УДК 539.3

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЬЕЗОМОДУЛЯ ПРИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ СТЕРЖНЯ

А. О. Ватульян, А. Н. Соловьев*

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону
* Донской государственный технический университет, 344010 Ростов-на-Дону

Предлагается способ определения функции располяризации пьезокерамического стержня при задании амплитудно-частотной характеристики тока. Задача сведена к нелинейному интегральному уравнению, которое решается на основе сочетания методов линеаризации и регуляризации А. Н. Тихонова. Доказана единственность решения, проведена серия численных экспериментов по определению закона поляризации.

В последнее время в промышленности все шире внедряются устройства из пьезоматериалов с неоднородной поляризацией [1, 2]. При этом одной из главных проблем является определение зависимости изменения характеристик материала от координат, среди которых наибольшей изменяемостью обладают пьезохарактеристики, такие как пьезомодули.

В настоящей работе предлагается схема определения зависимости изменения пьезомодуля $d_{31}(x_1)$ в случае задания амплитудного значения тока от частоты колебаний в некотором диапазоне ее изменения. Задача сводится к нелинейному интегральному уравнению 1-го рода; решение строится на основе сочетания методов линеаризации и регуляризации А. Н. Тихонова.

1. Рассмотрим колебания пьезокерамического стержня, ориентированного вдоль оси Ox_1, имеющего электроды, расположенные на поверхностях, перпендикулярных оси x_3. Считаем, что его длина l много больше его толщины h и ширины b. Тогда задача будет одномерной и зависимостью компонент тензора напряжений σ_{ij} и вектора напряженности электрического поля E_i от координат x_2, x_3 можно пренебречь. Поскольку на поверхностях с электродами $E_1 = E_2 = 0$, то при $h/l \ll 1$ можно считать, что $E_1 = E_2 = 0$ всюду в объеме стержня. Из компонент тензора напряжений отлична от нуля лишь компонента σ_{11}. Кроме того, считаем, что из-за частичной располяризации стержня (например, в результате действий на пьезоэлемент неоднородного теплового поля с температурой выше точки Кюри конец $x_1 = l$ может быть вообще располяризован, т. е. $d_{31}(l)$ равен нулю) пьезомодуль d_{31} уже не постоянен, а представляет собой некоторую убывающую функцию координат $d_{31} = d_{31}(x_1)$. При этом также считаем, что упругий модуль и диэлектрическая проницаемость постоянны. В этом случае уравнения состояния [3] имеют вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = s_{11}^E \sigma_{11} + d_{31}(x_1) E_3, \qquad D_3 = d_{31}(x_1)\sigma_{11} + э_{33}^{\sigma} E_3 \tag{1.1}$$

(э — коэффициент диэлектрической проницаемости), а из уравнений электроупругости остается одно уравнение

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \tag{1.2}$$

так как уравнение $\mathrm{div} D = 0$ удовлетворяется тождественно.

Считая, что концы стержня $x_1 = 0,\, l$ свободны от механических напряжений, найдем связь между током $I(t) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_s D_3\,dx$ и напряженностью поля $E_3(x,t) = E(t)$.

Исключая перемещение $u_1(x_1,t)$ из (1.1), (1.2), получим краевую задачу

$$\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial t^2} + \rho d_{31}(x_1)\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \qquad \sigma_{11}\Big|_{x=0,l} = 0, \qquad \sigma_{11}\Big|_{t<0} = 0,$$
$$I(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\Big[\int_0^l d_{31}(x_1)\sigma_{11}(x_1,t)dx_1 + э_{33}^{\sigma}E(t)l\Big]b, \tag{1.3}$$

где $c^2 = 1/(\rho s_{11}^E)$.

Поставим обратную задачу об определении пьезомодуля $d_{31}(x_1)$ по заданию тока $I(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ либо по амплитудной его составляющей как функции частоты колебаний. Одним из наиболее распространенных способов решения таких задач в нестационарном случае является сведение к интегральному уравнению Вольтерра [4, 5].

Замечание. Постановка обратной задачи об определении функции по известному полю смещений на одном из концов стержня хорошо изучена [4, 5], однако на практике снятие амплитудно-частотной характеристики тока — гораздо более простой эксперимент, чем определение амплитудно-частотной характеристики смещений.

Получим разрешающее соотношение для определения $d_{31}(x_1)$ в случае установившихся колебаний стержня.

2. Рассмотрим простейший случай, когда возбуждение стержня гармоническое, т. е. $E(t) = E_0 e^{i\omega t}$, $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$. Найдем амплитуду тока I_0 и проводимость стержня Z:

$$\frac{1}{Z} = \frac{I_0}{E_0 h} = -iB_0\Omega R(\Omega); \tag{2.1}$$

$$R(\Omega) = 1 - \frac{k^2}{\sin\Omega}F(\Omega),$$

$$F(\Omega) = \Omega\int_0^1 f(y)\Big[\int_0^1 f(\eta)\sin(\Omega(\eta-1))\,d\eta\,\sin(\Omega y) - \int_0^y \sin(\Omega(\eta-y))f(\eta)\,d\eta\,\sin\Omega\Big]\,dy, \tag{2.2}$$

$$\Omega \in [\Omega_1, \Omega_2].$$

Здесь введены безразмерные величины и функции

$$\Omega = \frac{\omega l}{c}, \quad B_0 = \frac{э_{33}^{\sigma}bc}{h}, \quad k^2 = \frac{d_{31}^2(0)}{э_{33}^{\sigma}s_{11}^E}, \quad f(y) = \frac{d_{31}(x_1)}{d_{31}(0)}, \quad y = \frac{x_1}{l}.$$

Условие $R(\Omega) \to \infty$ определяет, как известно, частоты резонанса системы

$$\sin\Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_n = \pi n, \qquad \omega_n = \frac{\pi n}{l\sqrt{\rho s_{11}^E}}, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Отметим, что эти частоты не зависят от изменения $d_{31}(x_1)$ и располяризация не меняет резонансов системы.

Условие $R(\Omega) = 0$ определяет частоты антирезонанса системы, которые существенным образом зависят от $d_{31}(x_1)$. Уравнение для определения частот антирезонанса имеет вид

$$\sin\Omega - k^2\Omega\int_0^1 f(y)\Big[\int_0^1 \sin(\Omega(\eta-1))f(\eta)\,d\eta\,\sin(\Omega y) - \int_0^y \sin(\Omega(\eta-y))f(\eta)\,d\eta\,\sin\Omega\Big]\,dy = 0,$$

оно может служить для получения некоторой информации о функции $d_{31}(x_1)$.

Сформулируем обратную задачу об определении функции $f(y) \in U = L_2[0,1] \cap M[0,1]$ [6]. Здесь $L_2[0,1]$ — пространство суммируемых с квадратом на $[0,1]$ функций; $M[0,1]$ — пространство положительных монотонно убывающих на $[0,1]$ функций, что обусловлено физическими свойствами искомой функции $f(y)$.

Далее в качестве исходной информации считаем заданной функцию $F(\Omega) = F_*(\Omega)$ на отрезке $\Omega \in [\Omega_1, \Omega_2]$, которая выражается через амплитудную характеристику тока $\Omega R(\Omega)$ из соотношения (2.2).

Таким образом, поставленная обратная задача сводится к решению нелинейного интегрального уравнения относительно неизвестной функции $f(y) \in U$:

$$A(f) = \Omega \int_0^1 f(y) \Big[\int_0^1 f(\eta) \sin(\Omega(\eta - 1))\, d\eta \sin(\Omega y) - \\ - \int_0^y \sin(\Omega(\eta - y)) f(\eta)\, d\eta \sin\Omega \Big]\, dy = F_*(\Omega), \qquad \Omega \in [\Omega_1, \Omega_2]. \tag{2.3}$$

Исследуем вопрос о единственности решения интегрального уравнения (2.3). Покажем, что при некоторых ограничениях на отрезок $[\Omega_1, \Omega_2]$ его решение единственно в U. Предположим противное, т. е. что уравнение (2.3) имеет два тождественно неравных решения $f_1, f_2 \in U$. Далее в $L_2[0,1]$ представим оператор $A(f)$ в виде скалярного произведения $A(f) = (A_0 f, f)$, где A_0 — линейный оператор с симметричным ядром:

$$A_0(\Omega, y, \eta) = \Omega \begin{cases} \sin(\Omega(\eta - 1)) \sin(\Omega y), & y < \eta, \\ \sin(\Omega y) \sin(\Omega(y - 1)), & y > \eta. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $(A_0 f, f) \leqslant 0$, по крайней мере, при $0 < \Omega < \pi$, причем равенство нулю возможно лишь при $f = 0$. Используя это свойство, а также условие $(A_0 f_1, f_1) = (A_0 f_2, f_2)$, установим неравенства

$$(A_0(f_1 - f_2), f_1 - f_2) = 2(A_0 f_1, f_1 - f_2) \leqslant 0,$$
$$(A_0(f_1 - f_2), f_1 - f_2) = 2(A_0 f_2, f_2 - f_1) \leqslant 0.$$

Поскольку $A_0 f_1 > 0$, $A_0 f_2 > 0$ при $0 < \Omega < \pi$, из последних двух неравенств следует $f_1 - f_2 = 0$. Таким образом, единственность установлена.

3. Известно, что процедура решения нелинейного уравнения (2.3) является некорректной задачей [7], поэтому необходимо использовать регуляризующие алгоритмы. Построим решение (2.3) в два этапа на основе подхода, сочетающего основные идеи методов линеаризации и регуляризации А. Н. Тихонова.

На первом этапе строится решение уравнения (2.3) в классе линейных невозрастающих функций

$$f = f_0(y) = a_0 + a_1 y, \tag{3.1}$$

причем из физических соображений получаем следующие априорные ограничения на константы a_0 и a_1: $0 \leqslant a_0 \leqslant 1$, $a_1 \leqslant 0$, $a_0 + a_1 \geqslant 0$, которые определяют треугольник U_0 на плоскости (a_0, a_1).

Значения постоянных a_0, a_1 находятся из условия минимума неквадратичного функционала

$$\Phi = \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} |A(f_0) - F|^2\, d\Omega$$

на множестве априорных ограничений U_0.

Отметим, что в этом случае интегралы в выражении для оператора $A(f_0)$ легко вычисляются и $A(f_0) = F_0(\Omega)$, где $F_0(\Omega) = a_0^2\alpha_0(\Omega) + a_0a_1\alpha_1(\Omega) + a_1^2\alpha_2(\Omega)$ и введены следующие обозначения:

$$\alpha_0(\Omega) = -2\sin(\Omega/2)\Big(\frac{2\sin(\Omega/2)}{\Omega} - \cos(\Omega/2)\Big) = \alpha_1(\Omega), \qquad \alpha_2(\Omega) = -\frac{\sin\Omega}{\Omega^2} + \frac{1}{3}\sin\Omega + \frac{\cos\Omega}{\Omega}.$$

Таким образом, имеем задачу о нахождении минимума функции $\Phi(a_0, a_1)$ в области U_0, которая решается стандартным методом.

В соответствии с процедурой линеаризации [4] на втором этапе следующее приближение $f_1(y) = f(y) - f_0(y)$ находится по известной схеме Ньютона — Канторовича [8]

$$A(f) = A(f_0) + A'(f_0)f_1,$$

где производная оператора в смысле Гато находится из определения

$$A'(f_0)f_1 = \lim_{t\to 0}\frac{A(f_0 + tf_1) - A(f_0)}{t}$$

и равна

$$A'(f_0)f_1 = \Omega\Big[\int_0^1 f_0(y)\Big(\int_0^1 f_1(\eta)\sin(\Omega(\eta-1))\,d\eta\sin(\Omega y) - \int_0^y \sin(\Omega(\eta-y))f_1(\eta)\,d\eta\sin\Omega\Big)\,dy +$$

$$+\int_0^1 f_1(y)\Big(\int_0^1 f_0(\eta)\sin(\Omega(\eta-1))\,d\eta\sin(\Omega y) - \int_0^y \sin(\Omega(\eta-y))f_0(\eta)d\eta\sin\Omega\Big)\,dy\Big]. \qquad (3.2)$$

Для нахождения функции $f_1(y)$ получим линейное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$Kf_1 = \int_0^1 K(y,\Omega)f_1(y)\,dy = g_1(\Omega), \qquad \Omega \in [\Omega_1, \Omega_2], \qquad (3.3)$$

причем $g_1(\Omega) = F_*(\Omega) - A(f_0)$, а ядро $K(y,\Omega)$ вычисляется исходя из (3.2):

$$K(y,\Omega) = \Omega\Big[\sin(\Omega(y-1))\int_0^1 f_0(\eta)\sin(\Omega\eta)\,d\eta - \sin\Omega\int_y^1 \sin(\Omega(y-\eta))f_0(\eta)\,d\eta +$$

$$+\int_0^1 f_0(\eta)\sin(\Omega(\eta-1))\,d\eta\sin(\Omega y) - \int_0^y \sin(\Omega(\eta-y))f_0(\eta)\,d\eta\sin\Omega\Big]. \qquad (3.4)$$

Для линейной функции $f_0(y)$ (3.1) интегралы в (3.4) вычисляются, и после упрощения получим выражение для ядра

$$K(y,\Omega) = a_0[(1-\cos\Omega)(\sin(\Omega(y-1)) - \sin(\Omega y)) + \sin\Omega(2 - \cos(\Omega(y-1)) - \cos(\Omega y))] -$$

$$-a_1[\cos\Omega\sin(\Omega(y-1)) + \sin(\Omega y) - \sin\Omega(2y - \cos(\Omega(y-1)))], \qquad (3.5)$$

которое представляет собой гладкую функцию на $[0,1] \times [\Omega_1, \Omega_2]$. Заметим, что $K(0,\Omega) = K(1,\Omega) = 0$.

Итак, задача нахождения функции $f_1(y)$ свелась к проблеме решения линейного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с гладким ядром (3.4). Известно, что процедура обращения такого оператора представляет собой некорректную задачу [7] и требует регуляризации в той или иной форме.

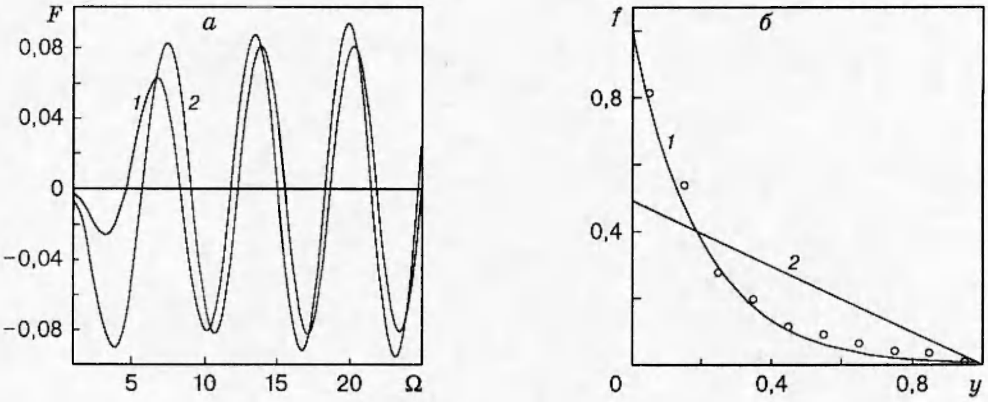

Рис. 1

4. При численном решении использовалась регуляризация интегрального уравнения (3.3) методом А. Н. Тихонова с помощью дискретизации краевой задачи для уравнения Эйлера и дальнейшего решения получающейся при этом системы линейных алгебраических уравнений [7]. Проведена серия численных экспериментов для различных видов функции $f(y)$. В статье рассматриваются три случая:

А. $f(y) = \exp(-\lambda y)$. (4.1)

Б. $f(y) = b_0 y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3$.

$$\text{В. } f(y) = \begin{cases} \delta_1, & 0 \leqslant y \leqslant x_1, \\ \dfrac{\delta_2 - \delta_2}{x_3 - x_1}(y - x_1) + \delta_1, & x_1 \leqslant y \leqslant x_3, \\ \delta_2, & x_3 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Для случая А на рис. 1,*а* для $\lambda = 5$ представлены зависимости входной характеристики $F_*(\Omega)$ (кривая *1*), вычисленной с использованием функции (4.1), и $F_0(\Omega)$ (кривая *2*), вычисленной для линейной функции $f_0(y)$ (3.1) при $a_0 = 0{,}4924$, $a_1 = -a_0$, которые доставляют наименьшее значение функционалу Φ в области U_0. На рис. 1,*б* изображены графики функций $f(y)$ и $f_0(y)$ (кривые *1* и *2*), а также $f_N(y) = f_0(y) + f_1(y)$ — точки. При решении интегрального уравнения (3.3) для нахождения $f_1(y)$ взято $N = 10$ точек коллокации. Отметим, что при увеличении N с 5 до 10 поправки не превышают 5 %, решение оказалось устойчиво относительно параметра регуляризации α в пределах $[10^{-5}; 0{,}01]$. В связи с замечанием о поведении ядра (3.5) на границе его области определения целесообразно выбирать точки коллокации, не выходящие на границу $y = 0; 1$, что и сделано в численных расчетах.

В случае Б на восстанавливаемой кривой существует точка перегиба. Функция $f(y)$ имеет максимум при $y = 0$ и минимум при $y = 1$. При этом $b_0 = 1{,}98$, $b_1 = -2,97$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$. Зависимости, аналогичные описанным выше, представлены на рис. 2. Найдено $a_0 = 1$, $a_1 = -0{,}9379$. Относительная погрешность при восстановлении формы $f(y)$ не превышала 3 % начиная с $N = 5$, $\alpha \in [10^{-5}; 0{,}01]$.

В случае В восстанавливаемая функция является кусочно-линейной. Численные расчеты показали, что погрешность в восстановлении увеличивается, когда угол наклона линейной части $f(y)$ при $y \in [x_1, x_3]$ приближается к $\pi/2$. На рис. 3 представлены аналогичные случаю А зависимости для $x_1 = 0{,}3$, $x_3 = 0{,}7$, $\delta_1 = 0{,}95$, $\delta_2 = 0{,}07$. Максимальная погрешность при этом составляет 10 %. Найдены $a_0 = 1$, $a_1 = 0{,}8966$. Расчеты проведены при $N = 10$ и параметре регуляризации $\alpha = 0{,}01$.

Отметим, что исследуемая в работе задача о восстановлении функции $f(y)$ при апри-

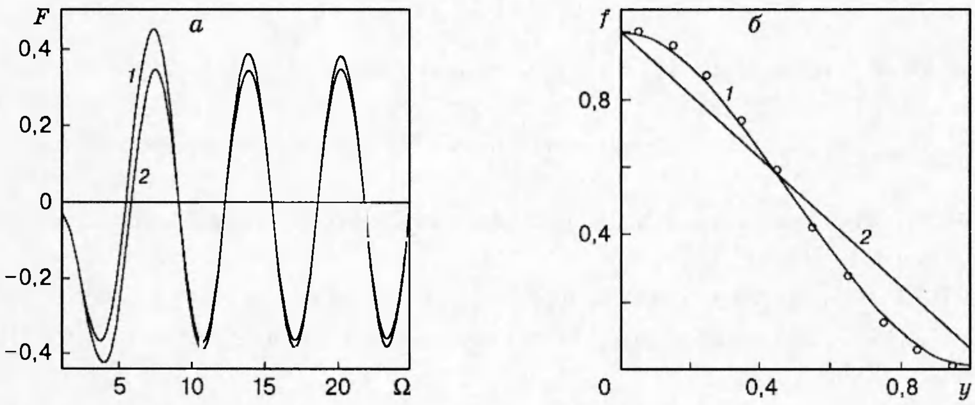

Рис. 2

орных физических данных о ее поведении может рассматриваться как некорректно поставленная задача на множестве специальной структуры и решаться алгоритмами, предложенными в [9]. В работе также предпринят подход, в котором нахождение функций $f_0(y)$ и $f_0(y) + f_1(y)$ рассматривается как нулевой и первый шаги итерационного процесса. При этом расчеты показали, что погрешность на втором шаге в случае B не превышает 5 % против 10 % для первого шага.

Как отмечалось выше, исходной информацией для восстановления пьезомодуля $d_{31}(x_1)$ является функция $F(\Omega)$, введенная согласно соотношениям (2.1), (2.2), которая может быть найдена в результате эксперимента (измерения проводимости образца в зависимости от частоты колебаний). В этой связи естественно проверить влияние погрешности измерений на устойчивость разработанного подхода.

С этой целью в случае A в функцию $F(\Omega)$ были внесены возмущения, и форма восстанавливалась по функции $F_2(\Omega)$, заданной соотношением

$$F_2(\Omega) = F(\Omega) + \varepsilon B H(\Omega) \quad \text{при} \quad \Omega \in [\Omega_1, \Omega_2],$$

где ε — некоторый параметр; B — характерное амплитудное значение функции $F(\Omega)$; $H(\Omega)$ — некоторая случайная функция, причем $|H(\Omega)| \leqslant 1$. Расчеты, проведенные для $\varepsilon = 0{,}1$, $H(\Omega) = \sin(10\Omega)$ при числе точек коллокации $N = 10$ и $\alpha = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$, показали, что погрешность приближения не больше 5 %, т. е. не превышает погрешность, внесенную в функцию $F_2(\Omega)$.

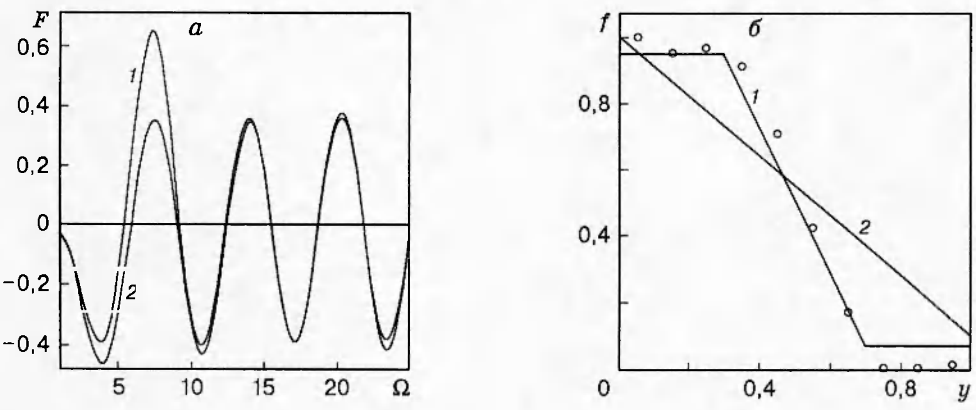

Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. **Домаркас В. И., Кажис Р. И.** Контрольно-измерительные пьезоэлектрические преобразователи. Вильнюс: Минтис, 1974.
2. **Кажис Р. И.** Ультразвуковые информационно-измерительные системы. Вильнюс: Мокслас, 1986.
3. **Партон В. З., Кудрявцев Б. А.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988.
4. **Романов В. Г.** Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
5. **Яхно В. Г.** Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990.
6. **Денисов А. М.** Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994.
7. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
8. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
9. **Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.** Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию 10/IV 1997 г.,
в окончательном варианте — 30/VI 1997 г.