Физика горения и взрыва, 1996, т. 32, № 2

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МОДЕЛИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД ЛЯХОВА

УДК 532.59:517.19

В. А. Вахненко, В. А. Даниленко, В. В. Кулич

Институт геофизики им. С. И. Субботина АН Украины, 252054 Киев

Рассмотрена модель многокомпонентных сред Ляхова, которая с помощью асимптотического метода осреднения получила строгое математическое обоснование. Показано, что природа длинноволнового воздействия различна на разных масштабных уровнях. На микроуровне поведение среды подчиняется термодинамическим законам, а на макроуровне — выражается в волновом движении для средних характеристик.

Несколько десятилетий для описания волновых процессов при взрыве в грунтах и пористых многокомпонентных средах используется модель Ляхова [1–3]. В связи с тем, что в этой модели без строгого доказательства применяются уравнения движения однородной среды, необходимо ее обоснование.

Модель Ляхова. Анализ модели Ляхова [3] для определенности проведем на примере водонасыщенного грунта, состоящего из трех компонентов: воздуха ($i = 1$), воды ($i = 2$) и твердого вещества ($i = 3$). Компоненты считаются баротропными. При этом рассматриваются только длинноволновые возмущения, т. е. характерный размер микроструктуры ε' считается малым по сравнению с длиной волны λ. В этой модели априори считается, что в каждом макрообъеме достигается одно осредненное давление p_L, одна скорость u_L, один удельный объем v_L. Уравнения движения грунта записывают, как для однородной среды. В лагранжевой системе координат (l, t) для одномерного движения они имеют вид

$$\frac{\partial u_L}{\partial t} + v_{L0}\left[\frac{r}{l}\right]^{\nu-1}\frac{\partial p_L}{\partial l} = 0, \qquad \frac{\partial v_L}{\partial t} - \nu v_{L0}\frac{\partial r^{\nu-1}u_L}{\partial l^\nu} = 0, \tag{1}$$

где r — эйлерова пространственная координата; $\nu = 1$, 2 или 3 для плоской, цилиндрической или сферической симметрии соответственно; индекс 0 — начальное состояние.

К уравнениям (1) добавляются уравнения состояния [3]

$$\frac{\dot v_L}{v_{L0}} = \varphi(p_L)\dot p_L - \frac{\alpha_1}{\eta}\psi(p_L, v_L), \tag{2}$$

$$\varphi(p_L) = -\sum_{i=2}^{3}\frac{\alpha_i}{\rho_{i0}c_{i0}^2}\left[\frac{\gamma_i(p_L - p_0)}{\rho_{i0}c_{i0}^2} + 1\right]^{-(1+\gamma_i)/\gamma_i}, \tag{3}$$

$$\psi(p_L, v_L) = p_L - p_0 - \frac{\rho_{10}c_{10}^2}{\gamma_1}\left[\left\{\frac{v_L}{v_{L0}} - \sum_{i=2}^{3}\alpha_i\left[\frac{\gamma_i(p_L - p_0)}{\rho_{i0}c_{i0}^2} + 1\right]^{-1/\gamma_i}\right\}^{-\gamma_1}\alpha_1^{\gamma_1} - 1\right]. \tag{4}$$

Здесь α_i, $\rho_{i0} \equiv v_{i0}^{-1}$ и c_{i0} — объемная концентрация, плотность и скорость звука i-го компонента при начальном давлении p_0; γ_i — показатель адиабаты в уравнении состояния i-го компонента; η — коэффициент объемной вязкости грунта.

Система (1)–(4) описывает эволюцию длинноволновых возмущений в многокомпонентных средах в гидродинамическом приближении. Уравнение состояния (2) получено из полуэмпирических соображений о среде и свойствах компонентов [3]. Твердое вещество и жидкость подчиняются равновесному уравнению Тэта. Газообразный компонент подчиняется динамическому уравнению состояния, учитывающему скорость деформирования грунта. Согласно [3] в начальный момент приложения нагрузки газ несжимаем. Это означает, что замороженная скорость звука c_{f1} газового компонента в грунте есть бесконечно большая величина:

$$c_{f1} = \infty. \tag{5}$$

Низкочастотная скорость звука в газовом компоненте c_{e1} равна скорости звука в воздухе.

Асимптотическая осредненная модель. Существует класс математически строгих асимптотических методов осредненного описания веществ регулярной микроструктуры, в том числе асимптотический метод осреднения [4, 5]. Он используется для моделирования длинных волн в сжимаемых средах [6]. В отличие от известных результатов для плоского случая [6–9] проведем вывод осредненной системы уравнений для одномерных движений любой симметрии.

Основные гидродинамические уравнения для описания неустановившихся одномерных движений среды необходимо записать в переменных Лагранжа. В этой системе микроструктура не изменяется при волновых движениях. Исходными уравнениями являются уравнения движения для отдельного компонента:

$$\frac{\partial r^\nu}{\partial l^\nu} = \frac{v}{v_0}, \qquad u = \frac{\partial r}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + v_0\left(\frac{r}{l}\right)^{\nu-1}\frac{\partial p}{\partial l} = 0. \tag{6}$$

Уравнение непрерывности можно записать в альтернативной форме:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu v_0 \frac{\partial r^{\nu-1}u}{\partial l^\nu} = 0. \tag{7}$$

Каждый компонент в элементарной ячейке среды считается релаксирующим и описывается динамическим уравнением состояния [8, 9]

$$d\rho = c_f^{-2}dp - \tau_r^{-1}(\rho - \rho_e)dt. \tag{8}$$

Здесь c_f — замороженная скорость звука; τ_r — характерное время релаксации элемента среды. Величина равновесной плотности ρ_e связана с давлением через равновесное уравнение состояния

$$\rho_e - \rho_0 = \int_{p_0}^{p} c_e^{-2}\, dp,$$

где c_e — равновесная скорость звука.

Для строгого математического вывода осредненной системы уравнений будем считать, что среда слоистая, с периодической структурой. В случае цилиндрической и сферической симметрии слои, естественно, имеют соответствующую симметрию.

Рассмотрим длинноволновые возмущения, а на границах слоев выставим условия согласования массовых скоростей и напряжений:

$$[u] = 0, \qquad [p] = 0. \tag{9}$$

Удобно пользоваться безразмерными переменными [10], причем запись получаемых безразмерных уравнений по виду не будет отличаться от исходных уравнений. Поэтому считаем соотношения (6), (7) записанными в безразмерных переменных.

В соответствии с асимптотическим методом осреднения [4, 5] пространственная массовая координата $m = l^\nu/v_0$ разбивается на медленную (s) и быструю (ξ) независимые переменные:

$$m = s + \varepsilon\xi, \qquad \frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial s} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Безразмерный период структуры $\varepsilon = \varepsilon'/\lambda$ является малым параметром. Решения r^ν, p, u, v ищутся в виде рядов по степеням ε, например:

$$r^\nu(m,t) = (r^\nu)^{(0)}(s,t,\xi) + \varepsilon(r^\nu)^{(1)}(s,t,\xi) + \varepsilon^2(r^\nu)^{(2)}(s,t,\xi) + \ldots,$$

$$v(m,t) = v^0(s,t,\xi) + \varepsilon v^{(1)}(s,t,\xi) + \varepsilon^2 v^{(2)}(s,t,\xi) = \ldots .$$

Функции $v^{(i)}(\xi)$ полагаются i-периодическими по ξ.

Проделывая процедуру, подробно описанную для плоского случая в [9], в порядке $o(\varepsilon^{-1})$ получаем

$$\frac{\partial (r^\nu)^{(0)}}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial (r^\nu)^{(0)} u^{(0)}}{\partial \xi} = 0. \tag{10}$$

Следовательно, массовая скорость $u^{(0)}$, давление $p^{(0)}$ и эйлерова координата $(r^\nu)^{(0)}$ не зависят от быстрой переменной ξ.

В порядке $o(\varepsilon^0)$ будет

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \nu(r^\nu)^{(0)}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} + \nu(r^\nu)^{(1)}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial \xi} + \nu(r^\nu)^{(0)}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \xi} = 0. \tag{11}$$

Усредняя по периоду в лагранжевых массовых координатах $\langle\cdot\rangle = \int d\xi$, с одной стороны, имеем одно из искомых уравнений

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \nu(r^\nu)^{(0)}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} = 0, \tag{12}$$

поскольку $\langle \partial p^{(1)}/\partial\xi\rangle = 0$, в силу периодичности $p^{(1)}$ от ξ, а с другой — получаем $\partial p^{(1)}/\partial\xi = 0$ в результате вычитания уравнения (12) из (11). Поэтому $p^{(1)}$ также не зависит от ξ.

Легко записать остальные уравнения в осредненном виде:

$$\frac{\partial (r^\nu)^{(0)}}{\partial s} = \langle v\rangle, \qquad u^{(0)} = \frac{\partial r^{(0)}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} + \nu(r^\nu)^{(0)}\frac{\partial p^{(0)}}{\partial s} = 0, \tag{13}$$

$$d\langle v^{(0)}\rangle = -\Big\langle \frac{(v^{(0)})^2}{c_f^2}\Big\rangle dp - \Big\langle \frac{(v^{(0)})^2}{\tau c_e^2}(p^0 - p_e^{(0)})\Big\rangle dt. \tag{14}$$

Равенство (7) перепишем в виде

$$\frac{\partial \langle v^{(0)}\rangle}{\partial t} - \nu\,\frac{\partial (r^\nu)^{(0)} u^{(0)}}{\partial s} = 0. \tag{15}$$

В отличие от величин $u^{(0)}$, $p^{(0)}$, $p^{(1)}$, $r^{(0)}$ удельный объем $v^{(0)}$ — функция ξ. Система уравнений (13)–(15) интегродифференциальная. В дальнейшем ограничимся нулевым приближением по ε, верхний индекс нуль опустим.

Обратим внимание, что нагрузка на уровне микроструктуры среды является безволновой, так как давление и массовая скорость не зависят от ξ. Поведение среды на этом уровне подчиняется только термодинамическим законам. На макроуровне состояние среды описывается законами волновой динамики для средних характеристик. На этом иерархическом уровне уравнения движения (13), (15) не изменяются, если в элементарной ячейке менять расположение слоев или их дробить. Значит, соотношения (13)–(15) одинаково описывают поведение любой квазипериодической (статистически неоднородной) среды, имеющей на уровне микрострутуры одно и то же массовое содержание компонентов безотносительно к местоположению вещества по объему ячейки.

Сопоставление моделей. Сравним уравнения (1), (2) модели Ляхова с осредненными уравнениями (13)–(15). В общем случае элементарная ячейка может содержать набор из многих слоев различных компонентов. В слоистой среде распределение значения удельного объема $v = v(\xi)$ по элементарной ячейке является ступенчатой функцией, поэтому

$$\langle v \rangle \equiv \int_0^1 v(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{3} \beta_i v_i, \tag{16}$$

где β_i — размер компонента на периоде в масштабе быстрой переменной. Величина β_i есть массовое содержание компонента и является такой характеристикой структуры, которая не меняется при волновых движениях.

В модели Ляхова для удельного объема справедлива формула (3.3) из [3]:

$$\frac{v_L}{v_{L0}} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \frac{v_i}{v_{i0}}. \tag{17}$$

Легко заметить, что между α_i и β_i существует связь:

$$\beta_i = \alpha_i \frac{v_{L0}}{v_{i0}}. \tag{18}$$

Отсюда получаем, что осредненная по периоду структуры величина удельного объема (16) в асимптотической осредненной модели есть удельный объем (17), определенный Ляховым как

$$v_L = v_{L0} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \frac{v_i}{v_{i0}} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \frac{v_{L0}}{v_{i0}} v_i = \sum_{i=1}^{3} \beta_i v_i = \langle v \rangle.$$

В осредненных уравнениях (13), (15) давление p и массовая скорость u не изменяются на периоде структуры. Следовательно, уравнения движения (1) совпадают с (13), (15). При этом должно быть $s = l^\nu / v_{L0}$. Таким образом, предположение, что в модели Ляхова давление p_L и массовая скорость u_L есть средние величины, получило строгое доказательство. Теперь индекс L в (1)–(4) можно опустить.

Сравним уравнения состояния (2) и (14). Представим выражение (14) в виде, удобном для сравнения:

$$v^{-1} \frac{d\langle v \rangle}{dt} = -v^{-1} \left\langle \frac{v^2}{c_f^2} \right\rangle \frac{dp}{dt} - v^{-1} \left\langle \frac{v^2}{\tau c_e^2} (p - p_e) \right\rangle. \tag{19}$$

Левые части (2) и (19) совпадают. Сравним коэффициенты при dp/dt. Зависимость

$\varphi(p)$ можно представить с помощью (18):

$$\varphi(p) = -\sum_{i=2}^{3} \frac{\alpha_i}{\rho_{i0} c_{i0}^2} \left(\frac{v_i}{v_{i0}}\right)^{1+\gamma_i} = -\eta^{-1} \sum_{i=1}^{3} \beta_i \frac{v_i^2}{c_{i0}^2} \left(\frac{v_i}{v_{i0}}\right)^{\gamma_i^{-1}}.$$

В модели Ляхова использована конкретная связь компонентов давления и скорости звука посредством уравнения Тэта. В асимптотической же модели эта зависимость не конкретизируется. Если теперь в ней принять

$$c_{fi} = c_{i0} \left(\frac{\rho_i}{\rho_{i0}}\right)^{\gamma_i^{-1}} \qquad (i = 2;\, 3) \tag{20}$$

и учесть условие несжимаемости воздуха (5), то коэффициенты при dp/dt в (2) и (19) совпадут.

Упростим ψ в (4), используя (18):

$$\psi(p, v) = p - p_0 - \frac{\rho_{10} c_{10}^2}{\gamma_1} \left[\left\{ \frac{v}{v_0} - \sum_{i=2}^{3} \alpha_i \frac{v_i}{v_{i0}} \right\}^{-\gamma_1} \alpha_1^{\gamma_1} - 1 \right] =$$

$$= p - p_0 - \frac{\rho_{10} c_{10}^2}{\gamma_1} \left[\left(\frac{v_1}{v_{10}}\right)^{-\gamma_1} - 1 \right] = p - p_0 \left(\frac{v_1}{v_{10}}\right)^{-\gamma_1} = p - p_{e1}.$$

Зависимость $p_{e1} = p_{e1}(v_1)$ есть равновесное уравнение состояния воздуха в грунте, т. е. уравнение состояния свободного воздуха. Окончательно второе слагаемое в правой части (2) принимает вид

$$(p - p_{e1})\alpha_1/\eta.$$

Теперь легко показать, что вторые слагаемые в (2) и (19) совпадут, если принять, что только газообразный компонент релаксирует, т. е.

$$c_{f1} \neq c_{e1}, \qquad c_{f2} = c_{e2}, \qquad c_{f3} = c_{e3}, \tag{21}$$

а между временем релаксации τ_{r1} и η установлена однозначная связь

$$\tau_{r1} = \eta \frac{v_1^2}{c_{e1}^2 v_{10}}. \tag{22}$$

Уравнения (2) и (19) совпадут при выполнении условий (5), (20)–(22).

Заключение. Асимптотическая осредненная модель (13)–(15) описывает волны в средах, которые могут иметь любое количество релаксирующих компонентов (произвольные распределения $v(\xi)$, $\tau_r(\xi)$ на элементарной ячейке структуры), причем зависимости скоростей звука от давления не конкретизируются. Модель Ляхова — частный случай этой модели. В ней только один (газовый) компонент релаксирует, причем он несжимаем в начальный момент приложения нагрузки, а скорости звука являются определенными функциями давления. Модель Ляхова имеет асимптотическую природу.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант UAE000).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ляхов Г. М.** Ударные волны в многокомпонентных средах // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1959. № 1. С. 34–56.

2. **Ляхов Г. М.** Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М.: Недра, 1974.
3. **Ляхов Г. М.** Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М.: Наука, 1982.
4. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
5. **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
6. **Бахвалов Н. С., Эглит М. Э.** Процессы в периодических средах, не описываемые в терминах средних характеристик // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 4. С. 836–840.
7. **Вахненко В. А., Даниленко В. А., Кулич В. В.** Волновые процессы в периодической релаксирующей среде // Докл. АН УССР. 1991. № 4. С. 93–96.
8. **Вахненко В. А., Даниленко В. А., Кулич В. В.** Осредненное описание ударно-волновых процессов в периодических средах // Хим. физика. 1993. Т. 12, № 3. С. 383–389.
9. **Вахненко В. А., Кулич В. В.** Длинноволновые процессы в периодической среде // ПМТФ. 1992. № 6. С. 49–56.
10. **Бахвалов Н. С., Эглит М. Э.** О скорости распространения возмущений в микронеоднородных упругих средах с малой сдвиговой упругостью // Докл. РАН. 1992. Т. 323, № 1. С. 13–18.

Поступила в редакцию 31/V 1995 г.