8. **Макс Ж.** Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях.— М.: Мир, 1983.
9. **Хэррис Ф. Дж.** Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье.— Тр. Ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектронике, 1978, т. 66, № 1.
10. **Дёч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования.— М.: Наука, 1971.
11. **Косинов А. Д., Маслов А. А., Шевельков С. Г.** Развитие пространственных волновых пакетов в сверхзвуковом пограничном слое. Препринт № 17—85. ИТПМ СО АН СССР, 1985.
12. **Kendall J. M.** Supersonic boundary layer stability experiments.— AR TR—0158 (S3816—63) — 1, 1967, v. 2, sec. 10.
13. **Laufer J., Vrebalovich T.** Stability and transition of a laminar boundary layer on an insulated flat plate.— J. Fluid Mech., 1960, p. 257.

Поступила 1/VII 1985 г.

УДК 532.517.4

ТЕНЗОРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОГЕРЕНТНЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

Г. А. Кузьмин, А. З. Паташинский

(*Новосибирск*)

В турбулентном течении обнаруживаются элементы как хаоса, так и порядка. Частичная упорядоченность турбулентных течений проявляется через существование когерентных (организованных) структур. Выявление организованных движений в турбулентном потоке затрудняется тем, что такие движения эволюционируют, а фазы и ориентации структур случайны. Главная же трудность в том, что взаимодействие структур достаточно сильно, так что их конкретные реализации заметно флуктуируют.

Визуальные способы изучения структур в таких условиях достоверны, когда структуры оказываются изолированными. Если ориентация и фаза структур фиксированы, то количественные сведения получаются условным осреднением термоанемометрического сигнала [1—3]. В противоположном случае одноточечные измерения не дают необходимых сведений об организованных структурах.

В последнее время проводятся измерения поля скорости турбулентных течений одновременно во многих точках пространства [4—6]. Развиваются методы численного моделирования турбулентности на ЭВМ. Ясно, что в мгновенном гидродинамическом поле и его эволюции имеется полная информация об организованных структурах. Но возникает вопрос, как можно извлечь эту информацию?

Распознавание структур в условиях заметных флуктуаций требует статистического подхода. Для статистического изучения необходимо построить систему количественных характеристик структур; количественные характеристики должны описывать структуры заданного масштаба в окрестности каждой точки потока.

В настоящей работе предлагается метод анализа результатов лабораторных и численных экспериментов, который предназначен для выявления и количественного анализа повторяющихся трех- и двумерных организованных движений жидкости и требует вычисления тензорных моментов поля течения. Построенные ниже тензорные поля содержат информацию об основных свойствах движения в окрестности каждой точки, а их инварианты вращения не зависят от ориентации упорядоченного движения и могут использоваться для его количественной характеристики. Можно надеяться, что статистические свойства инвариантов позволят понять, что в турбулентных течениях воспроизводимо и что флуктуирует.

Выделение вихревых структур заданного масштаба. Под когерентными структурами понимаются когерентные сгустки завихренности. Чтобы выделить организованные структуры заданного масштаба λ, необходимо специальное представление поля завихренности. Выделим в турбулентной жидкости сферический объем радиуса λ. Граница этого объема может пересекаться вихревыми линиями, которые невозможно оборвать без нарушения условия соленоидальности. Разложим завихренность $\boldsymbol{\omega}$ на две соленоидальные компоненты $\boldsymbol{\omega}'$ и $\boldsymbol{\omega}^{(\lambda)}$. Предполагается, что поле $\boldsymbol{\omega}'$ совпадает с $\boldsymbol{\omega}$ вне выбранного объема и равно градиенту гармонической функции $\nabla\chi$ внутри объема. Условие соленоидальности для $\boldsymbol{\omega}'$, $\boldsymbol{\omega}^{(\lambda)}$ оказывается выполненным всюду, если потребовать, чтобы на границе области нормальная производная функции χ была равна нормальной проекции завихренности:

(1) $$(\mathbf{r}\cdot\nabla\chi)_\Gamma = (\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega})_\Gamma.$$

Здесь $\mathbf{r}$ — координаты точки относительно центра объема; индекс Γ — вычисление на сферической границе. Поле $\boldsymbol{\omega}'$ не содержит информации об ω внутри объема, она имеется в дополнительной компоненте $\boldsymbol{\omega}^{(\lambda)} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}'$. Поле $\boldsymbol{\omega}^{(\lambda)}$ образует вихрь размера λ, поскольку его вихревые линии не пересекают границы объема. Таким образом, описание структуры завихренности $\boldsymbol{\omega}$ внутри выделенного объема сводится к задаче описания структуры изолированного вихря.

Моменты вихревой структуры. Распределение завихренности внутри структуры может быть очень сложным. Не все детали этого распределения одинаково интересны и важны, поэтому желательно выявить интегральные параметры, которые характеризуют основные свойства распределения в целом.

Известные интегральные характеристики вихревого облака — вихревой импульс и угловой момент вихревого импульса (импульса Ламба) [7, 8]:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega}^{(\lambda)}dV, \quad \mathbf{J} = \frac{1}{3}\int \mathbf{r}\times\left(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega}^{(\lambda)}\right)dV$$

(для одиночного вихря можно положить $\boldsymbol{\omega}^{(\lambda)} \equiv \boldsymbol{\omega}$). Более тонкие детали вихревого распределения описываются линейными моментами

(2) $$M^{(n)}_{i_1\ldots i_n}(\mathbf{x}) = \int r_{i_1}r_{i_2}\ldots r_{i_{n-1}}\omega^{(\lambda)}_{i_n}(\mathbf{x}+\mathbf{r})\,dV(\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{x}$ — координаты центра сферы. Как отмечено в [9], моменты вида (2) удобны для описания внутренних степеней свободы одиночных вихрей. В нашем случае $M^{(n)}$ — тензорные поля, характеризующие структуру потока в окрестности каждой точки $\mathbf{x}$. Аналогичный метод использовался в [10] для описания локальной структуры конденсированного вещества.

Нетрудно заметить, что моменты $M^{(n)}$ есть коэффициенты разложения Тейлора преобразования Фурье:

$$\tilde{\omega}_m(\mathbf{k}) = \int \exp(-i\mathbf{kr})\,\omega^{(\lambda)}_m(\mathbf{r})\,dV(\mathbf{r}).$$

Поэтому поле $\boldsymbol{\omega}^{(\lambda)}$ полностью описывается набором моментов (2). Наиболее существенные свойства выделенного вихря даются моментами низкого порядка. Рассмотрим подробнее $M^{(n)}$ $(n \leqslant 4)$. Удобно разложить эти тензоры на неприводимые компоненты [11]. Неприводимые компоненты тензоров $M^{(n)}$ $(n \leqslant 4)$, выраженные в терминах завихренности $\boldsymbol{\omega}$, равны

(3) $$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega}dV;$$

(4) $$J_i = \frac{1}{5}\int (3r_ir_j - r^2\delta_{ij})\,\omega_j dV;$$

(5) $$t_{ij} = \int [r_i(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})_j + r_j(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})_i]\,dV;$$

(6) $$d_{ij} = \frac{4}{7}\int [5r_ir_jr_m - r^2(r_j\delta_{im} + r_m\delta_{ij} + r_i\delta_{jm})]\,\omega_m dV;$$

(7) $$\mathbf{a} = \frac{1}{10}\int r^2\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega}dV;$$

(8) $$c_{ijm} = \frac{1}{3}\int [r_ir_j(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})_m + r_ir_m(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})_j + r_jr_m(\mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega})_i]\,dV - \frac{2}{3}(a_i\delta_{jm} + a_j\delta_{im} + a_m\delta_{ij}).$$

Здесь интегралы берутся по выбранному сферическому объему. Преобразования к интегралам от поля $\boldsymbol{\omega}$ выполнены с использованием функции Грина задачи Неймана [12]. Некоторые детали вычислений приведены в [13]. Завихренность вида $\boldsymbol{\omega}' = \nabla\chi$ и простой перенос крупномасштабными движениями не дают вклада в тензоры (3)—(8).

Физический смысл неприводимых тензоров становится ясным, если их выразить в терминах плотности вихревого импульса $\mathbf{q}$ [14, 15]. Определим поле $\mathbf{q}$ так, чтобы оно было равно плотности силового импульса, необходимого для мгновенной генерации вихря $\boldsymbol{\omega}^{(\lambda)}$ на фоне завихренности $\boldsymbol{\omega}'$. Подстановка $\mathbf{f} = \delta(t)\mathbf{q}$ в уравнение для завихренности

$$\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t = \operatorname{rot}\,[\mathbf{u}\times\boldsymbol{\omega}] + \nu\Delta\boldsymbol{\omega} + \operatorname{rot}\mathbf{f}$$

и интегрирование по бесконечно малому интервалу времени $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$ дают соотношение $\boldsymbol{\omega}^{(\lambda)} = \operatorname{rot}\mathbf{q}$. Калибровка поля $\mathbf{q}$ выбирается так, чтобы выделенному вихрю соответствовало ограниченное в пространстве распределение $\mathbf{q}(\mathbf{r})$. Другие детали калибровки для дальнейшего несущественны. Благодаря финитности поля $\mathbf{q}$ его моменты могут вычисляться интегрированием по всему пространству.

Подстановка $\boldsymbol{\omega} = \nabla\chi + \operatorname{rot}\mathbf{q}$ в (3)—(8) и интегрирование по частям приводят к

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{q}\,dV; \tag{9}$$

$$\mathbf{J} = \int \mathbf{r}\times\mathbf{q}\,dV; \tag{10}$$

$$t_{ij} = \int [3(r_iq_j + r_jq_i) - 2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{q})\,\delta_{ij}]\,dV; \tag{11}$$

$$d_{ij} = 4\int [r_i(\mathbf{r}\times\mathbf{q})_j + r_j(\mathbf{r}\times\mathbf{q})_i]\,dV; \tag{12}$$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{5}\int [2\mathbf{q}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{q})]\,dV; \tag{13}$$

$$c_{ijm} = \frac{4}{15}\int [5(r_ir_jq_m + r_ir_mq_j + r_jr_mq_i) - 2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{q})(r_i\delta_{jm} + r_j\delta_{im} + r_m\delta_{ij}) - r^2(q_i\delta_{jm} + q_j\delta_{im} + q_m\delta_{ij})]\,dV. \tag{14}$$

Формулы (9)—(14) позволяют представить себе характер движения по моментам распределения эквивалентного силового импульса, а (9), (10) воспроизводят известный вывод [7, 8], что векторы $\mathbf{P}$, $\mathbf{J}$ равны полному вихревому импульсу и моменту вихревого импульса. Тензоры t_{ij}, c_{ijm} описывают квадрупольную и октупольную деформацию объема жидкости завихренностью $\boldsymbol{\omega}^{(\lambda)}$. Тензор d_{ij} дает скручивающие деформации вдоль главных осей этого тензора. Вектор $\mathbf{a}$ описывает рециркуляцию внутри выделенного объема, связанную с $\boldsymbol{\omega}^{(\lambda)}$.

Сглаженная обрезка. Выбор наиболее удобного представления моментов определяется спецификой задачи. С использованием кинематического условия $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{u}$ и интегрирования по частям моменты (3)—(8) могут быть выражены через скорость. При этом появятся поверхностные интегралы от скорости по сфере, что может оказаться нежелательным. Например, пусть в некотором конечном числе точек измерена скорость. По статистическим причинам на границу сферической области может попасть небольшая их доля, недостаточная для надежного вычисления поверхностного интеграла. Этих трудностей можно избежать, если отказаться от интегрирования по области с заданной границей $r = \lambda$.

Введем под знак интегралов (3)—(8) весовую функцию $w^{(\lambda)}(r)$ и распространим интегрирование на все пространство, например:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r}\times\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}+\mathbf{r})\,w^{(\lambda)}(r)\,dV(\mathbf{r}).$$

Предполагается, что функция $w^{(\lambda)}(r)$ близка к единице при $r < \lambda$ и быстро убывает вне этой области. Рассмотренные выше интегралы соответствуют ступенчатой обрезке $w^{(\lambda)}(r) = \theta(\lambda - r)$, где θ равна единице при $r < \lambda$ и нулю при $r > \lambda$. Случай произвольной функции $w^{(\lambda)}(r)$ сводится к рассмотренному, если использовать разложение $w^{(\lambda)}$ в интеграл по ступенчатым функциям

$$w^{(\lambda)}(r) = -\int_0^\infty \frac{dw^{(\lambda)}(\lambda')}{d\lambda'} \theta(\lambda' - r)\, d\lambda'. \tag{15}$$

Разложение (15) позволяет выделить изолированный вихрь, соответствующий сглаженной обрезке $w^{(\lambda)}$. Прямые вычисления показывают, что его завихренность соленоидальна и равна

$$\omega^{(\lambda)}(\mathbf{r}) = -\int_r^\infty d\lambda' \frac{dw^{(\lambda)}(\lambda')}{d\lambda'} [\omega(\mathbf{r}) - \nabla\chi(\mathbf{r}, \lambda')],$$

где $\chi(\mathbf{r}, \lambda')$ — гармоническая функция, удовлетворяющая граничному условию (1) при $r = \lambda'$. Параметры вихря определяются интегралами (3)—(8), если в них произвести замену $dV \to w^{(\lambda)}dV$. Интегралы по поверхности от скорости превращаются в объемные интегралы по сферическому слою, эффективная толщина которого определяется профилем функции $dw^{(\lambda)}(r)/dr$.

Двумерные вихревые структуры описываются более простыми тензорными характеристиками, поскольку завихренность в том случае можно считать псевдоскаляром. К фону ω' выше отнесена компонента завихренности, удовлетворяющая внутри выбранной области условию $\operatorname{rot} \omega' = 0$. В случае двумерных движений это условие имеет вид $e_{ij}\partial\omega'/\partial r_j = 0$, т. е. $\omega' = \text{const}$.

Выберем в плоскости течения круг радиуса λ и разделим завихренность на две компоненты: $\omega = \omega' + \omega^{(\lambda)}$. Поле ω' совпадает с ω вне выбранной области и постоянно внутри ее. Эту постоянную удобно положить равной средней по кругу завихренности

$$\omega'(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi\lambda^2}\int \omega dA \quad (r < \lambda).$$

Поле $\omega^{(\lambda)} = \omega - \omega'$ образует вихревую пару масштаба λ. Его моменты симметричны относительно перестановок всех индексов:

$$M^{(n)}_{i_1 \ldots i_{n-1}}(\mathbf{x}) = \int r_{i_1} \ldots r_{i_{n-1}} \omega^{(\lambda)}(\mathbf{x} + \mathbf{r})\, dA(\mathbf{r}).$$

Из $M^{(n)}$ можно построить неприводимые моменты вихревой пары. Простейшие из них — вихревой импульс, момент импульса и тензор деформации:

$$P_i = e_{ij}\int r_j \omega dA, \quad J = \frac{1}{2}\int \left(r^2 - \frac{\lambda^2}{2}\right)\omega dA,$$

$$t_{ij} = \int \left(r_i r_j - \frac{1}{2} r^2 \delta_{ij}\right)\omega dA.$$

Построенные моменты не изменяются при переходе во вращающуюся систему координат и в другие галилеевы системы отсчета, что важно для возможных геофизических приложений.

Инварианты тензоров. Тензорные поля, построенные в этой работе, не равны нулю лишь вблизи точек, в которых имеются структуры масштаба λ. Это свойство полезно при изучении течений с заметной перемежаемостью. Тензоры (3)—(8) могут использоваться для выявления организованных структур, а также для их количественного анализа. Неприводимый симметричный тензор ранга n содержит $2n + 1$ независимых компонент. Три параметра задают ориентацию структуры в пространстве. Остальные $2(n - 1)$ параметров дают количественные характеристики вихревой структуры, независимые от ее ориентации. За эти характеристики можно принять инварианты $\psi^{(\mu)}$ ($\mu = 1, 2, \ldots$) неприводимых тензоров.

Предположим, что из эксперимента или при численном моделировании получены тензорные поля $M^{(n)}$ и их инварианты для $n \leqslant n_0$. Возникает вопрос, какую информацию о характере турбулентных структур можно при этом получить и как ее получить?

Зная распределение инвариантов по объему системы, можно выделить части жидкости, занятые соответствующими структурами. Распознавание типа структур по их полям $\psi^{(\mu)}(\mathbf{x})$ возможно путем сравнения этих полей с эталонами—специально созданными типами вихревых возмущений (вихревых колец и нитей, сдвиговых слоев и т. д.), при этом возникает возможность своеобразной спектроскопии структур по их инвариантам. Особенно интересно сравнение эволюции величин $\psi^{(\mu)}$ во времени с эволюцией изолированных структур. Сравнение структур по их моментам $M^{(n)}$ при $n \leqslant n_0$ есть сравнение классов, к которым принадлежат изучаемые структуры. Можно ожидать, что инварианты $\psi^{(\mu)}$ для небольших номеров ($n \leqslant 4$), описывающие самые крупномасштабные деформации объема при течении, не слишком чувствительны к флуктуациям внутри структур.

Идентификация вихревой структуры в турбулентной жидкости с эталонной конфигурацией означает, что для этой структуры ее характеристики представлены как наложение флуктуаций на характеристики эталонной структуры. Произвольными при таком сравнении остаются выбор начала отсчета времени, положения и ориентации в пространстве. Возможно, с этими величинами связана в основном стохастичность турбулентности, поэтому их исследование в терминах моментов $M^{(n)}$ — важная задача.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Towsend A. A.** The structure of turbulent shear flow.— Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
2. **Cantwell B. J.** Organized motion in turbulent flow.— Ann. Rev. Fluid Mech., 1981, v. 13.
3. **Hussain A. K. M. F.** Coherent structures — reality and myth.— Phys. Fluids, 1983, v. 26, N 10.
4. **Johson R. R., Push E. et al.** Experiments on the structure of turbulent shear in pipe flow of water.— Phys. Fluids, 1976, v. 19, N 9.
5. **Орлов В. В., Михайлова Е. С., Хабахпашева Е. М.** Полуавтоматические измерения кинематических характеристик в турбулентных течениях жидкостей и газов.— Метрология, 1970, № 3.
6. **Новиков Б. Г., Федосенко В. Д. и др.** Стереометрическое изучение дальнего турбулентного свободного сдвигового течения.— В кн.: Гидродинамика и акустика пристенных и свободных течений/Под ред. Б. П. Миронова. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1981.
7. **Ламб Г.** Гидродинамика.— М.: ОНТИ, 1947.
8. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973.
9. **Roberts P. H.** A Hamiltonian theory for weakly interacting vortices.— Mathematika, 1972, v. 19, N 1.
10. **Паташинский А. З.** Структура конденсированного состояния и фазовые переходы в аморфных системах. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 1984, № 64.
11. **Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.** Представления группы вращений и группы Лоренца.— М.: Физматгиз, 1958.
12. **Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Основные дифференциальные уравнения математической физики. — М.: Физматгиз, 1962.
13. **Кузьмин Г. А., Паташинский А. З.** Параметры организованных структур турбулентных течений. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 1984, № 155.
14. **Kuz'min G. A.** Ideal incompressible hydrodynamics in terms of the vortex momentum density.— Phys. Lett. A, 1983, v. 96, N 2.
15. **Кузьмин Г. А.** Гидродинамика стратифицированной жидкости в терминах плотности импульса Ламба.— ПМТФ, 1984, № 4.

Поступила 8/VII 1985 г.