наука, 1986.
4. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного.— М.: ГИФМЛ, 1958.
5. **Свешников А. Г., Тихонов А. Н.** Теория функций комплексной переменной.— М.: Наука, 1970.

г. Новосибирск *Поступила 20/II 1991 г.*

УДК 536.25

А. Е. Индейкина, Ю. С. Рязанцев, В. М. Шевцова

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ФОРМУ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ДВИЖЕНИИ В ЖИДКОСТИ

Влиянию капиллярных сил на равновесие и движение жидкости в условиях, близких к невесомости, посвящено большое число работ. Следует отметить, что и при нормальной гравитации, когда удельная поверхность жидкости велика, капиллярные силы могут стать определяющими. Многообразие капиллярных явлений в значительной степени обусловлено зависимостью поверхностного натяжения от температуры и концентрации поверхностно-активных веществ.

В последние годы появилось значительное количество работ [1—3], в которых рассматривается аномальная зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры:

(1) $$\sigma_1 = \sigma_{01} + \alpha_1(T' - T^*)^2,\ \sigma_{01} = \text{const},\ \alpha_1 = \text{const}.$$

Этому предшествовала серия экспериментов [4, 5], выявивших наличие данной зависимости $\sigma = \sigma_1(T')$ для широкого класса веществ, например: для водных растворов высокомолекулярных спиртов, некоторых бинарных металлических сплавов, нематических жидких кристаллов.

В данной работе теоретически рассматривается нестационарная термокапиллярная (ТК) и термогравитационная (ТГ) конвекция в тонком слое вязкой несжимаемой жидкости для нелинейной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры по закону (1). Проводится сравнение возникающего течения с характеристиками движения, когда коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры по линейному закону

(2) $$\sigma_2 = \sigma_{20} - \alpha_2 T',\ \sigma_{20} = \text{const},\ \alpha_2 = \text{const},\ \alpha_2 > 0.$$

Постановка задачи. В начальный момент времени через поверхность внутрь жидкости толщиной H, занимающей круглую цилиндрическую кювету радиуса R ($R \gg H$), проходит импульс излучения (например, лазерный пучок). Из-за поглощения излучения в объеме жидкости в следе возникает область повышенной температуры с максимумом, расположенным на поверхности жидкости, нагрев достаточно быстро убывает от центра. Распределение энергии в пучке излучения считаем гауссовым. В последующие моменты времени источник тепла не действует. Дно, боковые стенки кюветы и свободная поверхность жидкости теплоизолированы. Предполагается, что длительность лазерного импульса мала по сравнению с характерным временем конвективного тепломассопереноса. Например, в эксперименте [6] длительность импульса 10^{-7} с. Следовательно, в начальный момент времени в сосуде имеется неравномерное распределение температуры

$$T' = T_0 + (T_1 - T_0)\exp(-(r'/a')^2 + \alpha(z' - H)). \tag{3}$$

Здесь T_0 — температура всей жидкости до начала облучения; T_1 — максимальное значение температуры в нагретой области; a' — радиус пучка излучения; α — коэффициент поглощения излучения жидкостью. Образовавшаяся тепловая неоднородность вызывает ТК- и ТГ-конвекцию в слое. Предполагается, что изменения физических параметров жидкости в результате изменения температуры пренебрежимо малы, за исключением изменения плотности и коэффициента поверхностного натяжения.

С учетом сделанных предположений математическая формулировка задачи включает уравнения: Навье — Стокса, теплопроводности и неразрывности, записанные в приближении Буссинеска.

В силу того что в данной работе учитывается изменение толщины слоя жидкости $h' = h'(r', t')$, будем считать

$$p' = p_0 + \rho g(h'(r', t') - z') + p''$$

($p'' = p''(r', z', t')$ — отклонение давления от гидростатического, p_0 — внешнее давление, ρ — исходная плотность).

В цилиндрической системе координат уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u'\frac{\partial u'}{\partial r'} + v'\frac{\partial u'}{\partial z'} = -g\frac{\partial h'}{\partial r'} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p''}{\partial r'} + \nu\nabla^2 u',$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + u'\frac{\partial v'}{\partial r'} + v'\frac{\partial v'}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p''}{\partial z'} + g\beta(T' - T_0) + \nu\nabla^2 v',$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + u'\frac{\partial T'}{\partial r'} + v'\frac{\partial T'}{\partial z'} = \varkappa\nabla^2 T',$$

$$\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}(r'u') + \frac{\partial v'}{\partial z'} = 0.$$

Граничные условия на боковых стенках и дне — условия прилипания жидкости:

$$u' = v' = 0,\ z' = 0,\ r' = R.$$

Условия симметрии на оси кюветы:

$$u' = \partial v'/\partial r' = 0,\ r' = 0.$$

На свободной поверхности [7] при $z' = h'(r', t')$

$$(p' - p_0)\, n_i = \sigma_{ik} n_k + \sigma n_i\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \tau_k \frac{\partial\sigma}{\partial x_k}\tau_i,\ i = 1, 3,\ k = 1, 3, \tag{4}$$

где σ_{ik} — тензор вязких напряжений; $\boldsymbol{\tau}$ — касательная к поверхности жидкости; $\mathbf{n}$ — нормаль, направленная внутрь жидкости; $1/R_1 + 1/R_2$ — кривизна поверхности жидкости.

Используя известные математические выражения для кривизны поверхности и нормали к ней, получим из уравнения (4) в проекциях па оси r' и z' следующие выражения:

$$(5)\qquad p''\dot{h}' = 2\rho\nu\dot{h}'\frac{\partial u'}{\partial r'} - \rho\nu\left(\frac{\partial v'}{\partial r'} + \frac{\partial u'}{\partial z'}\right) - \frac{\sigma\dot{h}'}{\sqrt{1+(\dot{h}')^2}}\left(\frac{\ddot{h}'}{1+(\dot{h}')^2} + \frac{\dot{h}'}{r'}\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial r'} + \dot{h}'\frac{\partial\sigma}{\partial z'}\right)\frac{1}{\sqrt{1+(\dot{h}')^2}},$$

$$p'' = 2\rho\nu\frac{\partial v'}{\partial z'} - \rho\nu\dot{h}'\left(\frac{\partial v'}{\partial r'} + \frac{\partial u'}{\partial z'}\right) - \frac{\sigma}{\sqrt{1+(\dot{h}')^2}}\left(\frac{\ddot{h}'}{1+(\dot{h}')^2} + \frac{\dot{h}'}{r'}\right) -$$

$$-\left(\frac{\partial\sigma}{\partial r'} + \dot{h}'\frac{\partial\sigma}{\partial z'}\right)\frac{\dot{h}'}{\sqrt{1+(\dot{h}')^2}}.$$

Здесь $\dot{h}' = \partial h'/\partial r'$, $\ddot{h}' = \partial^2 h'/\partial r'^2$. На поверхности вертикальная компонента скорости жидкости равна скорости изменения $h'(r', t')$: $\partial h'/\partial t' + u'\partial h'/\partial r' = v'$. На форму поверхности накладываем также условие симметрии $\partial h'/\partial r' = 0$, $r' = 0$. На боковой поверхности кюветы задается условие затухания движения $h' = H$, $\partial h'/\partial r' = 0$, $r' = R$.

Начальными условиями служат условие неподвижности жидкости $u' = v' = 0$, плоская поверхность $h' = H$ и заданное распределение температуры (3). В формулах использованы размерные величины: u', v' — радиальная и вертикальная составляющие скорости, ν, $\varkappa$ — коэффициенты вязкости и температуропроводности.

Пусть L — характерный размер области, в которой локализовано движение жидкости в радиальном направлении. То, что оно будет локализовано, известно из численных расчетов [8] и эксперимента [6]. Размер L определяется радиусом круга, вне которого поверхностное натяжение практически не меняется и жидкость не движется. Радиус светового пятна, нагревающего жидкость при $t = 0$, меньше или порядка L, $a' \leqslant L$. Ввиду отсутствия движения жидкости при $r' > L$ перенос тепла в этой области может происходить только за счет теплопроводности.

Далее будем рассматривать тонкий слой жидкости: $\varepsilon = H/L \ll 1$. В приближении тонкого слоя радиальный перенос тепла за счет теплопроводности незначителен. Тогда граничные условия при $r' \to L$ примут вид

$$\partial T'/\partial r' = 0,\ u' = v' = 0,\ h' = H,\ \partial h'/\partial r' = 0.$$

На дне и свободной поверхности граничные условия для температуры запишутся как

$$\partial T'/\partial z' = 0,\ z' = 0,$$

$$\partial T'/\partial z' + \dot{h}'\partial T'/\partial r' = 0,\ z' = h'(r', t').$$

Из уравнения неразрывности следует соотношение между скоростями $v' \sim \varepsilon u'$.

Оценим радиальную скорость из уравнения (5), предполагая, что поверхность не искривлена. Тогда

$$\rho\nu\left(\frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial v'}{\partial r'}\right) \approx \frac{\partial\sigma}{\partial r'} = \frac{d\sigma}{dT'}\frac{\partial T'}{\partial r'},$$

отсюда для линейной зависимости (2) характерная скорость $u_{02} = \alpha_2\Delta T H/\rho\nu L$. В случае нелинейной зависимости (1) $d\sigma/dT' = 2\alpha_1(T' - T^*)$, температура T^*, соответствующая минимуму поверхностного натяжения, изменяется в пределах $T_0 \leqslant T^* \leqslant T_1$. В оценках будем предполагать $d\sigma_1/dT' \sim -2\alpha_1\Delta T/2 = -\alpha_1\Delta T$. Знак выбран так, чтобы при $T' < T^*$ направление движения жидкости на поверхности соответствовало случаю линейной зависимости $\sigma = \sigma_2(T')$. Тогда $u_{01} = \alpha_1(\Delta T)^2 H/\rho\nu L$.

Отношение гравитационных и термокапиллярных сил характеризуется числом Бонда Bd. Для нелинейной зависимости $\sigma_1(T')$

$$\mathrm{Bd} = \frac{\rho g \beta H^2}{\alpha_1 \Delta T} = \frac{\rho g \beta \Delta T H}{\alpha_1 (\Delta T)^2/H} = \frac{p''_g}{p''_{th}}.$$

В данной работе рассматривается случай $\mathrm{Bd} \sim 1$, следовательно, $p''_g \sim p''_{th}$, и в качестве масштаба для давления можно взять любую из этих величин. Пусть $p_{ch} = p''_{th} = \alpha_1 (\Delta T)^2/H$.

С учетом сделанных оценок запишем безразмерные переменные:

$$r = r'/L,\ a = a'/L,\ z = z'/H,\ h = h'/H,$$
$$u = u'/u_0,\ v = v'/(\varepsilon u_0),\ p = p''/p_{ch},$$
$$\theta = (T' - T_0)/\Delta T,\ \theta^* = (T^* - T_0)/\Delta T,\ t = t'/\tau,\ \Delta T = T_1 - T_0.$$

Масштаб времени введем позднее.

В безразмерных переменных уравнения и граничные условия имеют вид

$$(6) \quad \frac{H^2}{\nu\tau}\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \mathrm{Re}\left(u\frac{\partial u}{\partial r} + v\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\mathrm{Bd}}{\beta_T}\frac{\partial h}{\partial r} + \varepsilon^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\frac{\varepsilon^2 H^2}{\nu\tau}\frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon^4 \mathrm{Re}\left(u\frac{\partial v}{\partial r} + v\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mathrm{Bd}\,\theta + \varepsilon^4\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

$$\frac{\mathrm{Pr}\,H^2}{\nu\tau}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(u\frac{\partial \theta}{\partial r} + v\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)\varepsilon^2 \mathrm{Pr}\,\mathrm{Re} = \varepsilon^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2};\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Здесь $\mathrm{Pr} = \nu/\varkappa$; $\mathrm{Re} = u_0 L/\nu$; $\beta_T = \beta\Delta T$. Начальные условия при $t = 0$:

$$(7) \qquad u = v = 0,\ h = 1,\ \theta = \exp(-r^2/a^2 + \alpha H(z - 1)),$$

граничные:

$$(8) \qquad \begin{array}{ll} u = v = 0,\ \partial\theta/\partial z = 0, & z = 0; \\ u = v = 0,\ \partial\theta/\partial r = 0, & r = 1; \\ u = \partial v/\partial r = 0, & r = 0. \end{array}$$

На свободной границе при $z = h(r, t)$

$$(9) \quad p\dot{h} + \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial v}{\partial r} - 2\dot{h}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\sigma_{10}}{\alpha_1 (\Delta T)^2}\frac{\varepsilon^2 \dot{h}}{\sqrt{1 + (\varepsilon\dot{h})^2}}\left(\frac{\ddot{h}}{1 + (\dot{h})^2\varepsilon^2} + \frac{\dot{h}}{r}\right) +$$

$$+ 2(\theta^* - \theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial r} + \dot{h}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2(\dot{h})^2}} = 0,$$

$$p = \varepsilon^2\left(2\frac{\partial v}{\partial z} - \dot{h}\left(\varepsilon^2\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) -$$

$$- \frac{\varepsilon^2\sigma_{10}}{\alpha_1 (\Delta T)^2}\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2(\dot{h})^2}}\left(\frac{\ddot{h}}{1 + \varepsilon^2(\dot{h})^2} + \frac{\dot{h}}{r}\right) +$$

$$+ 2(\theta^* - \theta)\left(\frac{\partial\theta}{\partial r} + \dot{h}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\frac{\varepsilon^2\dot{h}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2(\dot{h})^2}},\quad \frac{\partial\theta}{\partial z} + \varepsilon^2\dot{h}\frac{\partial\theta}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{L}{u_0\tau}\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial r} = v;\quad \frac{\partial h}{\partial r} = 0,\ r = 0;\ h = 1,\ \frac{\partial h}{\partial r} = 0,\ r = 1.$$

Из уравнений (6)—(9) видно, что в рассматриваемой нестационарной задаче имеется несколько масштабов времени, связанных с развитием скоростного и температурного полей и с изменением толщины слоя.

Введем масштабы времени: $\tau_1 = H^2/\nu$ — время нестационарного процесса движения жидкости, $\tau_2 = L/u_0$ — характерное время изменения формы поверхности, $\tau_3 = \Pr H^2/\nu$ — время развития температурного поля. Полагаем, что $\mathrm{Bd} \sim 1$, $\mathrm{Re} \sim 1$, $\Pr \sim 1$, $\sigma_{01}/(\alpha_1(\Delta T)^2) \sim 1$. Тогда, $\tau_1 \sim \tau_3$, $\tau_2/\tau_1 = 1/\varepsilon^2\mathrm{Re}$.

Случай малых времен. Положим $\tau = \tau_1$. Пренебрегая в уравнениях (6) членами порядка ε^2 и выше, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\mathrm{Bd}}{\beta_T}\frac{\partial h}{\partial r}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mathrm{Bd}\,\theta,\quad \Pr\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

На свободной поверхности вместо (9) имеем

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0,\quad p = 0,\quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2(\theta - \theta^*)\frac{\partial \theta}{\partial r}. \tag{11}$$

Начальные условия (7) и оставшиеся граничные (8) не изменяются.

Из первого уравнения в (11) находим, что $h = 1$, т. е. на данном этапе форма поверхности не изменяется. Тогда в первом уравнении (10) выпадает слагаемое $-(\mathrm{Bd}/\beta_T)\partial h/\partial r$. Решая последовательно уравнения (10) методом Фурье, получим выражения в виде рядов для температуры, давления и скоростей. Выражение для температуры используется в дальнейшем при асимптотическом сращивании решений в случаях малых и больших времен

$$\theta = \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)\left\{\frac{1-\exp(-\alpha H)}{\alpha H} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\left((-1)^k - \exp(-\alpha H)\right)\exp\left(-(\pi k)^2 t/\Pr\right)}{\alpha H\left(1+(\pi k/(\alpha H))^2\right)}\cos\pi k z\right\}. \tag{12}$$

Зависимости для скоростей и давления здесь не приводятся ввиду их громоздкости. Следует отметить, что в данном приближении выражения для температуры и давления не зависят от вида $\sigma = \sigma(T)$.

Полученные ряды просуммированы на ЭВМ. Графики приведены для $a = 0{,}2$, $\alpha H = 2$, $\mathrm{Bd} = 1$, $\Pr = 1$. На рис. 1 показано распределение температуры по радиусу на поверхности жидкости в различные моменты времени. Кривые *1—3* соответствуют времени 0,01; 0,1; 1,0. Как следует из (12), для времен $t \geqslant 1$ распределение температуры не зависит от координаты z, следовательно, кривая *3* отвечает температуре не только на поверхности, но и любому z при $t \geqslant 1$. Это предельное выражение будет использовано в качестве начального условия для температуры при больших временах.

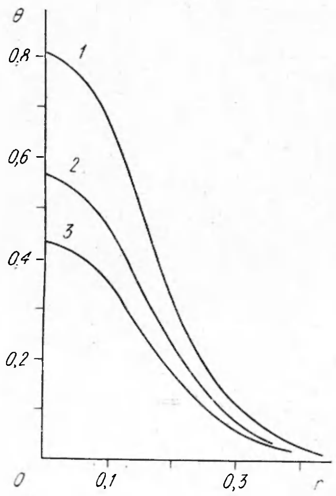

Рис. 1

На рис. 2 представлено распределение составляющих скоростей в момент времени $t = 0{,}1$ для различных значений θ^*: *а* — радиальная скорость на поверхности слоя жидкости, *б* — вертикальная скорость на глубине $z = 0{,}95$. При малых временах поверхность жидкости еще не деформирована и вертикальная составляющая скорости на поверхности равна нулю. Кривые *1—6* соответствуют $\theta^* = 0$; 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,8; 1, здесь и далее штриховая линия отвечает линейной зависимости $\sigma = \sigma_2(T')$.

Как и предполагалось, для всех значений θ^* движение жидкости локализовано в небольшой области, прилегающей к горячему пятну. Направление движения жидко-

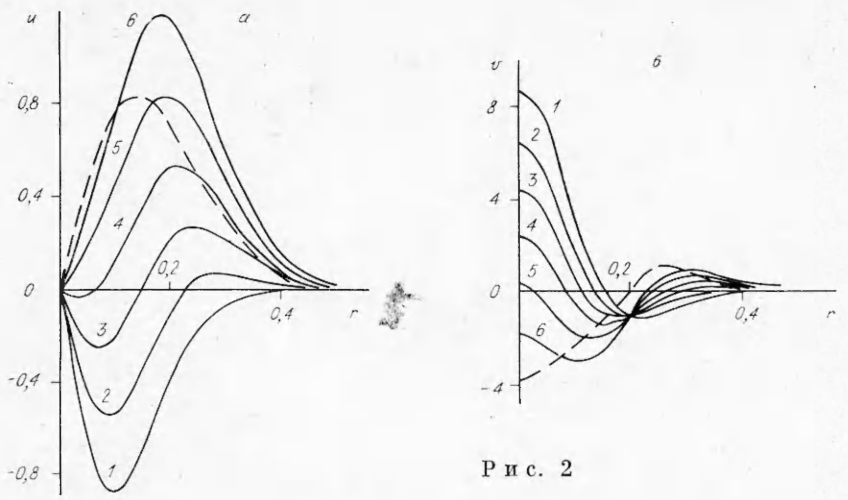

Рис. 2

сти определяется направлением действия ТК-сил, т. е. знаком градиента $d\sigma_1/dT' = 2\alpha_1(T' - T^*)$. При $\theta^* = 1$, $d\sigma_1/dT' < 0$ качественная картина распределения скорости аналогична линейному случаю, но с более медленным нарастанием вблизи центра сосуда. При $\theta^* = 0$ в объеме возникает вихревое движение, направленное против часовой стрелки. Для промежуточных значений θ^* радиальная скорость принимает как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от знака $d\sigma_1/dT'$.

Отметим, что при смене знака $d\sigma_1/dT'$ имеется запаздывание в смене направления движения жидкости на поверхности слоя. Температура на поверхности ввиду конечного запаса тепла быстро падает со временем. К моменту времени $t = 0{,}1$ на поверхности уже нет температуры $\theta^* \geqslant 0{,}6$ (рис. 1, линия *2*), но в жидкости сохраняется движение к центру сосуда (рис. 2, *а*, кривая *4*) в малой области вблизи оси кюветы (рис. 2, *б*, кривые *4*, *5* показывают движение вверх). Это связано с инерционностью объемного вихревого движения.

Рис. 3, где дано распределение радиальной скорости по высоте слоя вблизи оси ($r = 0{,}08$, на оси $u \equiv 0$), позволяет проследить развитие движения внутри слоя (*а* — радиальная скорость для начального момента времени $t = 0{,}01$, *б* — для $t = 0{,}1$, кривые *1*—*6* отвечают $\theta^* = 0$; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1).

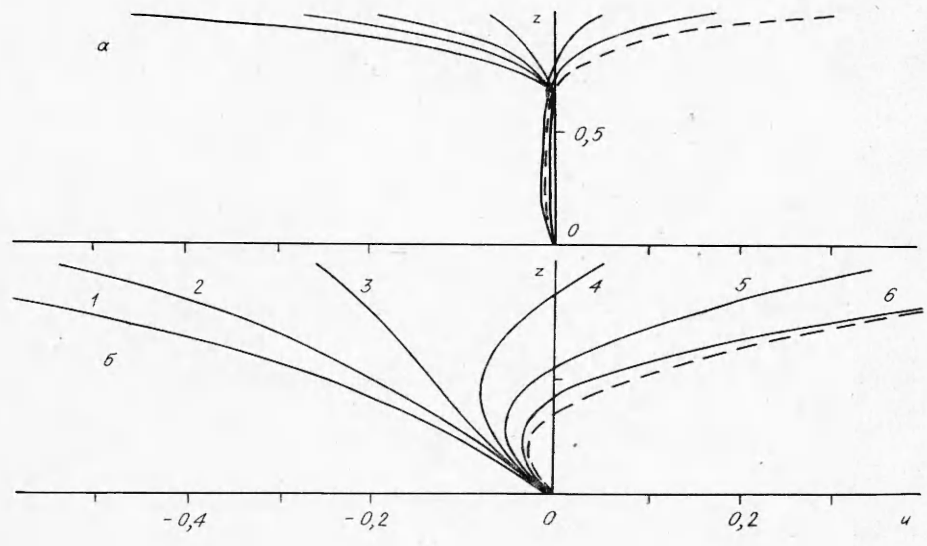

Рис. 3

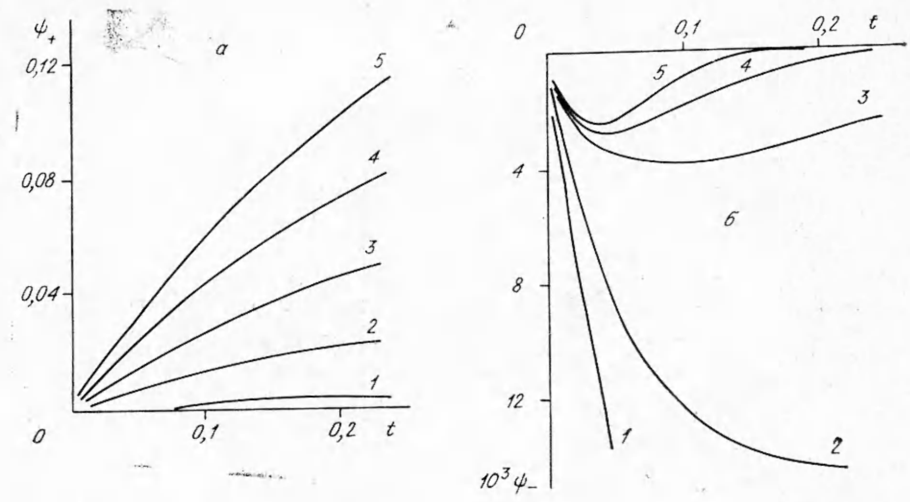

Рис. 4

Как следует из рис. 3, *а*, скорость вблизи поверхности намного больше, чем в объеме. Значит, в начальный момент времени влияние ТК-сил, определяющих приповерхностное движение, намного больше, чем влияние ТГ-сил, ответственных за поле скоростей внутри слоя. Со временем ТК-движение распространяется по всему слою, вклад ТГ-конвекции значительно не увеличивается.

Максимальное значение функции тока ψ_{max} характеризует интенсивность движения. В случае нелинейной зависимости $\sigma = \sigma_1(T')$ оно может принимать как положительные, так и отрицательные значения, что соответствует изменению направления действия ТК-сил. На рис. 4 показана зависимость ψ_{max} от времени для $\theta^* = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1$ (кривые *1*—*5*). Для малых θ^* (рис. 4, *б*) интенсивность «аномального» вихревого движения быстро растет, достигает максимума тем быстрее, чем больше θ^*, затем по мере исчезновения из системы высоких температур ($\theta > \theta^*$) с запаздыванием снижается до нуля. Во все более расширяющейся области, где всегда выполняется соотношение $\theta < \theta^*$ (обычное направление действия ТК-сил, ψ_+), при рассматриваемых малых временах интенсивность движения со временем нарастает и выходит на стационар (рис. 4, *а*).

Случай больших времен. При $\tau = \tau_2$ нестационарные члены в уравнениях (6) имеют порядок ε^2 и ими следует пренебречь. Но при этом сохраняется уравнение для формы поверхности и система уравнений (6)—(9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mathrm{Bd}}{\beta_T}\frac{\partial h}{\partial r}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mathrm{Bd}\,\theta,\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 0,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

На свободной поверхности имеем

$$p = 0,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2(\theta - \theta^*)\frac{\partial\theta}{\partial r},\ \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial h}{\partial t} = v - u\frac{\partial h}{\partial r}, \tag{14}$$

$$h = 1,\ t = 0,\ \frac{\partial h}{\partial r} = 0,\ r = 0;\ h = 1,\ \frac{\partial h}{\partial r} = 0,\ r = 1.$$

Граничные условия на дне ($z = 0$) и при $r \to 1$ остаются те же, что и для малых времен.

Решая уравнение (8) для температуры, из (8) и (13) получим

$$\theta = \theta(r,\ t),\ \partial\theta/\partial r = 0,\ r \to 1. \tag{15}$$

Отсюда следует, что устанавливается равномерное распределение температуры по z, это согласуется с выводом, сделанным в случае малых времен при $t \to \infty$ (12). Предельное решение (12) для малых времен отвечает (15) при $h(r, 0) = 1$. Естественно для вида $\theta(r, h(r, t))$ взять предельное выражение

$$\theta(r, t) = \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)\frac{1 - \exp(-\alpha H h(r, t))}{\alpha H h(r, t)}.$$

Далее, решая (13) с использованием условий (8) и (14), находим

$$p = \mathrm{Bd}\,\theta(z - h),$$

$$v = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)\left\{z^2(\theta - \theta^*) + \mathrm{Bd}\left(\frac{z^4}{24} - \frac{hz^3}{6} + \frac{h^2z^2}{4}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{\mathrm{Bd}}{\beta_T}(1 - \beta_T\theta)\frac{(\dot h)^2 z^2}{2} + \mathrm{Bd}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{hz^2}{2}\right)\left\{\dot h\frac{\partial\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r\dot h}{\beta_T}(1 - \beta_T\theta)\right]\right\} - z^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2,$$

$$u = \frac{\partial\theta}{\partial r}\left(2z(\theta - \theta^*) + \mathrm{Bd}\left(\frac{z^3}{6} - \frac{hz^2}{2} + \frac{h^2 z}{4}\right)\right) +$$

$$+ \frac{\mathrm{Bd}}{\beta_T}(1 - \beta_T\theta)\dot h\left(\frac{z^2}{2} - hz\right).$$

Для $h(r, t)$ получается выражение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left[\frac{\partial\theta}{\partial r}\left(h^2(\theta^* - \theta) - \mathrm{Bd}\frac{h^4}{8}\right) + \frac{\mathrm{Bd}}{\beta_T}(1 - \beta_T\theta)\frac{\dot h h^3}{3}\right]\right\}. \tag{16}$$

Решим его в предположении малых деформаций поверхности. Запишем $h(r, t) = 1 + \beta_T f(r, t)$, где $f \sim 1$, $\beta_T \sim 10^{-3}$. При этом предположим, что $\partial h/\partial t = \beta_T \partial f/\partial t \sim 1$, т. е. $\partial f/\partial t \sim 1/\beta_T$. Тогда

$$\theta \approx \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)\left\{\frac{1 - \exp(-\alpha H)}{\alpha H} + \beta_T f(r, t)\left(\exp(-\alpha H) - \right.\right. \tag{17}$$

$$\left.\left. - \frac{1 - \exp(-\alpha H)}{\alpha H}\right)\right\} = \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)(A + \beta_T f(r, t) B).$$

Подставляя (17) в уравнение (16), используя разложение в ряд Тейлора по β_T, имеем

$$\beta_T\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\mathrm{Bd}}{3}\left(\ddot f + \frac{\dot f}{r}\right) + \frac{4A^2}{a^2}\left(1 - \frac{2r^2}{a^2}\right)\exp\left(-\frac{2r^2}{a^2}\right) - \tag{18}$$

$$- \frac{4A}{a^2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)\left(\theta^* - \frac{\mathrm{Bd}}{8}\right),$$

$$f(t = 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r}(r = 0) = 0,$$

$$f(r \to \infty) = \frac{\partial f}{\partial r}(r \to \infty) = 0.$$

Решив (18) с помощью преобразования Ганкеля нулевого порядка, находим

$$h = 1 + \frac{3}{8}\frac{\beta_T}{\mathrm{Bd}}\frac{1 - \exp(-\alpha H)}{\alpha H}\left\{(\mathrm{Bd} - 8\theta^*)\left[\exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) - \right.\right.$$

$$\left. - \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{\mathrm{Bd}}{\beta_T}\frac{t}{a^2}\right)^{-1}\right)\left(1 + \frac{4\,\mathrm{Bd}\,t}{3\beta_T a^2}\right)^{-1}\right] +$$

$$+ 4\,\frac{1 - \exp(-\alpha H)}{\alpha H}\left[\exp\left(-\frac{2r^2}{a^2}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - \exp\left(-\frac{2r^2}{a^2}\left(1 + \frac{8\,\mathrm{Bd}\,t}{3\beta_T a^2}\right)^{-1}\right)\left(1 + \frac{8\,\mathrm{Bd}\,t}{\beta_T a^2}\right)^{-1}\right]\right\}.$$

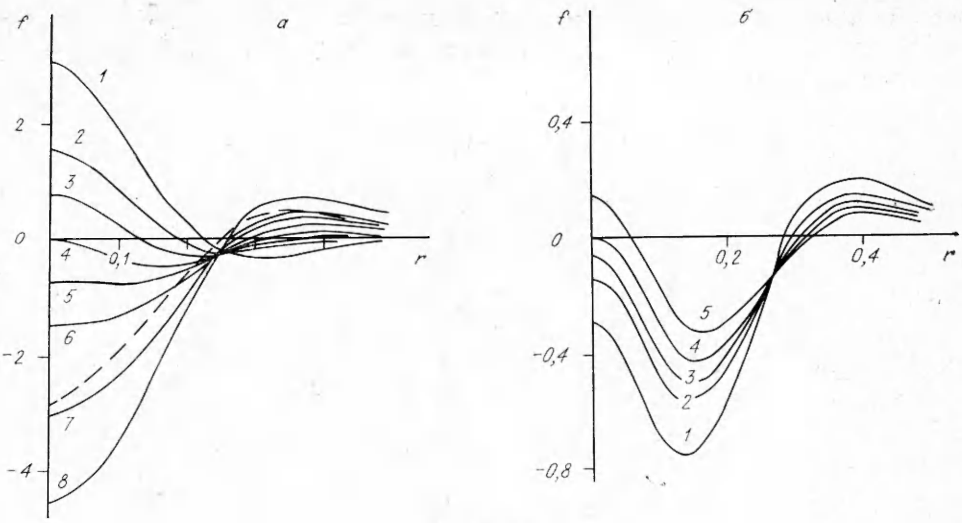

Рис. 5

На рис. 5, *а* показана форма поверхности в момент времени $t = 5 \cdot 10^{-4}$ для различных θ^*, штриховая линия соответствует линейному случаю, кривые *1—8* отвечают $\theta^* = 0$; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8; 1. Графики построены для $a = 0{,}2$, $\alpha H = 2$, $\mathrm{Bd} = 1$, $\beta_T = 10^{-3}$. При небольших изменениях этих параметров суть картины не изменяется. Существуют такие θ^* (в нашем случае $\theta^* \leqslant 0{,}3$), когда вблизи оси поверхность выпучивается. Для $\theta^* = 0{,}5$ (кривая *5*) поверхность при $r \to 0$ выпуклая, с увеличением расстояния от оси появляются прогиб и затем опять выпуклость. В линейном случае вблизи оси наблюдается только прогиб, что соответствует экспериментальным наблюдениям [9].

На рис. 5, *б* показано изменение формы поверхности в зависимости от числа Бонда ($\theta^* = 0{,}4$, $t = 5 \cdot 10^{-4}$). Поскольку при теоретическом рассмотрении полагалось, что $\mathrm{Bd} \sim 1$, числа Бонда изменяются в небольших пределах ($0{,}7 \leqslant \mathrm{Bd} \leqslant 1{,}3$). Кривые *1—5* отвечают $\mathrm{Bd} = 0{,}7$; 0,9; 1; 1,1; 1,3. Видно, что с уменьшением Bd, т. е. с увеличением роли ТК-конвекции, растет отклонение формы поверхности от плоской.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.** О термокапиллярном движении жидкости со свободной поверхностью при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 5.
2. **Пухначев В. В.** Проявление аномального термокапиллярного эффекта в тонком слое жидкости // Гидродинамика и теплообмен течений жидкости со свободной поверхностью.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1985.
3. **Рязанцев Ю. С., Шевцова В. М., Вальциферов Ю. В.** О влиянии вида температурной зависимости поверхностного натяжения на движение и теплообмен в слое жидкости при локальном нагреве // ИФЖ.— 1989.— Т. 57, № 1.
4. **Vochten R., Petre G.** Study of the heat of reversible adsorption at the air-solution interface. II. Experimental determination of the heat of reversible adsorption of some alcohols // J. Colloid Interface Sci.— 1973.— V. 42, N 2.
5. **Legros J. C., Limbourg M. C., Petre G.** Influence of a surface tension minimum as a function of temperature on the Marangoni convection // Acta Astronaut.— 1984.— V. 11, N 2.
6. **Альварес-Суарес В. А., Рязанцев Ю. С.** О термокапиллярном движении, вызванном локальным нагревом жидкости импульсом ультрафиолетового излучения // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 6.
7. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
8. **Вальциферов Ю. В., Рязанцев Ю. С., Шевцова В. М.** Исследование термокапиллярной и термогравитационной конвекции в жидкости при локальном нагреве // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1989.— № 6.

9. **Растопов С. Ф., Суходольский А. Т.** Применение лазерно-индуцированного эффекта Марангони для записи дифракционных решеток // Квантовая электрон.— 1987.— Т. 14, № 8.

г. Москва *Поступила 15/V 1990 г., в окончательном варианте — 25/I 1991 г.*

УДК 532.5

В. В. Никулин

АНАЛОГ УРАВНЕНИЙ ВИХРЕВОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ ДЛЯ ПОЛЫХ И ТОРНАДОПОДОБНЫХ ВИХРЕЙ. ВЫСОТА СТАЦИОНАРНОГО ТОРНАДОПОДОБНОГО ВИХРЯ

В длинноволновом приближении получен аналог уравнений вихревой мелкой воды для полых и торнадоподобных вихрей в невязкой несжимаемой неоднородной жидкости. Рассмотрен вертикальный стационарный торнадоподобный вихрь, жидкость в ядре которого более легкая, чем вне его. Получен строгий критерий, разделяющий случаи, когда течение ограничено или безгранично по высоте. Расчет высоты вихря по теоретическим формулам по порядку величины согласуется с результатами лабораторных измерений и наблюдений за пыльными вихрями в природе.

1. Рассматривается несжимаемая невязкая неоднородная жидкость в поле тяжести. Течение считается вращательно-симметричным. Вводится цилиндрическая система координат $(r\ \varphi\ z)$, r — радиус, φ — азимутальный угол. Ось z направлена против силы тяжести. Область, занимаемая течением, разбивается на две: область I — $r \leqslant r_0(z,\ t)$, II — $r_0(z,t) \leqslant r \leqslant r_*$, где r_* — постоянная величина, r_0 — в общем случае функция z и t, t — время. На границе r_0 может быть разрыв плотности и касательной к ней компоненты скорости. Через $(u\ v\ w)$ обозначаются компоненты скорости, соответствующие $(r\ \varphi\ z)$, p, ρ, g — давление, плотность и ускорение силы тяжести.

Чтобы в дальнейшем перейти к длинноволновому приближению, вводятся характерные масштабы длины, скорости и плотности. За единицу длины принимается характерный масштаб изменений по оси z, за единицу скорости — величина вращательной компоненты скорости при $r = r_0$, $z = 0$, $t = 0$, характерная плотность полагается равной 1. В этом случае характерное время, давление и ускорение будут равны 1. Характерный масштаб изменений по оси r обозначается через δ, считается, что $\delta \ll 1$.

Переход к новым переменным и функциям совершается по соотношениям

$$r^2 \to \delta^2\eta,\ z \to z,\ t \to t,\ 2ur \to \delta^2 q,$$
$$vr \to \delta A,\ w \to w,\ \rho \to \rho,\ p \to p,\ g \to g.$$

Значение $r = r_0$ соответствует $\eta = \eta_0(z,\ t)$, $r = r_*$ — $\eta = \eta_*$.

Уравнения движения и неразрывности примут вид

$$\frac{\rho\delta^2}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial t} + q\frac{\partial q}{\partial \eta} - \frac{q^2}{2\eta} + w\frac{\partial q}{\partial z}\right) - \frac{\rho A^2}{\eta} = -2\eta\frac{\partial p}{\partial \eta},$$
$$\frac{\partial A}{\partial t} + q\frac{\partial A}{\partial \eta} + w\frac{\partial A}{\partial z} = 0,$$
$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + q\frac{\partial w}{\partial \eta} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g,$$
$$\frac{\partial q}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + q\frac{\partial \rho}{\partial \eta} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0. \tag{1.1}$$