

Для исключения дифференциальных операций по времени применим к (П1), (П2) интегральное преобразование Лапласа [8]. Тогда преобразованное уравнение для изображений в случае постоянства плотности тока имеет вид

$$(П3) \quad d^2 \tilde{T}(s)/dx^2 + \tilde{T}(s)(w_0 \alpha / \lambda - s/a) + w_0 / s \lambda + T_0 / \alpha = 0.$$

Решение уравнения (П3), симметричное относительно начала координат, с учетом граничного условия имеет вид

$$(П4) \quad \tilde{T} = \frac{q \operatorname{ch} \left(x \sqrt{\frac{s}{a} - \frac{w_0 \alpha}{\lambda}} \right)}{s \lambda \sqrt{\frac{s}{a} - \frac{w_0 \alpha}{\lambda}} \operatorname{sh} \left(l \sqrt{\frac{s}{a} - \frac{w_0 \alpha}{\lambda}} \right)} + \frac{w_0}{s \lambda \left(\frac{s}{a} - \frac{w_0 \alpha}{\lambda} \right)} + \frac{T_0}{s - \frac{w_0 \alpha}{\lambda}}.$$

Применим к (П4) обратное преобразование Лапласа. Производя замену переменных $p = s - a_1$ и разлагая функцию $[\operatorname{sh}(b_1 \sqrt{p})]^{-1}$ в ряд по экспоненциальным функциям [8], используя теорему о свертке, получим

$$(П5) \quad T(x, t) = \frac{q \sqrt{a}}{\lambda} \int_0^t \frac{\exp(a_1 \tau)}{\sqrt{a \tau}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{((2n-1)l-x)^2}{4a\tau} \right] + \exp \left[-\frac{((2n-1)l+x)^2}{4a\tau} \right] \right\} d\tau + \frac{1}{\alpha} [\exp(a_1 t) - 1] + T_0 \exp(a_1 t),$$

где $a_1 = w_0 \alpha / c \gamma$, $b_1 = l \sqrt{a}$.

Первое слагаемое в (П5) определяет совместное действие поверхностного и объемного источников тепла. Расчеты при параметрах, характерных для процесса ускорения проводников в импульсном магнитном поле, показывают, что зона совместного влияния с приемлемой для расчетов погрешностью (10—20%) может быть принята равной $2\sqrt{at}$.

Поступила 2 IX 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Агарков В. Ф., Бондалетов В. Н. и др. Ускорение проводников до гиперзвуковых скоростей в импульсном магнитном поле. — ПМТФ, 1974, № 3.
2. Абрамова К. Б., Златин Н. А., Перегуд Б. П. Магнитогидродинамические неустойчивости жидких и твердых проводников. Разрушение проводников электрическим током. — ЖЭТФ, 1975, т. 69, вып. 6(12).
3. Буткевич Г. В., Белкин Г. С., Ведешенков Н. А., Жаворонков М. А. Электрическая эрозия силовых контактов и электродов. М.: Энергия, 1978.
4. Афанасьев Ю. В., Крохин О. Н. Высокотемпературные и плазменные явления, возникающие при взаимодействии мощного лазерного излучения с веществом. — В кн.: Физика высоких плотностей энергии. М.: Мир, 1974.
5. Анисимов С. И., Имас Я. А., Романов Г. С., Ходыко Ю. В. Действие излучения большой мощности на металлы. М.: Наука, 1970.
6. Златин Н. А., Красильщиков А. П., Мишин Г. И., Попов Н. Н. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. М.: Наука, 1974.
7. Геринг Дж. Высокоскоростной удар с инженерной точки зрения. — В кн.: Высокоскоростные ударные явления. М.: Мир, 1973.
8. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967.

УДК 532.54 : 541.13

ОБ ЭЛЕКТРИЗАЦИИ СЛАБОПРОВОДЯЩИХ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ В ТРУБАХ И КАПИЛЛЯРАХ

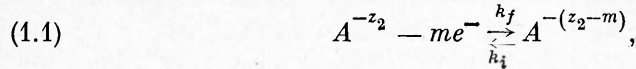
А. И. Жакин
(Харьков)

Одним из возможных механизмов электризации слабопроводящих жидкостей (жидкие углеводороды, минеральные масла и т. д.) при течении в металлических трубах и капиллярах являются окислительно-восстановительные реакции примесных ионов на стенках каналов [1—5]. Впервые эта точка зрения рассмотрена в [2] на основа-

нии экспериментальных данных, полученных в [3], где показано, что при подаче в заземленный металлический капилляр нейтральной жидкости (*n*-гептан) на выходе жидкость заряжается (положительно), причем ток зарядов из конца капилляра будет стационарным при стационарном течении жидкости.

В данной работе в отличие от [2, 4, 5] анализируется случай, когда скорость прямой реакции разрядки ионов мала по сравнению со скоростью обратной реакции

1. Постановка задачи. В отличие от традиционного подхода к явлению электризации слабопроводящих жидкостей, основанного на представлении об образовании тока зарядки за счет выноса зарядов гидродинамическим потоком из диффузионной части двойного электрического слоя [6], в [2] предложен новый подход, который в терминах химической кинетики заключается в следующем. Предполагается, что на входе канала (фиг. 1) нейтральная жидкость содержит два сорта примесных ионов положительного B^{+z_1} и отрицательного A^{-z_2} знаков (z_1, z_2 — зарядовые числа ионов). При движении жидкости на его стенке ($r = R$) происходит разрядка отрицательных ионов за счет обратимой реакции



где k_f — константа скорости прямой, k_i — обратной реакции; e^- — электрон; m ($m \leq z_2$) — число электронов, переходящих с иона A^{-z_2} на электрод. При $m = z_2$ в результате реакции образуются нейтральные молекулы A .

Так как на входе Σ_0 ($x = 0$) концентрация ионов $A^{-(z_2-m)}$ (либо молекул A) равна нулю, то вблизи начального участка прямая реакция будет идти интенсивнее, чем обратная. Это приводит к тому, что в жидкости образуется избыток положительных ионов, т. е. к электризации.

Краевая задача, описывающая зарядку жидкости при наличии реакции (1.1), имеет следующий вид:

$$(1.2) \quad \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = 4\pi e [z_1 n_1 - z_2 n_2 - (z_2 - m) n_3], \quad \mathbf{E} = -\nabla \psi;$$

$$(1.3) \quad \operatorname{div} \mathbf{i}_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad \mathbf{i}_1 = -D_1 \nabla n_1 + b_1 n_1 \mathbf{E} + n_1 \mathbf{v}, \quad \mathbf{i}_2 = -D_2 \nabla n_2 - b_2 n_2 \mathbf{E} + n_2 \mathbf{v}, \quad \mathbf{i}_3 = -D_3 \nabla n_3 - \gamma b_3 n_3 \mathbf{E} + n_3 \mathbf{v} \quad (0 \leq r \leq R; 0 \leq x \leq \infty);$$

$$(1.4) \quad \Sigma_0 (x = 0): n_1 = n_1^0, \quad n_2 = n_2^0, \quad n_3 = 0, \quad z_1 n_1^0 = z_2 n_2^0;$$

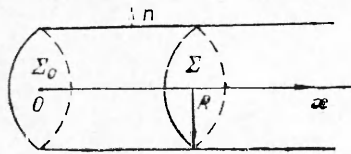
$$(1.5) \quad S (r = R): \mathbf{i}_1 \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3) \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{i}_2 \mathbf{n} = k_f n_2 - k_i n_3, \quad \psi = \psi_0;$$

$$(1.6) \quad \text{при } x \rightarrow \infty \quad \mathbf{i}_2 \mathbf{n} = 0, \quad n_3/n_2 = k_f/k_i = K.$$

Здесь n_i, b_i, D_i ($i = 1, 2, 3$) — соответственно частичные концентрации, подвижности и коэффициенты диффузии ионов $B^{+z_1}, A^{-z_2}, A^{-(z_2-m)}$ (или A); n_1^0, n_2^0 — постоянные концентрации ионов B^{+z_1}, A^{-z_2} на входе канала; ϵ — диэлектрическая проницаемость жидкости; e — заряд протона; $\gamma = 0$ при $z_2 = m$ и $\gamma = 1$ при $z_2 > m$; \mathbf{n} — нормаль к S , направленная от жидкости.

Уравнения (1.2), (1.3) предполагают, что объемный заряд $e[z_1 n_1 - z_2 n_2 - (z_2 - m) n_3]$, образующийся в процессе электризации, и индуцируемое им электрическое поле столь малы, что не влияют на распределение поля скоростей жидкости, т. е. $\mathbf{v} = v_0(0, 0, v(r))$ — заданная функция координат, v_0 — скорость на оси канала. Последнее соотношение в (1.4) следует из нейтральности жидкости на входе.

Первое условие в (1.5) выражает отсутствие тока положительных зарядов на землю. Второе есть равенство потоков ионов A^{-z_2} и $A^{-(z_2-m)}$ на поверхность канала S , что является следствием того, что каждый ион



Ф и г. 1

$A^{-(z_2-m)} (A^{-z_2})$ может на S образовываться только в результате прямой (обратной) реакции (1.1), а их адсорбции на S не происходит. Третье условие следует из того, что разность между количеством $k_f n_2$ разрядившихся ионов A^{-z_2} и количеством $k_i n_3$ восстановившихся ионов $A^{-(z_2-m)}$ на S равна притоку ионов A^{-z_2} (или $A^{-(z_2-m)}$). Здесь предполагается, что реакция (1.1) является одностадийной [7]. Постоянство потенциала $\psi = \psi_0 = \text{const}$ на S определяется из условия заземления стенки канала.

Условия (1.6) выражают равновесие реакции (1.1) на достаточно большом расстоянии от начального сечения Σ_0 .

Ток зарядки через произвольное сечение Σ ($x = \text{const}$) определяется как

$$(1.7) \quad I = e \int_{\Sigma} [z_1 i_1 - z_2 i_2 - (z_2 - m) i_3] e_x d\Sigma.$$

2. Метод решения. Так же как и в [2, 5], сделаем следующие предположения, упрощающие дальнейший ход исследования задачи. Во-первых, будем предполагать достаточно большой среднюю скорость течения жидкости, так что изменение всех величин вдоль оси канала происходит значительно медленнее, чем в радиальном направлении. Отсюда следует, что в лапласиане Δ можно опустить производные по координате x . Во-вторых, считаем малой долю прореагировавших ионов A^{-z_2} по сравнению с непрореагировавшими в любом сечении Σ . Это предположение определяет малость константы равновесия K реакции (1.1), что позволяет применить теорию возмущений. Наконец, считаем равными коэффициенты диффузии $D_i = D$ и подвижности $b_i = b$ ($i = 1, 2, 3$).

В соответствии с методом возмущений разыскиваем решение в виде рядов

$$(2.1) \quad n_i = n_i^0 + n_i^{(1)} + n_i^{(2)} + \dots, \quad n_3 = n_3^{(1)} + n_3^{(2)} + \dots, \\ \psi = \psi_0 + \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \dots \quad (i = 1, 2).$$

После подстановки (2.1) в (1.2)–(1.6), линеаризации и перехода к безразмерным переменным по формулам

$$q_i = n_i^{(1)}/n^0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad n^0 = z_1 n_1^0 + z_2 n_2^0, \\ \varphi = \psi^{(1)}/4\pi e n^0, \quad r' = r/R, \quad x' = x/R,$$

получим

$$(2.2) \quad -L\varphi = q, \quad Lq_3 - \kappa v(r) \partial q_3 / \partial x = 0, \\ Lq - \delta^2 q - \kappa v(r) \partial q / \partial x = 0;$$

$$(2.3) \quad \text{при } x = 0 \quad q = q_3 = 0;$$

$$(2.4) \quad \text{при } r = 1 \quad \frac{\partial q}{\partial r} + \delta^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = m \left(K_f \frac{\delta^2}{\delta^2} - K_i q_3 \right) = m \frac{\partial q_3}{\partial r}.$$

Здесь

$$q = z_1 q_1 - z_2 q_2 - (z_2 - m) q_3; \quad L \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}; \\ \delta_z^2 = R^2 / D\tau_z \quad (\tau_z = \varepsilon / 4\pi e b n^0); \quad \delta^2 = R^2 / D\tau \quad (\tau = \varepsilon / 4\pi e b n^0); \\ \kappa = v_0 R / D; \quad K_f = k_f R / D; \quad K_i = k_i R / D$$

и опущены штрихи в безразмерных координатах.

Будем считать профиль скоростей пуазейлевским: $v(r) = 1 - r^2$. Это приближение справедливо в том случае, когда характерная длина развития параболического профиля $l \sim 0,16 v_0 R^2 / \nu$ [8] (ν — кинематическая вязкость) значительно меньше характерной длины канала L , на которой происходит зарядка жидкости.

Задачу (2.2)–(2.4) решаем с помощью преобразования Лапласа

$$q_* = \int_0^{\infty} q(r, x) e^{-px} dx \quad (\text{аналогично для } \varphi_*, q_{3*}).$$

Тогда для изображений получим следующую задачу:

$$(2.5) \quad -L\varphi_* = q_*, \quad Lq_* - [\delta^2 + \beta^2(1-r^2)]q_* = 0, \quad Lq_{3*} - \\ -\beta^2(1-r^2)q_{3*} = 0, \quad \beta^2 = \kappa p;$$

$$(2.6) \quad \frac{dq_*}{dr} + \delta^2 \frac{dq_*}{dr} = m \left(K_f \frac{\delta^2}{\delta^2 p} - K_i q_{3*} \right) = m \frac{dq_{3*}}{dr} \quad (r=1),$$

решение которой находится с помощью подстановок

$$q_* = A_1 e^{-z/2} \Phi(\alpha_1, 1, z), \quad q_{3*} = A_2 e^{-z/2} \Phi(\alpha_2, 1, z), \\ \alpha_1 = 1/2 + (\delta^2 + \beta^2)/4i\beta, \quad \alpha_2 = 1/2 + \beta/4i, \quad z = i\beta r^2,$$

где $\Phi(\alpha, 1, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [9]. Определив постоянные A_1, A_2 из (2.6) и применив обратное преобразование Лапласа, получим

$$(2.7) \quad q = \frac{m\delta^2 K_f}{\delta^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{i\beta H(\beta) e^{\frac{i\beta(1-r^2)}{2}} \Phi(\alpha_1, 1, i\beta r^2)}{p H_1(\delta, \beta) H_2(K_i, \beta)} e^{rx} dp \quad (\text{Re } p_0 > 0), \\ H(\beta) = 2\alpha_2 \Phi(\alpha_2 + 1, 2, i\beta) - \Phi(\alpha_2, 1, i\beta), \\ H_1(\delta, \beta) = i\beta \left[2\alpha_1 \Phi(\alpha_1 + 1, 2, i\beta) - \Phi(\alpha_1, 1, i\beta) \right] - \frac{\delta^2}{2} \int_0^1 e^{\frac{i\beta(1-\xi)}{2}} \times \\ \times \Phi(\alpha_1, 1, i\beta\xi) d\xi,$$

$$H_2(K_i, \beta) = K_i \Phi(\alpha_2, 1, i\beta) + i\beta H(\beta).$$

Используя теорему о вычетах [9], (2.7) можно представить в виде

$$(2.8) \quad q = \frac{m\delta^2 K}{4\delta^2} \left(\frac{I_0(\delta r)}{\int_0^1 (1-r^2) I_0(\delta r) r dr} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} e^{\frac{pk_n(r^2-1)}{2}} \Phi(\alpha_{kn}, 1, -pk_n r^2) e^{-\frac{pk_n x}{\kappa}} \right),$$

где $\alpha_{1n} = 1/2 - (\delta^2 - p_{1n}^2)/4p_{1n}$; $\alpha_{2n} = 1/2 + p_{2n}/4$; p_{1n}, p_{2n} — занумерованные в порядке возрастания положительные простые корни следующих уравнений:

$$(2.9) \quad h_1(p_{1n}) \equiv H_1(\delta, ip_{1n}) = p_{1n} [-2\alpha_{1n} \Phi(\alpha_{1n} + 1, 2, -p_{1n}) + \\ + \Phi(\alpha_{1n}, 1, -p_{1n})] - \frac{\delta^2}{2} \int_0^1 e^{\frac{p_{1n}(\xi-1)}{2}} \Phi(\alpha_{1n}, 1, -p_{1n}\xi) d\xi = 0;$$

$$(2.10) \quad h_2(p_{2n}) \equiv H_2(K_i, ip_{2n}) = K_i \Phi(\alpha_{1n}, 1, -p_{2n}) - \\ - p_{2n} [2\alpha_{2n} \Phi(\alpha_{2n} + 1, 2, -p_{2n}) - \Phi(\alpha_{2n}, 1, -p_{2n})] = 0.$$

Коэффициенты a_{1n}, a_{2n} определяются в виде

$$(2.11) \quad a_{1n} = \frac{8K_i H(ip_{1n})}{h_1'(p_{1n}) H_2(K_i, ip_{1n})}, \quad a_{2n} = \frac{8K_i H(ip_{2n})}{H_1(\delta, ip_{2n}) h_2'(p_{2n})},$$

где штрих обозначает производные соответственно по p_{1n}, p_{2n} .

δ^2	1	30	50	70	100
b_1	0,835	0,836	0,831	0,822	0,808
b_2	0,97	0,095	0,095	0,095	0,094
b_3	0,014	0,014	0,014	0,014	0,013
a_1	$0,28 \cdot 10^{-5}$	$0,28 \cdot 10^{-4}$	$0,15 \cdot 10^{-3}$	-0,0013	$0,5 \cdot 10^{-6}$

Используя определение (1.7) и учитывая (2.8), находим ток зарядки

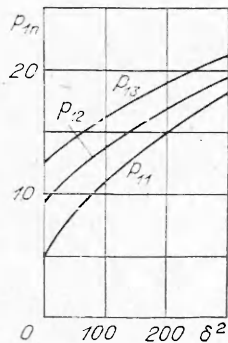
$$(2.12) \quad I = I_{\infty} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{p_{1n}^2 D}{v_0 R^2} x\right) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{p_{2n}^2 D}{v_0 R^2} x\right) \right];$$

$$(2.13) \quad I_{\infty} = \frac{1}{2} \pi l e n_2^0 v_0 R^2 K, \quad a_n = a_{1n} c_{1n}, \quad b_n = a_{2n} c_{2n},$$

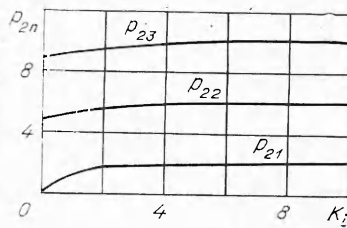
$$c_{kn} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \xi) \exp\left(\frac{p_{kn}}{2} (\xi - 1)\right) \Phi(\alpha_{kn}, 1, -p_{kn} \xi) d\xi$$

($k = 1, 2, n = 1, 2, 3, \dots$).

3. Результаты численных расчетов. Из уравнений (2.9), (2.10) видно, что p_{1n} зависят только от параметра δ^2 , а p_{2n} — от K_i . Результаты численных расчетов этих зависимостей представлены на фиг. 2, 3, откуда видно, что при $\delta \rightarrow 0$ корни p_{1n} стремятся к постоянным значениям ($p_{11} \rightarrow 5,0$, $p_{12} \rightarrow 9,1$, $p_{13} \rightarrow 12,5$), тогда как с ростом δ они возрастают; при $\delta > 10$ имеем $p_{11} \sim \delta$ (при $\delta^2 = 1; 10; 50; 100$ соответственно $p_{11} = 5,16; 5,97; 8,72; 11,2$). Корни p_{2n} также с ростом K_i монотонно увеличиваются, но в отличие от предыдущего случая при $K_i \rightarrow \infty$ стремятся к постоянным значениям. Так, при $K_i \geq 40$ p_{2n} ($n = 1, 2, 3$) меняются на доли процента, а их значения при $K_i = 10$ и $K_i = 40$ отличаются на 3—4% (при $K_i = 10$ $p_{21} = 2,51$, $p_{22} = 6,32$, $p_{23} = 10,12$; при $K_i = 40$ $p_{21} = 2,65$, $p_{22} = 6,59$, $p_{23} = 10,55$).



Фиг. 2



Фиг. 3

С использованием этих числовых данных по формулам (2.11), (2.13) проведен расчет коэффициентов a_n , b_n рядов (2.12), результаты которого представлены в таблице. Вычисления показали, что коэффициенты b_n положительны и быстро убывают с ростом n (для $n = 1, 2, 3$ приблизительно на порядок при увеличении n на единицу, см. таблицу), причем коэффициент b_1 , дающий основной вклад в сумму ряда, медленно и монотонно убывает с ростом δ (значения b_1 при $\delta^2 = 1$ и $\delta^2 = 100$ отличаются на 2%). Коэффициенты a_n могут менять знак, однако их абсолютные значения при $\delta^2 \leq 100$ малы: $|a_n| \ll b_n$ ($n = 1, 2, 3$). Расчеты также показали, что для первых значений $n = 1, 2, 3$ абсолютные значения a_n могут иметь одинаковый порядок.

Таким образом, для $\delta^2 \leq 100$, $K_i \geq 40$ выражение для тока зарядки с точностью до членов порядка $O(10^{-3})$ можно представить в виде

$$I = I_{\infty} \left[1 - \sum_{n=1}^3 b_n \exp\left(-\frac{\pi p_{2n}^2 D}{2Q} x\right) \right] \quad (I_{\infty} = \pi n_2^0 Q K),$$

где $Q = (\pi/2)v_0 R^2$ — секундный расход жидкости; $p_{21}^2 = 6,7$; $p_{22}^2 = 43,5$; $p_{23}^2 = 111$.

Из таблицы видно, что с ростом параметра δ коэффициенты b_n убывают, а $|a_n|$ возрастают. Таким образом, при $\delta \rightarrow \infty$ можно предположить,

что основную роль в выражении для тока зарядки (2.12) будет играть ряд с коэффициентами a_n . Однако проверить это предположение численными расчетами на ЭВМ не удалось из-за плохой сходимости ряда для вырожденной гипергеометрической функции и наличия быстроменяющегося экспоненциального множителя в подынтегральных функциях выражений (2.9), (2.13). С другой стороны, при весьма больших δ нарушается условие асимптотической сходимости (2.1), которое можно представить в виде $\delta K \ll 1$, поэтому предельное решение, получаемое из (2.7), при $\delta \rightarrow \infty$ не имеет смысла.

Таким образом, данный анализ справедлив для достаточно малых констант равновесия $K \ll 1$, любых K_i и $\delta^2 \ll K^{-2}$.

4. Анализ решения. Из (3.4) видно, что с ростом расхода Q ток зарядки монотонно возрастает, причем при малых Q ($Q \ll 2\pi p_{23}^2 D x$) как линейная функция $I = emn_2^0 K Q$. В пределе $Q \rightarrow \infty$ имеет место насыщение

$$I \rightarrow I_0 = \frac{\pi}{2} (b_1 p_{21}^2 + b_2 p_{22}^2 + b_3 p_{23}^2) emn_2^0 D K x.$$

Отметим, что такая закономерность поведения I от средней скорости ламинарного течения в капилляре наблюдалась в экспериментах [3] (при турбулентном течении $I \sim v_0^{15/8}$ при малых скоростях и $I \sim v_0^{7/8}$ при больших [3]). Зависимость I от концентрации ионов на входе капилляра обычно трактуется как зависимость от проводимости. В этом смысле (3.4) дает линейный закон, который наблюдается в экспериментах при достаточно низкой проводимости [3]. Однако в свете новых представлений о проводимости жидких диэлектриков [10, 11] стационарное прохождение тока обеспечивается не примесными ионами, а инжекционными (или регенерационными [10]) процессами на контакте электрод—жидкость, которые определяются физико-химическими свойствами электрода, жидкости и примесной компоненты. Последняя по данным электроконвективных течений должна быть нейтральной [11]. Таким образом, можно лишь говорить о том, что проводимость нейтральной жидкости пропорциональна концентрации содержащихся в ней ионов. Поэтому для объяснения экспериментально наблюдаемого спада тока зарядки с ростом проводимости при достаточно высоких их значениях необходимо рассматривать взаимодействие поверхности электрода не только с примесными ионами, но и с нейтральной примесной компонентой. Так, при достаточно высокой концентрации c_X примеси X (т. е. высокой проводимости) их адсорбция на поверхность капилляра может привести к замедлению скорости разрядки отрицательных ионов, т. е. к уменьшению тока зарядки. Аналитически это означает, что при достаточно больших c_X предельный ток зарядки I_∞ становится монотонно убывающей функцией от c_X . Эти рассуждения подтверждаются и экспериментальными наблюдениями [3], где показано, что предельный ток I_∞ при малых проводимостях $\sigma < \sigma_0$ с ростом последней остается постоянным и только при достаточно больших $\sigma > \sigma_0$ начинает убывать. С количественной точки зрения это можно описать следующим образом. Если предположить, что на той части поверхности, где адсорбировались X , реакция разрядки отрицательных ионов (1.4) не идет, то третье условие в (1.5) примет вид

$$i_2 n = (1 - \lambda)(k_f n_2 - k_r n_3),$$

где λ есть площадь, занимаемая адсорбтом X на единичной площадке поверхности капилляра. Например, если адсорбция описывается согласно изотерме Ленгмюра, то $\lambda = \beta c_X / (1 + \beta c_X)$, где β — физическая константа, зависящая от материала электрода и рода примеси X . В этом случае ток зарядки также будет определяться (2.12), где $I_\infty = (1/2) \times \pi m \lambda (1 - \lambda) e n_2^0 v_0 R^2 K$. Так как c_X , λ пропорциональны проводимости жидкости, то при $\sigma \rightarrow 0$ $\lambda \rightarrow 0$, а при $\sigma \rightarrow \infty$ $\lambda \rightarrow 1$. Поэтому при малых проводимостях ток зарядки линеен по σ , при больших проводимостях — убывает с ростом σ .

Новая точка зрения на проводимость жидких диэлектриков дает возможность предположить принципиально другой механизм электризации. Так, если атомы (молекулы) M электрода по отношению к молекулам жидкости A (примеси X) проявляют положительную или отрицательную электроотрицательность [12], то на поверхности электрода могут образовываться соответственно положительные или отрицательные ионы, которые, мигрируя в глубь жидкости (конвективным или диффузионным способом), электризуют ее. Этот механизм генерирования ионов на поверхности электрода положен в основу представления о проводимости жидких диэлектриков в работе [13].

Из (3.1) следует, что при достаточно больших x ($x \gg 2Q/\pi p_{21}^2 D$) ток зарядки не зависит от длины капилляра и равен $I = I_\infty = emn_2^0 QK$. Характерная длина L (длина электризации), при которой возможно достижение предельного тока I_∞ , оценивается как $L = v_0 R^2 / p_{21}^2 D$. Для типичных значений $D = 10^{-5}$ см²/с в условиях экспериментов с гептаном [3] ($v_0 = 100$ см/с, $R = 0,016$ см) имеем $L = 400$ см. Столь большие значения длины электризации можно объяснить следующим. Процесс электризации прекращается, когда реакция (1.1) приходит в равновесие. Это равновесие достигается тогда, когда концентрация n_3 ионов $A^{-(r_2-m)}$ становится однородной по всему объему величиной, равной $n_3 = Kn_2^0$. В рамках рассматриваемого приближения этот процесс определяется только диффузией (см. (2.2)). При больших скоростях движения жидкости ($v_0 \geq 100$ см/с) конвективный поток значительно превосходит диффузионный, что и приводит к большим значениям длины L . Наименьшая длина L_m , при которой возможна существенная электризация ($I \simeq 0,1 I_\infty$), оценивается как $L_m = v_0 R^2 / p_{23} D$. Для приведенных выше v_0 , R , D имеем $L_m = 25$ см. Отметим, что в экспериментах [3] длина капилляров, в которых была обнаружена заметная электризация, составляла 4—40 см, что согласуется с приведенной выше оценкой.

Таким образом, при малой проводимости имеет место качественное соответствие решения (3.1) с экспериментальными данными [3]. Для количественной проверки (3.1) и качественного соответствия при больших проводимостях необходимы дальнейшие экспериментальные исследования по определению компонент реакции (1.4), измерению констант скоростей реакций (константы равновесия K) и изучению роли нейтральных примесей на их прохождении.

Поступила 14 IV 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Захарченко В. В. и др. Электризация жидкостей и ее предотвращение. М.: Химия, 1975.
2. Gavis J., Koszman I. Development of charge in low conductivity liquids flowing past surfaces: a theory of phenomenon in tubes.— J. Coll. Sci., 1961, vol. 16, p. 375—391.
3. Koszman I., Gavis J. Development of charge in low conductivity liquids flowing past surfaces. Experimental verification and application of the theory developed for tube flow.— Chem. Eng. Sci., 1962, vol. 17, p. 1023—1040.
4. Гогосов В. В., Никифорович Е. И., Толмачев В. В. Электризация слабопроводящей жидкости, текущей по металлической трубе.— Магнитн. гидродинамика, 1979, № 2.
5. Прибылов В. Н., Черный Л. Т. Электризация диэлектрических жидкостей при течении в трубах.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6.
6. Леб Л. Б. Статическая электризация. М.— Л.: Гостехиздат, 1963.
7. Герасимов Я. И. и др. Курс физической химии. Т. 2. М.: Химия, 1973.
8. Слезкин И. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955.
9. Кузнецов Д. С. Специальные функции. М.: Высшая школа, 1962.
10. Копылов Ю. К. Основные закономерности электропроводности высокоомных органических жидкостей при активационном характере контактных процессов.— Труды Днепропетровского с.-х. пн-та. Органические полупроводящие жидкости, 1974, т. 27.
11. Жакин А. И. Некоторые вопросы электрогидродинамической устойчивости и

- электроконвекции несжимаемых жидкостей. Автореф. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Харьков: изд. ХГУ, 1980.
12. Глинка Н. Л. Общая химия. Л.: Химия, 1972.
13. Казацкая Л. С., Солодовниченко И. М. О роли электроиндукционных эффектов молекул в механизме генерации носителей заряда в органической жидкости. — Электронная обработка материалов, 1979, № 2.

УДК 532.6 : 532.581

НАЧАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПАДЕНИИ КАПЛИ НА ПЛОСКОСТЬ

А. А. Коробкин

(Новосибирск)

Рассматривается начальная стадия удара сферической капли по твердой плоскости. Предполагается, что жидкость идеальная и несжимаемая, поверхностное натяжение и внешние массовые силы отсутствуют.

Эта задача тесно связана с задачей о входе затупленного тела в жидкость, впервые рассмотренной в [1]. Метод вычисления силы сопротивления, развитый в [1], основан на допущении, что распределение скоростей на свободной поверхности в каждый момент получается таким же, как и распределение скоростей непосредственно после удара плавающей пластины соответствующих размеров.

Эти задачи имеют следующую специфику: 1) область течения Ω_t неизвестна; 2) на границе области течения необходимо определить линию контакта свободной поверхности жидкости и твердого тела; 3) на этой линии возможно появление особенностей решения.

Новый подход к решению задач такого сорта дает введение лагранжевых координат [2, 3], в которых область течения уже фиксирована.

1. При $t = 0$ жидкий шар радиуса a касается твердой плоскости, движущейся вдоль оси z со скоростью v . Требуется найти возникающее при этом движение жидкости. В пространстве лагранжевых декартовых координат ξ, η, ζ область, занятая жидкостью, известна — это шар радиуса a с центром в начале координат, обозначим его Ω_0 . Через x, y, z обозначим соответствующие эйлеровы координаты, Γ — свободная поверхность, Σ — пятно контакта капли и твердой плоскости. Уравнения Эйлера, записанные в лагранжевых координатах, имеют вид [3]

$$(1.1) \quad M_0^* \mathbf{x}_{tt} + \frac{1}{\gamma} \nabla_{\xi} p = 0, \quad \det M_0 = 1 \text{ в } \Omega_0$$

с краевыми $p|_{\Gamma} = 0, z_t|_{\Sigma} = -v$ и начальными $\mathbf{x}|_{t=0} = \xi, \mathbf{x}_t|_{t=0} = 0$ условиями, где $\mathbf{x} = (x, y, z); \xi = (\xi, \eta, \zeta); M_0 = \partial(\mathbf{x})/\partial(\xi); M_0^*$ — матрица, сопряженная к M_0 ; p — давление. Сформулированная задача сложна в силу своей нелинейности и наличия неизвестной линии на границе шара $\partial\Omega_0$, разделяющей Γ и Σ .

2. Линеаризуем краевую задачу (1.1) на начальном состоянии покоя, удерживая члены нулевого и первого порядка малости относительно перемещений. Для линеаризованной задачи можно ввести потенциал перемещений $\Phi = \Phi(\xi, \eta, \zeta, t)$, который, вследствие уравнения неразрывности, будет гармонической в Ω_0 функцией. Из уравнения импульса следует связь

$$(2.1) \quad p = -\gamma \Phi_{tt}$$

давления с потенциалом перемещений. С учетом этой формулы условие на Γ после двойного интегрирования по t с использованием начальных условий запишется в виде $\Phi|_{\Gamma} = 0$. Условие непротекания примет вид $\Phi_{zt}|_{\Sigma} = -v$.

Введем лагранжевы сферические координаты ρ, θ, φ такие, что $\xi = \rho \sin \theta \cos \varphi, \eta = \rho \sin \theta \sin \varphi, \zeta = \rho \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Постановка задачи инварианта относительно вращения вокруг оси z , это позволяет разыскивать функцию Φ не зависящей от φ . Тогда прообраз в лагранжевых координатах линии контакта свободной поверхности кап-