

8. Голубев В. К., Новиков С. А. и др. О механизмах откольного разрушения сталей Ст. 3 и 12Х18Н10Т в температурном диапазоне — 196—800°С.— Проблемы прочности, 1981, № 5.
9. Батьков Ю. В., Вишневецкий Е. Д. Аппаратура для измерения импульсных давлений пьезорезистивными датчиками в диапазоне 0,1—20 ГПа.— В кн.: Тезисы докладов II Всесоюз. симп. по импульсным давлениям. М.: изд. ВНИИФТРИ, 1976.
10. Barbee T. W., Seaman L. et al. Dynamic fracture criteria for ductile and brittle metals.— J. Materials, 1972, vol. 7, N 3.
11. Макклиток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов. М.: Мир, 1970.
12. Фадеев Ю. И. Временные критерии разрушения в динамике твердого тела.— В сб.: Динамические задачи механики сплошных сред. Вып. 32. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1977.
13. Din-Yu Hsieh. Bubble growth in a viscous liquid due to a transient pulse.— Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engineering, 1970, N 4. Рус. пер.: Се Дин-ю. Рост пузырька в вязкой жидкости, вызванный кратковременным импульсом.— Теоретические основы инженерных расчетов, 1970, № 4.
14. Минеев В. Н., Савинов Е. В. Вязкость и температура плавления алюминия, свинца и хлористого натрия при ударном сжатии.— ЖЭТФ, 1967, т. 52, вып. 3.
15. Захаренко И. Д., Мали В. И. Вязкость металлов при сварке взрывом.— В кн.: Горение и взрыв. М.: Наука, 1972.
16. Альтшулер Л. В., Канель Г. И., Чекин Б. С. Новые измерения вязкости воды за фронтом ударных волн.— ЖЭТФ, 1977, т. 72, вып. 2.

УДК 532.5 : 532.135

## КОЛЕБАНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ СЖАТИИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА

*Г. И. Бурдэ, Т. М. Бурдэ*  
(Пермь)

Исследованию различных видов неустойчивости, развивающейся в процессах деформации вязкоупругих материалов, посвящено значительное число работ (см. обзор [1, 2—7]). В этих работах рассматриваются в основном течения растяжения несжимаемых жидкостей. При анализе устойчивости пренебрегается, как правило, инерционными членами в уравнении движения.

В данной работе показано, что при деформациях сжимаемых вязкоупругих тел возможен еще один вид неустойчивости — колебания, обусловленные объемной упругостью материала и раскачивающиеся при вестороннем сжатии образца вследствие инерционного взаимодействия возмущений с основным течением. Из линеаризованных уравнений для малых возмущений определяются условия нарастания колебаний; на основе нелинейного анализа исследуется характер возбуждения колебаний и определяется их амплитуда.

Расчеты проведены для случая плоской однородной деформации и идеально гладких и жестких ограничивающих поверхностей. По-видимому, эти предположения не играют существенной роли в рассматриваемом механизме неустойчивости.

1. Рассмотрим вязкоупругое сжимаемое тело прямоугольной формы (фиг. 1), ограниченное гладкими жесткими плоскостями. Плоскости  $x_1 = \pm L(t)$  перемещаются симметрично друг другу со скоростью  $U = dL/dt$ , а плоскости  $x_2 = \pm R(t)$  — со скоростью  $V = dR/dt$ . Скорости  $U$  и  $V$  могут быть как положительными (растяжение), так и отрицательными (сжатие) и предполагаются постоянными, так что размеры образца изменяются со временем по линейному закону

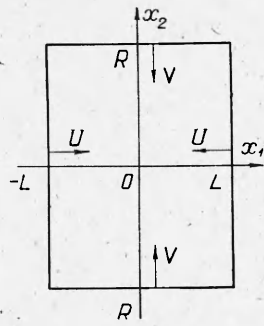
$$(1.1) \quad L = L_0 + Ut, \quad R = R_0 + Vt.$$

Уравнения, описывающие изотермическое течение материала образца, имеют вид (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование)

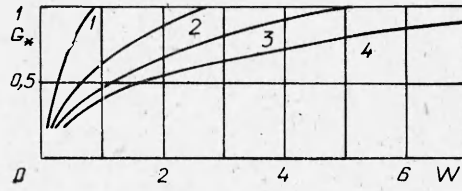
$$(1.2) \quad \partial \rho / \partial t + \partial(\rho v_k) / \partial x_k = 0;$$

$$(1.3) \quad \rho(\partial v_i / \partial t + v_k \partial v_i / \partial x_k) = \partial \sigma_{ki} / \partial x_k,$$

где  $\rho$  — плотность;  $v_i$  — компоненты скорости;  $\sigma_{ki}$  — компоненты тензора напряжений.



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Реологическое уравнение материала примем в форме

$$(1.4) \quad \sigma_{ij} = K e_{kk} \delta_{ij} + \tau_{ij},$$

где  $K$  — объемный модуль упругости, а  $e_{ij}$  — компоненты тензора деформаций Альманси [8], связанные с  $v_i$  соотношениями

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \partial e_{ij} / \partial t + v_k \partial e_{ij} / \partial x_k + e_{kj} \partial v_k / \partial x_i + e_{ik} \partial v_k / \partial x_j = \\ = (1/2)(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i). \end{aligned}$$

Девииаторные напряжения  $\tau_{ij}$  подчиняются уравнению (модель Максвелла) [9]:

$$(1.6) \quad \tau_{ij} + \lambda \delta \tau_{ij} / \delta t = 2\eta \xi_{ij}.$$

Здесь  $\xi_{ij}$  — девиаторная часть тензора скоростей деформации

$$(1.7) \quad \xi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij};$$

$\eta$  — коэффициент сдвиговой вязкости;  $\lambda$  — время релаксации; символ  $\delta / \delta t$  — конвективная производная по Олдройту. Вычисления проводились для двух случаев, когда в (1.6) используется либо верхняя конвективная производная

$$(1.8) \quad \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta t} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tau_{kj} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \tau_{ik},$$

либо нижняя конвективная производная

$$(1.9) \quad \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta t} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \tau_{kj} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \tau_{ik}.$$

Далее все промежуточные выкладки относятся к случаю (1.8), а окончательные результаты приводятся для обоих случаев.

Соотношения (1.2)–(1.8) для плоской деформации сводятся к системе девяти уравнений для функций  $\rho$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\tau_{11}$ ,  $\tau_{22}$ ,  $\tau_{12}$ ,  $e_{11}$ ,  $e_{22}$ ,  $e_{12}$ . Эти функции должны удовлетворять граничным условиям

$$(1.10) \quad \begin{aligned} v_1(L, x_2, t) = U, \quad v_2(x_1, R, t) = V, \\ \tau_{12}(L, x_2, t) = 0, \quad \tau_{12}(x_1, R, t) = 0 \end{aligned}$$

и условиям симметрии

$$(1.11) \quad \begin{aligned} v_1(0, x_2, t) = 0, \quad v_2(x_1, 0, t) = 0, \\ v_1(x_1, x_2, t) = -v_1(-x_1, x_2, t), \quad v_1(x_1, x_2, t) = v_1(x_1, -x_2, t), \\ v_2(x_1, x_2, t) = v_2(-x_1, x_2, t), \quad v_2(x_1, x_2, t) = -v_2(x_1, -x_2, t). \end{aligned}$$

Уравнения (1.2)–(1.8) с условиями (1.10), (1.11) допускают решение, соответствующее однородной деформации образца

$$(1.12) \quad \rho^0 = \frac{C}{L(t)R(t)}, \quad v_1^0 = U \frac{x_1}{L(t)}, \quad v_2^0 = V \frac{x_2}{R(t)}, \quad \tau_{ij}^0 = \tau_{ij}^0(t),$$

$$e_{ij}^0 = e_{ij}^0(t),$$

где  $C = \rho_0 L_0 R_0$  ( $\rho_0$  — плотность в начальный момент времени). Величины  $\tau_{ij}^0$  и  $e_{ij}^0$  определяются уравнениями

$$(1.13) \quad \frac{de_{11}^0}{dt} + 2 \frac{U}{L} e_{11}^0 = \frac{U}{L}, \quad \frac{de_{22}^0}{dt} + 2 \frac{V}{R} e_{22}^0 = \frac{V}{R}, \quad e_{12}^0 = 0,$$

$$\lambda \frac{d\tau_{11}^0}{dt} + \left(1 - 2\lambda \frac{U}{L}\right) \tau_{11}^0 = \frac{2}{3} \eta \left(2 \frac{U}{L} - \frac{V}{R}\right), \quad \lambda \frac{d\tau_{22}^0}{dt} + \left(1 - 2\lambda \frac{V}{R}\right) \tau_{22}^0 =$$

$$= \frac{2}{3} \eta \left(2 \frac{V}{R} - \frac{U}{L}\right), \quad \tau_{12}^0 = 0.$$

2. Исследуем устойчивость однородной деформации (1.12) по отношению к малым возмущениям. Удобно далее перейти к новому набору переменных ( $x$ ,  $y$ ,  $\zeta$ ):

$$x = x_1/L(t), \quad y = x_2/R(t), \quad \zeta = t,$$

где  $\zeta$  имеет смысл явно входящего времени. Производные по  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $t$  в (1.2)–(1.8) выражаются через новые переменные следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{U}{L} x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{V}{R} y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Удобно также использовать вместо  $\rho$  переменную  $r = \rho LR$ , которая при однородной деформации (1.12) имеет постоянное значение.

Представим решение системы (1.2)–(1.8) в виде

$$(2.1) \quad r = C + \Phi, \quad v_1 = Ux + u_1, \quad v_2 = Vy + u_2,$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^0 + T_{ij}, \quad e_{ij} = e_{ij}^0 + E_{ij}.$$

После линеаризации по малым возмущениям приходим к уравнениям:

$$(2.2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + C \left( \frac{1}{L} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = 0;$$

$$(2.3) \quad C \left( \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + \frac{U}{L} u_1 \right) = KR \frac{\partial}{\partial x} (E_{11} + E_{22}) + R \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + L \frac{\partial T_{12}}{\partial y};$$

$$(2.4) \quad C \left( \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} + \frac{V}{R} u_2 \right) = KL \frac{\partial}{\partial y} (E_{11} + E_{22}) + L \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + R \frac{\partial T_{12}}{\partial x};$$

$$(2.5) \quad T_{11} + \lambda \left\{ \frac{\partial T_{11}}{\partial \zeta} - \frac{2}{L} \tau_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x} - 2 \frac{U}{L} T_{11} \right\} = \frac{2}{3} \eta \left( \frac{2}{L} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial y} \right);$$

$$(2.6) \quad T_{22} + \lambda \left\{ \frac{\partial T_{22}}{\partial \zeta} - \frac{2}{R} \tau_{22}^0 \frac{\partial u_2}{\partial y} - 2 \frac{V}{R} T_{22} \right\} = \frac{2}{3} \eta \left( \frac{2}{R} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{1}{L} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right);$$

$$(2.7) \quad T_{12} + \lambda \left\{ \frac{\partial T_{12}}{\partial \zeta} - \frac{1}{L} \tau_{11}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{1}{R} \tau_{22}^0 \frac{\partial u_1}{\partial y} - \left( \frac{U}{L} + \frac{V}{R} \right) T_{12} \right\} =$$

$$= \eta \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{1}{L} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right);$$

$$(2.8) \quad \frac{\partial E_{11}}{\partial \zeta} + \frac{2}{L} e_{11}^0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + 2 \frac{U}{L} E_{11} = \frac{1}{L} \frac{\partial u_1}{\partial x};$$

$$(2.9) \quad \frac{\partial E_{22}}{\partial \zeta} + \frac{2}{R} e_{22}^0 \frac{\partial u_2}{\partial y} + 2 \frac{V}{R} E_{22} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial y};$$

$$(2.10) \quad \frac{\partial E_{12}}{\partial \zeta} + \frac{1}{L} e_{11}^0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{R} e_{22}^0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \left( \frac{U}{L} + \frac{V}{R} \right) E_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right).$$

Граничные условия к уравнениям (2.2)–(2.10) получаются подстановкой (2.1) в (1.10) и соответствуют обращению в нуль нормальных компонент возмущений скорости и касательных напряжений. При этом скорости движения вдоль границы и нормальные напряжения на границах могут быть произвольными, нарастая по мере развития неустойчивости.

Решение системы (2.2)–(2.10), удовлетворяющее граничным условиям и условиям симметрии, имеет вид

$$(2.11) \quad u_1 = \alpha_1(\zeta) \sin \pi n x \cdot \cos \pi t y, \quad u_2 = \alpha_2(\zeta) \cos \pi n x \cdot \sin \pi t y, \\ \{\Phi, T_{11}, T_{22}, E_{11}, E_{22}\} = \{F(\zeta), S_1(\zeta), S_2(\zeta), \beta_1(\zeta), \beta_2(\zeta)\} \cos \pi n x \cdot \cos \pi t y, \\ \{T_{12}, E_{12}\} = \{S_3(\zeta), \beta_3(\zeta)\} \sin \pi n x \cdot \sin \pi t y.$$

Подстановка (2.11) в (2.2)–(2.10) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, S_1, S_2, S_3$  (уравнения (2.2), (2.10) для величин  $F$  и  $\beta_3$  отщепляются). Анализ решений этой системы упрощается, если ограничиться рассмотрением деформации, происходящей с сохранением подобия:  $U/V = L_0/R_0$  ( $U/L = V/R$ ). Тогда, как видно из (1.13),

$$e_{11}^0 = e_{22}^0 = e^0, \quad \tau_{11}^0 = \tau_{22}^0 = \tau^0, \quad \frac{de^0}{d\zeta} + 2 \frac{U}{L} e^0 = \frac{U}{L}, \\ \lambda \frac{d\tau^0}{d\zeta} + \left(1 - 2\lambda \frac{U}{L}\right) \tau^0 = \frac{2}{3} \eta \frac{U}{L}.$$

Решения этих уравнений после перехода к новой независимой переменной  $G = L/L_0$  представляются в виде

$$(2.12) \quad e^0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{G^2}\right), \\ \tau^0 = \frac{\eta}{3\lambda} \left\{ A^2 G^2 e^{-AG} \left[ \ln G + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n (G^n - 1)}{n \cdot n!} \right] + G^2 (A + 1) e^{A(1-G)} - (1 + AG) \right\}, \\ A = \frac{L_0}{\lambda U}.$$

Уравнения для амплитуд возмущений при  $U/L = V/R$  можно свести к системе трех уравнений для величин

$$\alpha = \pi n \alpha_1 / U + \pi t \alpha_2 / V, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2, \\ S = \pi^2 n^2 (V/U) S_1 + \pi^2 m^2 (U/V) S_2 - 2\pi^2 m n S_3,$$

которая после подстановки в явном виде выражения (2.12) для  $e^0$  записывается в виде

$$(2.13) \quad C \left( \frac{d\alpha}{d\zeta} + \frac{U}{L} \alpha \right) = - \frac{L}{U} (K l^2 \beta + S);$$

$$(2.14) \quad \frac{d\beta}{d\zeta} + 2 \frac{U}{L} \beta = \frac{U L_0^2}{L^3} \alpha;$$

$$(2.15) \quad S + \lambda \left( \frac{dS}{d\zeta} - 2 \frac{U}{L} S \right) = 2 \left( \lambda \tau^0 + \frac{2}{3} \eta \right) \frac{U}{L} l^2 \alpha,$$

где

$$l^2 = \pi^2 n^2 (V/U) + \pi^2 m^2 (U/V).$$

Численное решение уравнений (2.13)–(2.15) показывает, что при определенных условиях зависимость возмущений от времени имеет колебательный характер. Аналитическое исследование условий возникновения колебаний легко провести в предположении, что период колебаний много меньше характерного времени развития основного течения  $L_0/|U|$ . Тогда в соответствии с идеями метода двухмасштабных разложений можно ввести «медленное» время  $t' = t|U|/L_0$  и «быстрое» время  $\vartheta = \Omega t$  ( $\Omega$  — частота колебаний,  $\Omega \gg |U|/L_0$ ), представляя производную по времени как сумму частных производных по переменным  $t'$  и  $\vartheta$ :

$$(2.16) \quad \frac{\partial}{\partial t} = \Omega \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{|U|}{L_0} \frac{\partial}{\partial t'}.$$

Амплитуды возмущений  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $S$  являются по предположению функциями только быстрого времени ( $\partial/\partial\zeta = \Omega\partial/\partial\theta$ ), в то время как величины  $L$ ,  $R$ ,  $\tau^0$  в соответствии с (1.1), (2.12) зависят только от медленного времени ( $L/L_0 = 1 \pm t'$ ,  $R/R_0 = 1 \pm (L_0/R_0)t'$ ,  $\tau^0 = \tau^0(L/L_0)$ ). Поэтому  $L$ ,  $R$ ,  $\tau^0$  можно рассматривать как постоянные по отношению к дифференцированию по  $\zeta$  (или  $\theta$ ), и система (2.13)–(2.15) сводится к одному уравнению для  $\alpha$  (уравнения для  $\beta$  и  $S$  имеют такой же вид):

$$(2.17) \quad \lambda \frac{d^3\alpha}{d\zeta^3} + \left(1 + \lambda \frac{U}{L}\right) \frac{d^2\alpha}{d\zeta^2} + \left[\frac{2Hl^2}{C} + \frac{3U}{L} + \lambda \left(\frac{Kl^2L_0^2}{CL^2} - \frac{4U^2}{L^2}\right)\right] \frac{d\alpha}{d\zeta} + \left[\frac{Kl^2L_0^2}{CL^2} + \frac{4HUl^2}{CL} + \frac{2U^2}{L^2} - \lambda \frac{2U}{L} \left(\frac{Kl^2L_0^2}{CL^2} + \frac{2U^2}{L^2}\right)\right] \alpha = 0,$$

где введено обозначение  $H = \lambda\tau^0 + 2\eta/3$ .

Рассмотрим сначала случай  $\lambda = 0$ , когда упругие эффекты проявляются только при объемных деформациях материала, а уравнение для  $\alpha$  приобретает вид

$$(2.18) \quad \frac{d^2\alpha}{d\zeta^2} + \left(\frac{4\eta l^2}{3C} + \frac{3U}{L}\right) \frac{d\alpha}{d\zeta} + \left(\frac{Kl^2L_0^2}{CL^2} + \frac{8\eta Ul^2}{3CL} + \frac{2U^2}{L^2}\right) \alpha = 0.$$

Решение уравнения (2.18) можно записать в форме

$$\alpha = ae^{-\delta\zeta} \cos(\Omega\zeta + \varphi),$$

где

$$\delta = 2\eta l^2/3C + 3U/2L,$$

$$(2.19) \quad \Omega^2 = \frac{Kl^2L_0^2}{CL^2} + \frac{2U^2}{L^2} + \frac{8\eta Ul^2}{3CL} - \frac{1}{4} \left(\frac{4\eta l^2}{3C} + \frac{3U}{L}\right)^2.$$

При  $\Omega^2 > 0$  зависимость величины возмущений от времени имеет характер колебаний. В случае растяжения образца ( $U > 0$ ) колебания всегда затухают ( $\delta > 0$ ), в то время как при сжатии ( $U < 0$ ) колебания могут оказаться нарастающими. Колебательное нарастание возмущений ( $\delta < 0$ ) начинается с момента, когда  $L$  становится меньше некоторого критического значения

$$L_* = 9|U|C/4\eta l^2.$$

Из (2.19) видно, что предположение о быстрой зависимости возмущений от времени ( $\Omega \gg |U|/L_0$ ), использованное при получении (2.17), (2.18), выполняется при достаточно больших  $K$ . Считая характерное время вязкого затухания  $C/\eta$  сравнимым по порядку величины с характерным временем основного течения  $L_0/|U|$ , при выполнении условия

$$(2.20) \quad K \gg CU^2/L_0^2$$

выражение (2.19) для частоты колебаний представим в виде

$$(2.21) \quad \Omega = (KL_0^2 l^2 / CL^2)^{1/2} [1 + O(\psi)],$$

где величина

$$(2.22) \quad \psi = CU^2/KL_0^2$$

определяет порядок малости отброшенных членов (в силу (2.20)  $\psi \ll 1$ ). Отношение периода колебаний  $2\pi/\Omega$  к характерному времени основного течения при больших  $K$  также порядка малости  $\psi$  (быстрые колебания).

Переходя к общему случаю  $\lambda \neq 0$ , будем рассматривать решения уравнения (2.17) также в пределе больших  $K$  ( $\psi \ll 1$ ). Сначала найдем корни характеристического полинома  $h_i$ , предполагая, что характерное время вязкого затухания, время релаксации и характерное время основного течения имеют одинаковый порядок величины. Тогда характеристический полином, соответствующий (2.17), может быть записан следующим образом:

$$(2.23) \quad \left(h \frac{L}{U}\right)^3 + a_1 \left(h \frac{L}{U}\right)^2 + a_2 [1 + O(\psi)] \left(h \frac{L}{U}\right) + a_3 [1 + O(\psi)] = 0,$$

$$\text{где } a_1 = \left(1 + \frac{L}{U\lambda}\right); a_2 = \frac{l^2}{c} \frac{KL_0^2}{U^2}; a_3 = \frac{l^2}{c} \frac{KL_0^2}{U^2} \left(\frac{L}{U\lambda} - 2\right).$$

Замечая, что  $a_1 \sim 1$ ,  $a_2 \sim 1/\psi$ ,  $a_3 \sim 1/\psi$ , выражение для пары комплексно-сопряженных корней полинома можно представить в виде

$$(2.24) \quad h_{1,2} = \frac{U}{L} \left\{ \left[ \frac{a_3 - \bar{a}_1 \bar{a}_2}{2a_2} + O(\psi) \right] \pm i \left[ \sqrt{a_2} + O(\psi) \right] \right\}.$$

После подстановки выражений для  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  приходим к формуле (с точностью до членов порядка малости  $\psi$ )

$$h_{1,2} = -3U/2L \pm i (KL^2 L_0^2 / CL^2)^{1/2}.$$

Здесь частота колебаний по-прежнему определяется (2.21), а нарастание колебаний имеет место только в случае сжатия образца при любых  $L$ .

Пороговые для нарастания колебаний явления могут наблюдаться и при  $\lambda \neq 0$ , если вязкость  $\eta$  достаточно велика, так что вязкие члены в (2.17) одного порядка величины с членами, содержащими  $K$ . Для этого при условии (2.20) и  $\lambda \sim L_0/|U|$  (при этом  $\tau^0 \sim \eta/\lambda$ , см. (2.12)) необходимо, чтобы

$$(2.25) \quad (C/\eta)/(L_0/|U|) \sim \psi$$

(время вязкого затухания много меньше характерного времени основного течения). При условиях (2.20), (2.25) характеристический полином снова имеет вид (2.23), где

$$a_1 = 1 + \frac{L}{U\lambda}, \quad a_2 = \frac{l^2}{c} \left( \frac{KL_0^2}{U^2} + \frac{2HL^2}{\lambda U^2} \right),$$

$$a_3 = \frac{l^2}{c} \left[ \frac{KL_0^2}{U^2} \left( \frac{L}{U\lambda} - 2 \right) + \frac{4HL^3}{\lambda U^2} \right].$$

Из формулы (2.24) после некоторых преобразований для пары комплексно-сопряженных корней получается выражение

$$(2.26) \quad h_{1,2} = \frac{-3\lambda KUL_0^2 + 2HL^3(U/L - 1/\lambda)}{2\lambda KL_0^2 L + 4HL^3} \pm i \left( \frac{KL^2 L_0^2}{CL^2} + \frac{2HL^2}{c\lambda} \right)^{1/2}.$$

Декремент в (2.26) может менять знак, т. е. при достаточно больших вязкостях нарастание колебаний, как и в случае  $\lambda = 0$ , происходит лишь после сжатия до некоторого критического размера  $L_*$ . Выражение для величины  $L_*$ , определяемой из условия обращения в нуль вещественной части (2.26), не удается выписать явно, поскольку  $L$  входит в (2.26) достаточно сложным образом через  $\tau^0$  (см. (2.12)). Соответствующее трансцендентное уравнение решается численно методом хорд.

Далее удобно перейти к безразмерным величинам. Будем использовать безразмерные параметры

$$(2.27) \quad W = \lambda|U|/L_0, \quad B = \eta/\rho_0 L_0|U|, \quad D = K/\rho_0 U^2$$

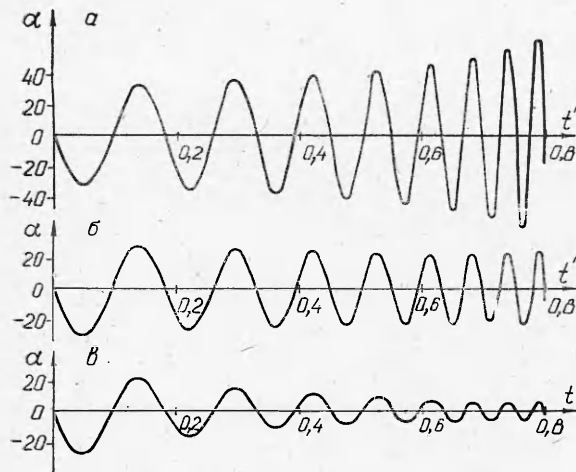
и величины

$$(2.28) \quad G = L/L_0, \quad \omega = \Omega L_0/|U|, \quad \Theta = \tau^0 L_0/\eta|U|.$$

Уравнение, определяющее пороговый размер  $L_*$  (или  $G_*$ ), и выражение для частоты колебаний на пороге запишутся при  $U < 0$  в виде (эти формулы получены из безразмерного выражения (2.26) при равной нулю вещественной части  $h$ )

$$(2.29) \quad 3D - 2BG_*^2(\Theta_* + 2/3W)(1 + G_*/W) = 0,$$

$$\omega_*^2 = l^2 [D/G_*^2 + 2B(\Theta_* + 2/3W)].$$



Ф и г. 3

Приведем также выражение для пары комплексно-сопряженных корней характеристического полинома (аналогичных (2.26)) в случае, когда в (1.6) используется нижняя конвективная производная (1.9):

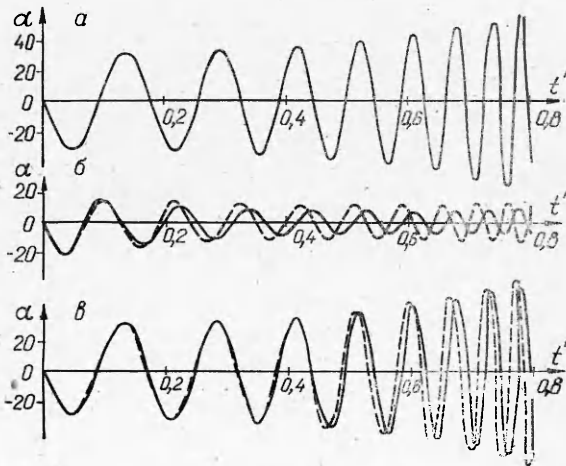
$$h_{1,2} = \frac{-3\lambda KUL_0^2 - 2HL^3(3U/L + 1/\lambda)}{2\lambda KL_0^2L + 4HL^3} \pm i \left( \frac{Kl^2L_0^2}{CL^3} + \frac{2Hl^2}{C\lambda} \right)^{1/2}.$$

Здесь  $H = -\lambda\tau^0 + 2\eta/3$ , а величина  $\tau^0$  вычисляется по формуле

$$(2.30) \quad \tau^0 = -\frac{2\eta}{3\lambda} \frac{1}{G^2 A^2} [(A - i)e^{A(i-G)} - (AG - i)], \quad A = \frac{L_0}{\lambda U}.$$

Проведенный выше анализ условий возбуждения колебаний основывался на уравнении (2.17), которое применимо для описания поведения возмущений лишь при высоких частотах колебаний, что соответствует достаточно большим  $D$  и  $B$  ( $K$  и  $\eta$ ). Исследование поведения возмущений при произвольных значениях параметров проводилось путем численного интегрирования уравнений (2.13)–(2.15) методом Рунге — Кутты четвертого порядка.

Результаты численного решения при больших  $D$  и  $B$  подтверждают описанные выше закономерности. Для значений параметров, при которых период колебаний сравним с характерным временем развития основного течения, численное решение показывает, что качественные выводы относящиеся к большим  $D$  и  $B$ , остаются в силе и в этой ситуации. Для примера на фиг. 3, 4 показана форма колебаний (зависимость величины  $\alpha$  от безразмерного времени  $t' = t|U|/L_0$ ) для некоторых значений параметров. Все графики на фиг. 3, 4 получены при  $U = V$ ,  $n = m = 1$ ,  $D = 50$  и одинаковых начальных условиях ( $\alpha = S = 0$ ,  $\beta = 1$ ). Штриховыми линиями показаны зависимости  $\alpha(t')$ , полученные с использованием в (1.6) нижней конвективной производной (1.9).



Ф и г. 4



Графики на фиг. 3, *a* — *e* иллюстрируют зависимость характера колебаний от величины вязкости  $B = 0,01; 0,1; 0,25$  соответственно при  $W = 0$ . Влияние величины  $W$  на форму колебаний обнаруживается из сравнения фиг. 3, *e* и фиг. 4, *a*, а также фиг. 4, *b* и фиг. 4, *e*. Как и при  $\omega \gg 1$  (см. фиг. 2), увеличение времени релаксации является дестабилизирующим фактором. На всех графиках заметно увеличение частоты колебаний с течением времени (с уменьшением  $L$ ), следующее из (2.24), (2.29). На фиг. 4, *a* — *e*  $W = 0,1; 0,1; 1; B = 0,25; 5; 5$  соответственно.

3. Исследование конечно-амплитудных колебаний, устанавливающихся в заповороговой области  $L < L_*$ , как и решение вопроса о характере возбуждения колебаний при  $L = L_*$ , должно проводиться на основе полных нелинейных уравнений (1.2)—(1.8). Решения этих уравнений естественно рассматривать в пределе больших частот, поскольку представление об установившихся колебательных режимах предполагает малость периода колебаний по сравнению с характерным временем основного течения. Этот предел достигается при выполнении условий

$$(3.1) \quad D \gg 1, \quad B \gg 1,$$

эквивалентных (2.20), (2.22), (2.25).

Уравнения (1.2)—(1.8) записываются в безразмерных переменных, отсчитываемых от соответствующих величин для основного течения

$$(3.2) \quad u'_1 = \frac{v_1 - v_1^0}{|U|}, \quad u'_2 = \frac{v_2 - v_2^0}{|V|}, \quad \Phi' = \frac{r - C}{C}, \quad T'_{ij} = \frac{v_{ij} - v_{ij}^0}{\eta |U|/L_0}, \\ E'_{ij} = e_{ij} - e_{ij}^0.$$

Для значений  $L$ , близких к пороговому, решения нелинейных уравнений ищутся в виде рядов по малому параметру  $\varepsilon$ , имеющему смысл амплитуды установившихся колебаний:

$$(3.3) \quad \Phi' = \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} + \dots, \quad u'_i = \varepsilon u_i^{(1)} + \varepsilon^2 u_i^{(2)} + \dots, \\ T'_{ij} = \varepsilon T_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 T_{ij}^{(2)} + \dots, \quad E'_{ij} = \varepsilon E_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 E_{ij}^{(2)} + \dots$$

Кроме (3.3), записывается формальное разложение

$$(3.4) \quad G = G_* + \varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_2 + \dots,$$

определяющее  $\varepsilon$ , и разложение для  $\omega$

$$(3.5) \quad \omega = \omega_* + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots,$$

определяющее нелинейный сдвиг частоты колебаний. Величина  $\Theta'$  (безразмерное  $\tau^0$ , см. (2.28)), входящая в уравнения, выражается через  $G$  с помощью (2.12) и поэтому также представляется в виде ряда по  $\varepsilon$ :

$$(3.6) \quad \Theta = \Theta_* + \varepsilon \Theta_1 + \varepsilon^2 \Theta_2 + \dots, \\ \Theta_1 = \left( \frac{d\Theta}{d\varepsilon} \right)_{G=G_*} = \left( \frac{d\Theta}{dG} \right)_* G_1, \quad \Theta_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2\Theta}{dG^2} \right)_* G_1^2 + \left( \frac{d\Theta}{dG} \right)_* G_2.$$

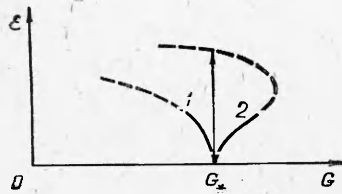
После подстановки разложений (3.3)—(3.6) в безразмерные уравнения (1.2)—(1.8) в каждом порядке по  $\varepsilon$  получается система линейных дифференциальных уравнений, которую можно записать в виде

$$(3.7) \quad NZ^{(k)} = f^{(k)},$$

где  $Z^{(k)}$  — вектор-столбец, составленный из величин  $\Phi^{(k)}$ ,  $u_i^{(k)}$ ,  $T_{ij}^{(k)}$ ,  $E_{ij}^{(k)}$ ;  $N$  — матричный дифференциальный оператор, соответствующий безразмерной однородной системе (2.2)—(2.10) при  $G = G_*$  и  $\omega = \omega_*$ . Правые части  $f^{(k)}$  выражаются через величины, вычисленные в предыдущих порядках по  $\varepsilon$ .

В первом порядке по  $\varepsilon$  система (3.7) однородна; условие периодичности ее решения приводит к соотношениям (2.29), определяющим величины  $G_*$  и  $\omega_*$ . Решение однородной системы имеет вид (2.11); для упроще-





Ф и г. 5

ния вычислений в следующих порядках по  $\varepsilon$  всюду полагается  $L_0 = R_0$ ,  $U = V$ ,  $n = m$ .

В следующих порядках по  $\varepsilon$  правые части (3.7) не равны нулю, и периодическое решение неоднородной системы существует лишь при условии ортогональности  $f^{(h)}$  решению сопряженной однородной системы. Это условие определяет постоянные  $G_k$ ,  $\omega_k$  в разложениях (3.4), (3.5). Уравнения второго приближения дают

$$(3.8) \quad G_1 = \omega_1 = 0;$$

из уравнений третьего приближения определяется величина

$$(3.9) \quad G_2 = \frac{\pi^2 n^2 \left[ 2G_*^2 B \left( \Theta_* + \frac{2}{3W} \right) - 3D \right] \left[ G_*^2 B \left( \Theta_* + \frac{2}{3W} \right) - 3D \right] \left( 1 + \frac{G_*}{W} \right)}{24 \left( \frac{3}{W} + \frac{4}{G_*} \right) \left( 4 + \frac{G_*}{W} \right) \left[ G_*^2 B \left( \frac{d\Theta}{dG} \right)_* - D \right]}$$

(поправка  $\omega_2$  в пределе (3.1) отсутствует).

Ограничиваясь в разложении (3.4) членами второго порядка по  $\varepsilon$ , можно на основе (3.8), (3.9) найти зависимость амплитуды стационарных колебаний  $\varepsilon$  от текущего размера образца

$$(3.10) \quad \varepsilon = \left( \frac{G - G_*}{G_2} \right)^{1/2} = \left( \frac{L - L_*}{L_0 G_2} \right)^{1/2}.$$

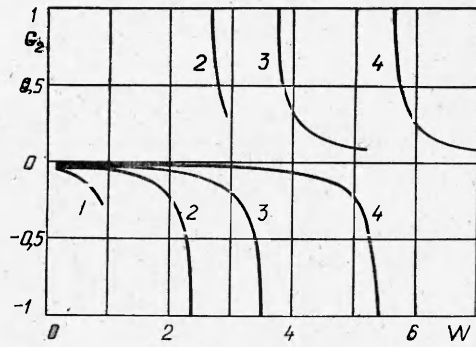
Анализ выражения (3.10) показывает, что характер возбуждения колебаний при достижении критического размера  $L_*$  зависит от знака  $G_2$ . При  $G_2 < 0$  величина  $\varepsilon$  вещественна в области  $L < L_*$ , т. е. амплитуда колебаний увеличивается, начиная с  $L = L_*$ , непрерывным образом (мягкое возбуждение колебаний, соответствующая зависимость  $\varepsilon(G)$  качественно иллюстрируется кривой 1 на фиг. 5). В противном случае при  $G_2 > 0$  колебания возбуждаются жестким образом — амплитуда колебаний при  $L = L_*$  скачком достигает конечной величины (кривая 2 на фиг. 5, сплошная линия соответствует участку, описываемому формулой (3.10)).

Величина  $G_2$ , определенная из (3.9), показана на фиг. 6 как функция числа Вейсенберга  $W$  при  $B/D = 1; 5; 10; 20$  — линии 1—4 (соответствующие значения  $G_*$  можно найти на фиг. 2). Как видно, при малых временах релаксации всегда имеет место мягкое возбуждение колебаний ( $G_2 < 0$ ), но при увеличении  $W$  величина  $G_2$  может менять знак.

Приведем еще выражение для величины  $G_2$ , полученное при использовании в (1.6) нижней конвективной производной (1.9):

$$G_2 = - \frac{3\pi^2 n^2 \left[ 2G_*^2 B \left( \frac{2}{3W} - \Theta_* \right) + D \right]}{16 \left[ G_*^2 B \left( \frac{d\Theta}{dG} \right)_* + D \right] \left( \frac{2}{W} - 8 \right)}$$

(величина  $\Theta$  здесь вычисляется через  $\tau^0$ , определенное формулой (2.30)). Анализ этого выражения показывает, что величина  $G_2$  всегда отрицательна, т. е. в этом случае колебания возбуждаются только мягким образом.



Ф и г. 6

## ЛИТЕРАТУРА

1. Petrie C. J. S., Denn M. M. Instabilities in polymer processing.— AICHE J., 1976, vol. 22, N 2.
2. Fisher R. J., Denn M. M. A theory of isothermal melt spinning and draw resonance.— AICHE J., 1976, vol. 22, N 2.
3. Ide Y., White J. L. Investigation of failure during elongational flow of polymer melts.— J. Non-Newton. Fluid Mech., 1977, vol. 2, N 3.
4. Hynn J. C. Theory of draw resonance. Pt I. Newtonian fluids. Pt II. Powerlaw and Maxwell fluids.— AICHE J., 1978, vol. 24, N 3.
5. Acierno D., La Mantia F. P. et al. Surface instabilities arising in drawing cylindrical specimens of low-density polyethylene melts.— J. Non-Newton. Fluid Mech., 1978, vol. 4, N 1—2.
6. White J. L., Ide Y. Instabilities and failure in elongational flow and melt spinning of fibers.— J. Appl. Polym. Sci., 1978, vol. 22, N 11.
7. Denn M. M. Continuous drawing of liquids to form fibers.— In: Annu. Rev. Fluid Mech. Vol. 12. N. Y., 1980.
8. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
9. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неьютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978.

УДК 539.374 : 539.382

### ДВУОСНАЯ НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ПОЛОСЫ В СХЕМЕ СЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

С. В. Сериков  
(Челябинск)

Известны решения [1—3], описывающие растяжение вязкопластической прямолинейной полосы из несжимаемого материала с линейным полем скоростей. В названных работах построение решения математической модели осуществлялось без учета инерционных членов в уравнениях движения несжимаемой среды. Если теперь повторить математические выкладки для известного линейного поля скоростей, то с учетом инерционных членов приходим к выводу, что ненулевого решения не существует. Неустановившееся растяжение прямолинейной полосы в схеме несжимаемой среды с внутренней прочностью с нулевым касательным напряжением и с линейным полем скоростей не есть решение уравнений движения с учетом инерционных членов. Отметим, что в случае растяжения полосы в схеме несжимаемой идеальной жидкости такое решение существует [4].

В данной работе определяется точное решение математической модели неустановившейся деформации прямолинейной полосы при растяжении последней с линейным полем скоростей и с нулевым касательным напряжением в схеме сжимаемой вязкопластической среды. Выводятся аналитические зависимости по оценке времени разрушения полосы. Отмечается существование пика пластичности по аналогии с работами [5, 6].

**1. Математическая модель.** Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{22}$ , составляющие вектора скорости  $v_1$ ,  $v_2$  по осям прямоугольных координат на плоскости  $x_1$ ,  $x_2$ , плотность непрерывной сжимаемой среды  $\rho$  определяются из решения следующих соотношений для произвольной замкнутой области:

уравнения движения среды вне поля внешних массовых сил

$$(1.1) \quad \partial \sigma_{ij} / \partial x_j = \rho (\partial v_i / \partial t + v_j \partial v_i / \partial x_j);$$

уравнения неразрывности

$$(1.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0,$$

где повторяющиеся индексы  $i, j = 1, 2$  предполагают суммирование;  $t \geq 0$  — время.

Соотношения вязкопластического сжимаемого тела, согласно сформулированным гипотезам в работе [1], до предположения о несжимаемости среды в плоском случае имеют вид