

13. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.
14. Кибель И. А., Кочин К. Е., Розе И. В. Теоретическая гидромеханика.— М.: Физматгиз, 1963.— Т. 1, 2.
15. Жижин Г. В., Сегаль А. С. и др. О стационарных состояниях сферического и цилиндрического фронта реакции в жидкости с переменной вязкостью // Кинетика и катализ.— 1986.— № 6.

Поступила 22/XII 1986 г.

УДК 517.9

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ПРОЦЕСС ЗОННОЙ ПЛАВКИ

Б. М. Анисютин

(Новокузнецк)

Метод плавающей зоны — наиболее распространенный бестигельный метод очистки материалов и выращивания монокристаллов. Механика процесса очистки материала состоит в том, что на начальном этапе проводят расплавление некоторого внутреннего участка вертикального цилиндрического стержня заготовки, а на втором этапе медленно перемещают расплавленную зону вдоль стержня. Процесс выращивания монокристаллов сходен с процессом очистки, только на начальном этапе производят расплав не внутреннего, а концевого участка очищенного стержня, который затем приводят в соприкосновение с монокристаллической «затравкой» данного вещества. При теоретическом изучении можно условно выделить три аспекта данной задачи: устойчивость расплава, гидродинамические явления в плавающей зоне и теплообмен в системе при отсутствии конвекции в расплаве. При исследовании первых двух направлений авторы обычно предполагают, что априорно известны распределение температуры и положение границы расплава [1—3]. Таким образом, чтобы правильно сформулировать гидродинамические задачи и задачи устойчивости, необходимо знать геометрические характеристики расплавленной зоны и распределение температуры в образце.

Для решения возникающей задачи Стефана в настоящее время используется достаточно много различных методов. Но специфика зонной плавки заключается в том, что перемещение расплавленной зоны чрезвычайно медленное (порядка 1 см/ч) и им можно пренебречь. В этом случае удается существенно снизить объем вычислений, поскольку после преобразования Кирхгофа задача со свободной границей переходит в краевую задачу для уравнения Лапласа в известной области. Такой подход к решению стационарной задачи Стефана впервые применен в [4], где численно определялись распределение температуры и форма фронтов фазового перехода при следующих предположениях: 1) система находится в установившемся состоянии, границы расплава неподвижны, температура зависит только от двух переменных (радиуса и продольной координаты); 2) в расплаве отсутствует конвекция; 3) стержень находится в вакууме; 4) физические свойства каждой фазы не зависят от температуры; 5) свободная поверхность жидкой фазы цилиндрическая; 6) оба конца стержня теплоизолированы.

В настоящей работе в предположениях 1—4 численно исследуется осесимметричная стационарная задача о нахождении распределения температуры и положения границы раздела фаз. Дополнительная по сравнению с [4] трудность связана с тем, что боковая поверхность жидкой фазы считается свободной и зависит от капиллярных сил [2].

На торцах слитка задается новое краевое условие, моделирующее прикрепление образца к теплопроводным стержням. В частности, оно позволяет сократить объем вычислений, если ввести фиктивные границы и рассматривать внутренний более короткий участок слитка, прикрепленный к стержням из того же материала.

Получены следующие результаты: определены критические мощности внешнего источника тепла, при которых образуется область расплава, возникает жидкий мост, фронты фазового перехода становятся практически плоскими; изучена структура границ раздела фаз в зависимости от мощности и способа фокусировки источника тепла. Выявлена сильная зависимость границы раздела фаз от параметров задачи в случае малых размеров расплавленной зоны.

1. Постановка задачи. Рассматривается осесимметричный образец $\omega = \{(r, z) | 0 < r < g(z), d_1 < z < d_2\}$ длиной $l = d_2 - d_1$, в котором присутствуют две фазы: жидкая ω^+ , где температура T выше температуры плавления T_* , и твердая ω^- , где $T < T_*$. Предполагается, что $T(r, z)$ зависит только от двух переменных: радиуса r и координаты z , направленной вдоль оси симметрии, и в каждой фазе удовлетворяет уравнению Лапласа

$$(1.1) \quad \Delta T = 0 \text{ в } \omega^\pm.$$

На торцах образца положим

$$(1.2) \quad \kappa \partial T / \partial n = -\mu T^{5/2} \text{ при } z = d_i, i = 1, 2.$$

Условие (1.2) возникло из следующих соображений. В экспериментах, например, образец кремния крепится к медным стержням. Поскольку медь — хороший проводник тепла, распределение температуры в медном стержне можно считать одномерным и удовлетворяющим задаче [5]

$$(1.3) \quad \begin{aligned} R_0 \tilde{\kappa} T_{zz} &= 2\tilde{\varepsilon} \sigma \tilde{T}^4, z > d_2, \\ \tilde{T}_z &= 0, z = +\infty, \tilde{T} = T_2, z = d_2, \end{aligned}$$

которая имеет точное решение

$$(1.4) \quad \tilde{T} = T_2 \left(1 + \sqrt{\frac{1,8\tilde{\varepsilon}\sigma}{\tilde{\kappa}R_0} T_2^3 (z - d_2)} \right)^{-2/3}, z > d_2.$$

Поскольку из физических соображений на границе раздела материалов непрерывны температура и поток тепла: $T = \tilde{T} = T_2$, $\kappa \partial T / \partial n = \tilde{\kappa} \partial \tilde{T} / \partial n$, $z = d_2$, то при $z = d_2$ имеем (1.2) с $\mu = \sqrt{0,8\tilde{\varepsilon}\tilde{\kappa}\sigma/R_0}$. Аналогично получается условие (1.2) при $z = d_1$.

На боковой поверхности выполнено условие излучения в вакуум по закону Стефана — Больцмана

$$(1.5) \quad \kappa \partial T / \partial n = -\varepsilon(\sigma T^4 - q(z)) \text{ при } r = g(z),$$

где κ , ε , σ — коэффициенты теплопроводности, черноты и Больцмана соответственно; $q(z)$ — внешний тепловой поток; n — единичная внешняя нормаль к боковой поверхности.

На оси симметрии положим

$$(1.6) \quad T_r = 0 \text{ при } r = 0.$$

На границе раздела фаз температура равна температуре плавления

$$(1.7) \quad T = T_* \text{ на } \gamma$$

и выполнено условие Стефана, которое в стационарном случае примет вид равенства потоков тепла

$$(1.8) \quad \kappa_l \partial T_l / \partial n_1 = \kappa_s \partial T_s / \partial n_1 \text{ на } \gamma$$

(n_1 — единичная нормаль к поверхности фазового перехода).

Коэффициент теплопроводности предполагается кусочно-постоянной функцией температуры

$$\kappa(T) = \begin{cases} \kappa_s, & T < T_*, \\ \kappa_l, & T > T_*. \end{cases}$$

2. Редукция к задаче для уравнения Лапласа. Сделаем преобразование Кирхгофа:

$$(2.1) \quad U(T) = \frac{1}{\kappa_s T_*} \int_{T_*}^T \kappa(s) ds = \frac{T - T_*}{c(T) T_*},$$

где $c(T) = 1$ при $T < T_*$ и $c(T) = C = \kappa_s / \kappa_l$ при $T > T_*$, и замену

$$(2.2) \quad x = r/g(z), y = z/R_0$$

($R_0 = g(d_1)$ — радиус заготовки). При этом криволинейная область ω перейдет в прямоугольник $\Omega = (0,1) \times (D_1, D_2)$. Безразмерная приведенная температура $U(x, y)$ удовлетворяет в области Ω эллиптическому уравнению

$$(2.3) \quad a_{11} U_{xx} + a_{12} U_{xy} + U_{yy} + a_1 U_x = 0 \text{ в } \Omega,$$

на границах

$$(2.4) \quad U_y = \nu(cU + 1)^{5/2} \text{ при } y = D_1;$$

$$(2.5) \quad U_y = -\nu(cU + 1)^{5/2} \text{ при } y = D_2;$$

$$(2.6) \quad b_1 U_x + b_2 U_y = -H(cU + 1)^4 + Q \text{ при } x = 1;$$

$$(2.7) \quad U_x = 0 \text{ при } x = 0;$$

$$(2.8) \quad a_{11} = \frac{1}{G^2} + \left(x \frac{G'}{G}\right)^2, \quad a_{12} = -2x \frac{G'}{G},$$

$$a_1 = \frac{1}{xG^2} + x \frac{2(G')^2 - GG''}{G^2}, \quad b_1 = \frac{\sqrt{1+(G')^2}}{G}, \quad b_2 = -\frac{G'}{\sqrt{1+(G')^2}}.$$

В задачу (2.3)–(2.7) входят четыре безразмерных параметра:

$$(2.9) \quad H = \varepsilon \sigma R_0 T_*^3 / \kappa_s - \text{число Био},$$

$$\nu = \mu \frac{R_0}{\kappa_s} T_*^{3/2} = \sqrt{\frac{\kappa_s \varepsilon}{\kappa_l}} \sqrt{0,8H} \equiv N \sqrt{0,8H}, \quad C = \kappa_s / \kappa_l, \quad L = l/R_0,$$

две функции:

$$(2.10) \quad G(y) = g(R_0 y) / R_0 \text{ (задает боковую поверхность), } Q(y) = \frac{\varepsilon R_0 g(R_0 y)}{\kappa_s T_*} \text{ (определяет внешний тепловой поток).}$$

Решение U эллиптического уравнения с гладкими коэффициентами имеет непрерывные первые производные всюду внутри области Ω , поэтому условие Стефана (1.8), эквивалентное непрерывности первых производных функции U на $\Gamma \subset \Omega$, выполняется автоматически. Равенство температуры на границе фазового перехода температуре плавления (1.7) позволяет находить границу Γ как линию нулевого уровня функции $U(x, y)$.

3. Определение боковой поверхности. Форма свободной боковой поверхности расплава $G(y)$ в параметрическом виде находится из условий капиллярного равновесия через краевой угол β и границы расплавленной зоны D_3, D_4 следующим образом [2]: $G(y) = 1$ при $y \in [D_1, D_3] \cup [D_4, D_2]$, а при $y \in (D_3, D_4)$ как решение системы

$$y(\theta, \lambda) = D_3 + \int_{\lambda}^{\theta} \frac{1 + b \cos \xi}{f(\lambda, \lambda) f(\xi, \lambda)} d\xi,$$

$$D_4 = y(2\pi - \lambda, \lambda), \quad G(\theta, \lambda) = f(\theta, \lambda) / f(\lambda, \lambda)$$

при $\lambda \leq \theta \leq 2\pi - \lambda$, где $f(\theta, \lambda) = \sqrt{1 + b^2 + 2b \cos \theta}$; $b = -\text{tg } \beta / (\sin \lambda + \text{tg } \beta \cos \lambda)$.

4. Численное решение задачи (2.3)–(2.7). Для численного решения используется метод усановления, а именно: рассматривается вспомогательная задача для уравнения параболического типа:

$$(4.1) \quad v_t = a_{11} v_{xx} + a_{12} v_{xy} + v_{yy} + a_1 v_x \text{ в } \Omega \times (0, \infty);$$

$$(4.2) \quad v_t = v_y - \nu(cv + 1)^{5/2} \text{ при } y = D_1;$$

$$(4.3) \quad v_t = -v_y - \nu(cv + 1)^{5/2} \text{ при } y = D_2;$$

$$(4.4) \quad v_t = -b_1 v_x - b_2 v_y - H(cv + 1)^4 + Q \text{ при } x = 1;$$

$$(4.5) \quad v_x = 0 \text{ при } x = 0;$$

$$(4.6) \quad v = 0 \text{ при } t = 0.$$

Здесь $a_{11}, a_{12}, a_1, b_1, b_2, H, \nu, c, Q$ определяются по формулам (2.8)–(2.10). Если $\lim_{t \rightarrow \infty} v_t = 0$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$(4.7) \quad U_\nu(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(x, y, t)$$

является решением задачи (2.3)–(2.7).

Для решения задачи (4.1)–(4.6) используется локально-одномерная разностная схема второго порядка аппроксимации по пространственным переменным [6, с. 413]

$$(4.8) \quad (\bar{v} - v^{(n)})/\tau = \bar{v}_{y_i} + f \text{ в } \Omega;$$

$$(4.9) \quad (v^{(n+1)} - \bar{v})/\tau = a_{11}v_{xx}^{(n+1)} + f \text{ в } \Omega \quad (f = (1/2)(a_{11}v_{xy}^{(n)} + a_{12}v_x^{(n)})).$$

Граничные условия аппроксимируются также со вторым порядком:

$$(4.10) \quad (\bar{v} - v^{(n)})/\tau = v_y^{(n)} - v(cv^{(n)} + 1)^{5/2} \text{ при } y = D_1;$$

$$(4.11) \quad (\bar{v} - v^{(n)})/\tau = -v_y^{(n)} - v(cv^{(n)} + 1)^{5/2} \text{ при } y = D_2;$$

$$(4.12) \quad (v^{(n+1)} - v^{(n)})/\tau = -b_1v_x^{(n)} - b_2v_y^{(n)} - H(cv^{(n)} + 1)^4 + Q \text{ при } x = 1;$$

$$(4.13) \quad v_x^{(n+1)} = 0 \text{ при } x = 0;$$

$$(4.14) \quad v = 0 \text{ при } t = 0.$$

З а м е ч а н и е 1. Введение производной по времени v_t в нелинейные граничные условия (4.2)–(4.4) позволило легко получить второй порядок аппроксимации по пространственным переменным в их разностном аналоге (4.10)–(4.12).

5. Описание работы программы: 1) задаются постоянные D_i , $i = 1, 5$, C , H , v , β , P ; 2) по β , D_3 , D_4 определяется боковая поверхность $G(y)$; 3) находятся коэффициенты уравнения; 4) внешний тепловой поток $Q(y)$ выбирается так, чтобы

$$(5.1) \quad Q(y)G(y) = \begin{cases} Q_*, & |y| < D_5, \\ 0, & |y| > D_5; \end{cases}$$

тогда мощность вычисляется по формуле

$$(5.2) \quad P = 2Q_*D_5,$$

соотношения (5.1) и (5.2) определяют функцию $Q(y)$ в зависимости от P и D_5 ; 5) решается на установление задача (4.8)–(4.14): $U = v^{(n)}$, если $\max_{ij} |v^{(n)} - v^{(n-1)}| < 10^{-5}$; 6) на основе линейной интерполяции находят-

ся линии уровня $U(x, y) = 0$, которые совпадают с границей раздела фаз.

З а м е ч а н и е 2. Для определения боковой поверхности $G(y)$ по формулам, описанным в п. 3, необходимо знать три параметра: β , D_3 , D_4 . Краевой угол β считается известным для данного процесса, а точки D_3 и D_4 по физическому смыслу есть границы расплавленной зоны, т. е. в задаче (2.3)–(2.7) искомыми являются не только приведенная температура U , но и точки D_3 , D_4 . Поэтому необходимы дополнительные вычисления, которые строились таким образом: сначала полагали $D_4^{(0)} = -D_3^{(0)} = R_0$, выполняя шаги 2–6, находили первое приближение границы раздела фаз $\bar{D}_i^{(1)}$; продолжая этот процесс, получали последовательность $D_i^{(h)}$. Если $\max_{i=3,4} |D_i^{(h)} - D_i^{(h-1)}| < 0,01$, то считалось, что $U^{(h)}$, $D_3^{(h)}$, $D_4^{(h)}$ есть решение задачи (2.3)–(2.7).

Номер рисунка	H	N	C	D_1	D_2	P	D_5	$\pi - \beta$
1	0,01	0	1	-20	20	0,108–0,180	2,0	0
2	0,01	0	1	-20	20	0,08–0,18	0,5	0
3	1	0	1	-20	20	4,2–14,0	2,0	0
4	1	0	1	-20	20	2,0–14,0	0,5	0
5	0,01	0–2	1	-35	5	0,12	2,0	0
6	0,01	0	1	-20	20	0–0,24	0,5–2,0	0
7	1	0	1	-20	20	0–15	0,5–2,0	0
8	0,01	1	1	-20	20	0,11	0,5–2,0	0
9	0,01	0	0,5–2	-20	20	0,11	2,0	0
10	0,01	0	1	-20	20	0,11	2,0	-0,2–0,2

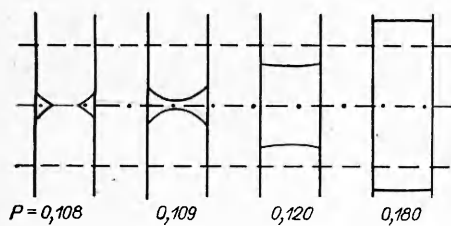


Рис. 1

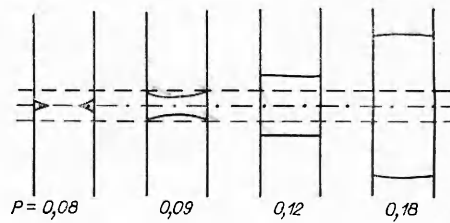


Рис. 2

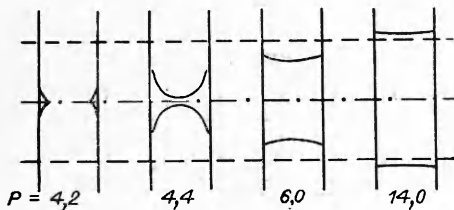


Рис. 3

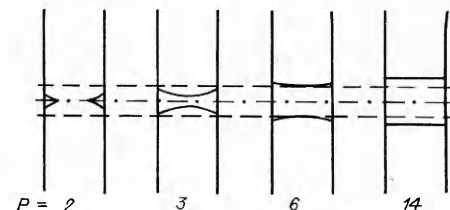


Рис. 4

6. Результаты счета. На рис. 1—5 и 9—10 изображены участки радиального сечения стержня $|z| < 3,5 R_0$, на которых штрихпунктирная линия соответствует $z = 0$, штриховые — $|z| = D_3$, сплошная линия — границе раздела фаз Γ . Набор значений параметров для рис. 1—10 дан в таблице.

На рис. 1—4 приведены характерные профили границ раздела фаз в случае теплоизолированных концов в зависимости от мощности источника тепла. Эти результаты хорошо согласуются с расчетами [4].

На рис. 5 показано влияние на геометрию расплава теплового потока через торцы слитка при смещении плавающей зоны к одному из концов; $N = 1$ моделирует случай, когда рассматривается конечный короткий участок в бесконечно длинном слитке. Как и следовало ожидать, расплавленная зона при этом имеет симметричную форму, а распределение температуры в твердой фазе мало отличается (менее чем на 0,01) от полученного из одномерной модели [5]:

$$(6.1) \quad U_D(y) = \begin{cases} [1 + \sqrt{1,8H}(y - D_4)]^{-2/3} - 1, & y \geq D_4, \\ 0, & D_3 < y < D_4, \\ [1 - \sqrt{1,8H}(y - D_3)]^{-2/3} - 1, & y \leq D_3. \end{cases}$$

На рис. 6, 7 представлена зависимость полуширины расплавленной зоны на боковой поверхности D_4 от мощности источника тепла P при различных числах Био. Штриховая линия отвечает узкому потоку тепла ($D_5 = 0,5$), сплошная — более широкому ($D_5 = 2$), а штрихпунктирная — зависимости

$$(6.2) \quad P = \sqrt{0,8H} + 2HD_4,$$

полученной из одномерной модели [5].

На рис. 8 показано распределение приведенной температуры U на поверхности образца $x = 1$ (сплошная линия — $D_5 = 2$, штриховая — $D_5 = 0,5$, штрихпунктирная — распределение температуры (6.1) из одномерной модели [5] при $D_3 = D_4 = 0$).

Из рис. 6—8 видно, что при малых числах Био зависимость (6.2) позволяет достаточно хорошо оценить мощность, необходимую для образования плавающей зоны, а (6.1) — распределение температуры. Отметим, что при малых размерах расплавленной зоны, как следует из рис. 6—7, небольшие колебания мощности P приводят к значительным изменениям

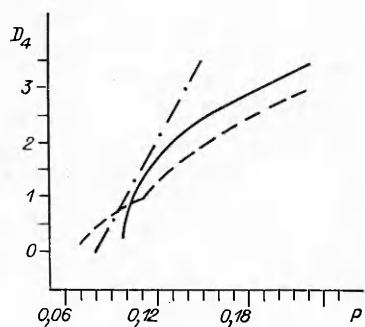


Рис. 6

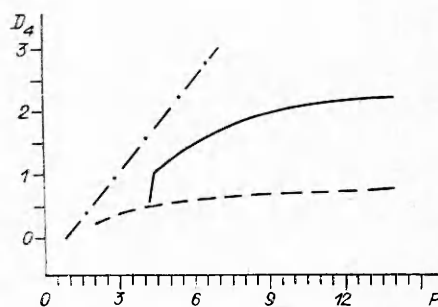


Рис. 7

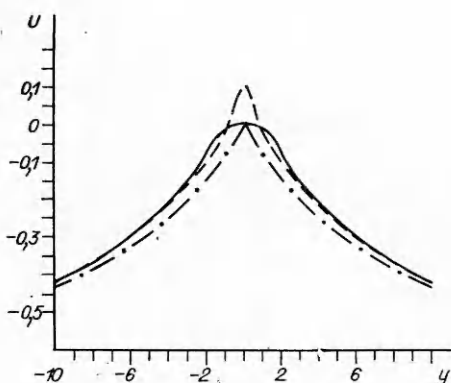


Рис. 8

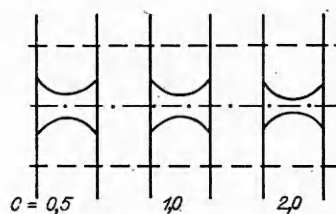


Рис. 9

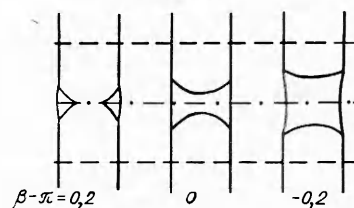


Рис. 10

D_4 . В этом случае граница раздела фаз сильно зависит и от других параметров задачи, например соотношения коэффициентов теплопроводности жидкой и твердой фаз C (рис. 9) или формы свободной поверхности расплава (рис. 10). Такая зависимость размеров расплава от данных задачи объясняется тем, что вариация параметров задачи приводит к небольшим колебаниям температуры, а поскольку градиент температуры вблизи границы фазового перехода мал (рис. 8), то сдвиг изолиний $U = 0$ или, что то же самое, перемещение границы раздела фаз оказывается ощутимым.

С этим связаны принципиальные трудности численного определения границ расплава, поскольку процесс сходится медленно и требуются большие затраты машинного времени. Приведенные на рис. 1—10 результаты получены на ЭВМ ЕС 1052, 1061 на сетке 11×41 точек при $\tau = 0,1$. Расчеты, проведенные на более мелких сетках, показали, что качественные свойства решений отражены верно.

В заключение отметим следующее: 1) если расплавленная зона находится достаточно далеко от торцов слитка, то, рассматривая значительно более короткий участок стержня с граничными условиями (2.4) и (2.5) при $\nu = \sqrt{0,8H}$, можно получить хорошее приближение для распределения температуры на этом участке; 2) при малых значениях ширины расплавленной зоны геометрия расплава сильно зависит от параметров задачи; по мере увеличения плавающей зоны эта зависимость становится слабее; 3) при больших значениях D_3 процесс может находиться в области сильной зависимости геометрии расплава от параметров задачи даже при длине расплавленной зоны на поверхности слитка $D_4 - D_3 \approx 2\lambda$.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву и Л. Г. Бадратиновой за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слобожанин Л. А. Исследование задач гидростатики, моделирующих процесс зонной плавки // III Всесоюз. семинар по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости: Тез. докл.— Черногоровка, 1984.
2. Бадратинова Л. Г. Устойчивость осесимметричных равновесных форм капиллярной жидкости в цилиндрической ампуле // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1983.— Вып. 63.
3. Люмкис Е. Д., Мартузан Б. Я., Мартузане Э. Н. Взаимодействие потоков, вызванных термокапиллярной конвекцией и вращением при зонной плавке, и их влияние на распространение примеси // Технологические эксперименты в невесомости.— Свердловск, 1983.
4. Kobayashi N. Power required to form a floating zone and zone shape // J. Crystal Growth.— 1978.— V. 43.— P. 417.
5. Дональд Д. К. Тепловой режим в условиях вакуумной плавки // Приборы для научных исследований.— 1961.— № 7.
6. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем.— М.: Наука, 1971.

Поступила 29/XII 1986 г.

УДК 532.522+681.7.068.4

СТАЦИОНАРНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ОБЛАСТИ ДЕФОРМАЦИИ И БАЛАНС СИЛ ПРИ ВЫТЯЖКЕ ОПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА

В. Н. Васильев, В. Д. Наумчик

(Ленинград)

Волоконный световод представляет собой тонкую стеклянную нить, которая формируется из жидкой массы, вытекающей из фильеры, или вытягиванием из цилиндрической заготовки путем ее местного симметричного нагрева до $\sim 2000^\circ\text{C}$. Проходя через воздух, расплав кварцевого стекла образует жидкую струю со свободной поверхностью, форма которой определяется равновесием между силами внутреннего трения, поверхностного натяжения, тяжести, сопротивления трения о воздух, силой на придание ускорения стеклу и усилием сдвига. Опускаясь вниз, струя охлаждается, и холодное волокно после нанесения первичного полимерного покрытия поступает на вращающийся барабан. Барабан поддерживает натяжение в струе, заставляя ее по мере охлаждения утончаться. Поведение струи расплава кварцевого стекла может быть рассмотрено на основе уравнений гидродинамики несжимаемой ньютоновской жидкости и энергии, так как в уравнение движения входит коэффициент динамической вязкости, который является функцией температуры. Последние экспериментальные исследования показали, что течение жидкости при вытяжке оптического волокна сдвиговое [1]. До настоящего времени надежной теории расчета двумерного распределения скорости и температуры в струе высоковязкой жидкости со свободной поверхностью не имеется. Поэтому обычно вводится ряд допущений (о которых см. подробнее в [2]), позволяющих тем или иным способом свести рассматриваемую задачу к одномерной. Однако даже в рамках одномерных моделей детальный анализ процесса вытяжки оптического волокна не выполнен, так как либо решается только гидродинамическая задача и предполагается, что распределение вязкости вдоль длины области деформации просто задано, либо в рассмотрение вводится слишком упрощенное уравнение энергии, которое не описывает адекватно процесс теплопередачи при вытяжке волокна.

В данной работе приведены основные результаты исследования процесса формирования оптического волокна, выполненные на основе квазиодномерной математической модели, основные положения которой изложены в [3], и проведен анализ баланса сил, действующих в области деформации при формировании волокна штабиковым методом.

1. Процесс формирования оптического волокна рассматривается при простом одноосном растяжении ньютоновской жидкости с переменной вязкостью, определяемой распределением температуры, которое находится из решения уравнения энергии. При формулировке системы уравнений, описывающих динамику вытяжки волокна, считалось, что физические свойства стекла, за исключением вязкости, постоянны, жидкость изотропна и ее движение осесимметричное.

Уравнения неразрывности

$$(1.1) \quad -\frac{\partial R}{\partial \tau} = v \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{R}{2} \frac{\partial v}{\partial x},$$

движения

$$(1.2) \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(3\mu R^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) + g\bar{\rho} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial \sigma R^2 H}{\partial x}$$