ПМТФ, № 6, 1961

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РАВНОВЕСНЫХ ТРЕЩИН

И. А. Маркузон

(Москва)

Рассматривается задача об определении начальных напряжений в теле по развитию в нем хрупкой трещины под действием задаваемых нагрузок. Рассмотрение ведется в рамках общей схемы теории хрупких равновесных трещин, предложенной в работе [1].

При отсутствии начальных напряжений в теле размер равновесной трещины полностью определяется заданием внешних нагрузок, приложенных к телу. Однако, если в теле имеются внутренние напряжения, вызванные, например, различного рода технологическими и сборочными процессами, то размер равновесной трещины будет зависеть также и от этих напряжений. Под начальными напряжениями понимаются неизвестные заранее напряжения, имеющиеся в теле до приложения к нему системы нагрузок, поле напряжений от которых известно или может быть найдено обычными методами. Так, например, начальными напряжениями будут остаточные напряжения, образующиеся после сварки вблизи сварочного шва, напряжения, возникающие при прокатке, огневой резке и т. п. При этом рассматриваются лишь начальные напряжения первого рода, т. е. напряжения, уравновешивающиеся в пределах областей, сравнимых с размерами микротрещин (в отличие от напряжений, уравновешивающихся в пределах областей, сравнимых с размерами зерен).

Для нахождения начальных напряжений было предложено большое количество методов [2]. На практике применяются как механические, так и физические методы измерения начальных напряжений. Все механические методы связаны с полным или частичным разрушением испытываемой детали конструкции. В случае частичного разрушения измерения могут проводиться или на отделяемой части (метод трепанации), или же на оставшейся части конструкции. Физические методы измерения начальных напряжений (рентгенографический, оптический, магнитный и др.) обладают тем неоспоримым достоинством, что при использовании их деталь не разрушается. Однако применение этих методов ограничивается ввиду их сравнительной сложности.

Предлагаемый ниже метод определения начальных напряжений относится по существу к механическим методам. Однако этот метод не связан, вообще говоря, ни с полным разрушением испытываемой детали, ни с удалением из нее части материала.

Для того чтобы найти начальные напряжения в исследуемой области тела, создадим в этой области трещину (пропил) и будем следить за изменением размера трещины в зависимости от изменения прилагаемой к телу системы внешних сил. Поле напряжений, создаваемое заданной изменяющейся системой внешних сил, назовем управляемым полем. Если задаваемая нагрузка возрастает пропорционально некоторому параметру λ, то и интенсивность управляемого поля растет пропорционально этому параметру.

Задачу о нахождении поля начальных напряжений по изменению длины трещины в связи с изменением управляемого поля назовем обратной задачей теории трещин

§ 1. Решение обратной задачи для случая плоской пластинки. Рассмотрим бесконечную плоскую пластинку с полем внутренних (начальных) напряжений, вызванных какими-либо источниками (в качестве источников могут служить различного рода дефекты в материале, сварочные швы, а также, в частности, внешняя нагрузка). Предположим, далее, что поле этих начальных напряжений симметрично относительно некоторой прямой, которую примем за ось x. Найдем интенсивность нормальных напряжений $p_0(x)$, действующих по этой оси. С этой целью создадим дополнительно управляемое поле напряжений, вызывающее по оси x нормальное напряжения $Y_y = g(x)$ (эти напряжения предполагаются известными).

Будем изменять задаваемые внешние силы пропорционально параметру λ; при этом дополнительное (управляемое) поле напряжений будет также изменяться пропорционально этому параметру.

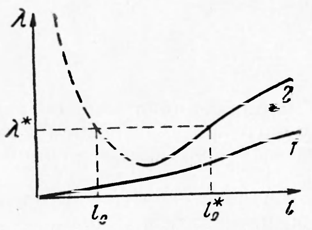
Таким образом, полная интенсивность разрывающих напряжений $p(x)$, действующих по оси абсцисс

$$p(x) = p_0(x) + \lambda g(x) \tag{1.1}$$

где $p_0(x)$ — функция, подлежащая определению.

Создадим теперь в окрестности начала координат вдоль оси абсцисс тонкую прямолинейную трещину (разрез). При изменении параметра λ длина трещины будет, вообще говоря, изменяться.

Как будет показано ниже, основным для решения обратной задачи является экспериментальное определение зависимости $\lambda(l)$ в интервале $0 \leqslant l \leqslant a$ (l — полудлина трещины, a — некоторое положительное число). Характер этой зависимости определяется не только существующим полем начальных напряжений, но и типом создаваемого управляемого поля. При этом возможны различные варианты:



Фиг. 1

1) при увеличении параметра λ развитие трещины происходит устойчиво, вне зависимости от длины первоначального разреза (кривая *1* на фиг. 1);

2) при увеличении параметра λ первоначальный разрез длиною $2l_0$ при $\lambda = \lambda^*$ скачком или без скачка (в зависимости от длины первоначального разреза) преобразуется в трещину некоторой длины $2l_0^* \geqslant 2l_0$; последующее развитие трещины происходит устойчиво (кривая *2* на фиг. 1);

3) развитие трещины происходит неустойчиво.

Возможны и несколько иные варианты поведения трещины при увеличении интенсивности управляемого поля.

Таким образом, экспериментальное определение зависимости $\lambda = \lambda(l)$ для требуемых значений l возможно лишь в случае 1) и практически невозможно для случая 3). В случае 2) экспериментальная зависимость $\lambda(l)$ может быть найдена лишь для $l \geqslant l_0^*$.

Один лишь выбор надлежащего управляемого поля не всегда может обеспечить устойчивое развитие трещины. Поэтому следует создать в пластинке дополнительное сжимающее поле, например постоянной интенсивности P_0. Приложение такого поля при любом характере начальных напряжений улучшит условия эксперимента.

Итак, будем считать, что экспериментальное определение зависимости $\lambda = \lambda(l)$ можно произвести для всех $l \geqslant l_0^*$, где l_0^*—полудлина трещины, с которой начинается ее устойчивое развитие. Для $0 \leqslant l < l_0^*$ экспериментальную зависимость $\lambda(l)$ найти нельзя. В связи с этим примем, что в указанном интервале зависимость $\lambda = \lambda(l)$ задается некоторым гипотетическим уравнением.

Переходим теперь к нахождению формул, определяющих интенсивность начальных напряжений. Как известно [1], для любого l полудлина равновесной трещины определяется из соотношения

$$\int_0^l \frac{p(x)\,dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{K}{\sqrt{2l}} \qquad (K \text{ — модуль сцепления}) \tag{1.2}$$

Воспользовавшись (1.1), перепишем это соотношение так:

$$\int_0^l \frac{p_0(x)\,dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{K}{\sqrt{2l}} - \lambda \int_0^l \frac{g(x)\,dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} \tag{1.3}$$

Соотношение (1.3) следует рассматривать как интегральное уравнение с неизвестной функцией $p_0(x)$. Зависимость величины λ от l считается известной, поскольку известна зависимость l от λ.

Решение уравнения (1.3), сводящегося к уравнению Абеля [3], имеет вид

$$p_0(x) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{l\Psi(l)\,dl}{\sqrt{x^2-l^2}} \qquad \left(\Psi(l) = \frac{K}{\sqrt{2l}} - \lambda(l)\int_0^l \frac{g(x)\,dx}{\sqrt{l^2-x^2}}\right) \tag{1.4}$$

Входящая в выражение для $\Psi(l)$ функция $\lambda(l)$, как это следует из вышеизложенного, должна быть определена экспериментально.

Решение уравнения (1.3) можно взять также и в несколько иной форме

$$p_0(x) = \frac{2x}{\pi}\int_0^x \frac{\Psi'(l)\,dl}{\sqrt{x^2-l^2}} + \Psi(0) \tag{1.5}$$

Если представить зависимость $\lambda(l)$ в виде суммы $\lambda(l) = \lambda_0(l) + \lambda_1(l)$, где $\lambda_0(l)$ соответствует случаю отсутствия начальных напряжений при том же управляемом поле и, следовательно,

$$\lambda_0(l)\int_0^l \frac{g(x)\,dx}{\sqrt{l^2-x^2}} = \frac{K}{\sqrt{2l}} \tag{1.6}$$

то

$$\Psi(l) = -\lambda_1(l)\int_0^l \frac{g(x)\,dx}{\sqrt{l^2-x^2}} \tag{1.7}$$

Таким образом, искомая интенсивность $p_0(x)$ начальных напряжений определяется при выбранном управляемом поле функцией

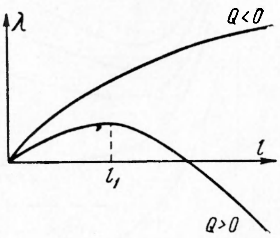
$$\lambda_1(l) = \lambda(l) - \lambda_0(l) = r(l)\,\lambda_0(l) \qquad (r(l) = \lambda / \lambda_0 - 1)$$

Здесь $r(l)$ — функция искажения начальным полем функции $\lambda_0(l)$. Нетрудно видеть, что

$$\Psi(l) = -\frac{K}{\sqrt{2l}}\,r(l) \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.4), получим

$$p_0(x) = -\frac{2}{\pi}\frac{K}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\sqrt{l}\,r(l)\,dl}{\sqrt{x^2-l^2}} \tag{1.9}$$



Фиг. 2

Как будет показано ниже, функция искажения $r(l)$ не зависит от выбора типа управляемого поля. Так, конечно, и должно быть, ибо интенсивность начальных напряжений согласно (1.9) зависит исключительно от вида зависимости $r = r(l)$. В связи с этим функцию $r(l)$ можно назвать определяющей функцией в обратной задаче.

§ 2. Случай постоянного поля начальных напряжений. Рассмотрим вначале простейший случай, когда поле начальных напряжений постоянно. Решение обратной задачи для этого простейшего случая, как будет показано, позволяет доопределить в случае необходимости выражение для функции $\lambda(l)$ в интервале $0 \leqslant l < l_0^*$. Кроме того, решение этой задачи представляет самостоятельный интерес.

Возьмем в качестве управляемого поле, возникающее от системы двух уравновешенных сил, расклинивающих трещину в начале координат. В этом случае теоретическая зависимость λ от l дается соотношением

$$\lambda = K\sqrt{2l} - Q\pi l \tag{2.1}$$

где Q — интенсивность поля начальных напряжений.

Соответствующие кривые для $Q \leqslant 0$ и $Q > 0$ показаны на фиг. 2. В случае растягивающего поля начальных напряжений ($Q > 0$) при указанном управляемом поле достаточно малая первоначальная трещина (разрез) будет сначала развиваться устойчиво вплоть до достижения некоторой критической длины l_1, зависящей от величины Q. Если же длина первоначального разреза более l_1, то приложение управляемого поля вызывает неустойчивое распространение трещины.

Если же поле начальных напряжений сжимающее ($Q \leqslant 0$), то при выбранном управляемом поле развитие трещины происходит устойчиво. Определяющая функция $r(l)$ имеет вид

$$r(l) = \frac{\lambda_1(l)}{\lambda_0(l)} = -\frac{Q\pi}{K\sqrt{2}}\sqrt{l} \qquad (2.2)$$

Возьмем теперь в качестве управляемого поле, образованное системой двух уравновешенных сил, находящихся друг от друга на расстоянии $2L$.

В этом случае

$$\frac{\lambda}{2L}\left[\frac{\alpha^2+(3+\nu)/2}{(\alpha^2+1)^{2/3}}\right]+\frac{\pi}{2}Q=\frac{K}{\sqrt{2l}} \qquad \left(\alpha=\frac{l}{L}\right) \qquad (2.3)$$

Легко видеть, что и при таком выборе управляемого поля определяющая функция $r(l)$ дается формулой (2.2).

Покажем теперь, что вообще определяющая функция не зависит от вида управляемого поля при данном (произвольном) поле начальных напряжений и найдем ее вид. Пусть напряжения $Y_y{}^\circ$ в точках оси x, вызываемые полем начальных напряжений, имеют вид $Y_y{}^\circ = p_0(x)$, а напряжения Y_y от управляемого поля $Y_y = \lambda g(x)$. Тогда соотношение, определяющее зависимость между λ и l, запишется следующим образом:

$$\int_0^l \frac{p_0(x)\,dx}{\sqrt{l^2-x^2}} + \lambda \int_0^l \frac{g(x)\,dx}{\sqrt{l^2-x^2}} = \frac{K}{\sqrt{2l}}$$

Отсюда

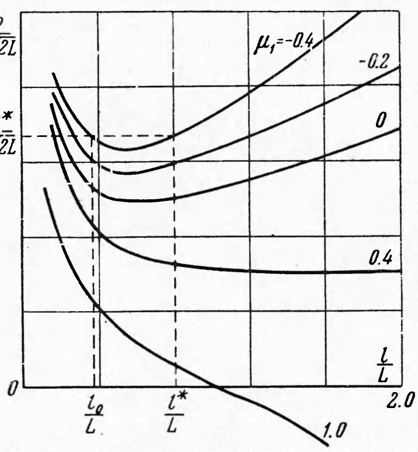
$$\lambda = \frac{K/\sqrt{2l}}{G(l)} - \frac{P_0(l)}{G(l)} = \lambda_0 + \lambda_1$$

где

$$G(l) = \int_0^l \frac{g(x)\,dx}{\sqrt{l^2-x^2}}, \quad P_0(l) = \int_0^l \frac{p_0(x)\,dx}{\sqrt{l^2-x^2}}$$

Таким образом,

$$r(l) = -P_0(l)\frac{\sqrt{2l}}{K}$$



Фиг. 3

После этих предварительных замечаний перейдем к решению обратной задачи в предположении, что в пластинке существуют начальные напряжения постоянной интенсивности. В данном случае для решения задачи достаточно из эксперимента получить лишь одну точку кривой $\lambda = \lambda(l)$. Действительно, выберем в качестве управляемого поле напряжений, возникающее от рассмотренной в этом параграфе системы двух сил. Имеем

$$\frac{P}{K\sqrt{2L}} = \frac{(1+\alpha^2)^{3/2}}{\sqrt{\alpha}\,(\alpha^2+(3+\nu)/2]}(1-\mu_1\sqrt{\alpha}) \qquad \left(\alpha=\frac{l}{L},\ \mu_1=\frac{\pi\sqrt{L}}{K\sqrt{2}}Q\right) \qquad (2.4)$$

На фиг. 3 построены кривые, показывающие зависимость между величиной задаваемой силы P и длиной равновесной трещины $2l$ для различных значений параметра μ_1 и, следовательно, для различных Q.

Для нахождения неизвестной интенсивности Q создадим в пластинке тонкую прямолинейную трещину (разрез) некоторой длины $2l_0$. Пусть при увеличении интенсивности управляемого поля длина первоначального разреза не будет изменяться до тех пор, пока величина силы P не достигнет значения P^*. Пусть, далее, при дальнейшем увеличении величины силы P (или, что то же, значения λ) трещина начнет распространяться, перейдя скачком в область устойчивости. (Распространение трещины может начаться и без скачка — это зависит от длины первоначального разреза). По полученной длине l^* (или по величине силы, при которой началось развитие трещины) можно найти кривую, отвечающую рассматриваемому процессу, и, следовательно, искомую величину интенсивности поля начальных напряжений.

В частности, если разрывающие силы находятся на самой поверхности трещины ($L = 0$), то теоретическая зависимость между l, Q и P принимает более простой вид:

$$\frac{P}{K\sqrt{2}} = \sqrt{l}\,\left(1 - \frac{Q\pi}{K\sqrt{2}}\sqrt{l}\right) \tag{2.5}$$

Аналогично вышесказанному из эксперимента легко определяется отвечающая данному процессу кривая и, следовательно, значение искомой интенсивности поля начальных напряжений.

§ 3. Общий случай. Предположим теперь, что интенсивность начальных напряжений по оси x не является постоянной. Путем приложения дополнительного поля сжимающих напряжений известной интенсивности и использования подходящего управляемого поля можно добиться устойчивого развития трещины. Таким образом, создав первоначальный разрез длиной $2l_0$ и увеличивая параметр λ, можно найти экспериментальную зависимость $\lambda = \lambda(l)$ для всех $l \geqslant l^* \geqslant 0$. Однако для $l < l^*$ вид этой зависимости, а следовательно, и вид определяющей функции остается неизвестным. Между тем определяющая функция входит в формулу (1.9), дающую решение обратной задачи, причем эта функция должна быть известна и в интервале $0 \leqslant l < l^*$.

В связи с этим введем предположение, что на участке $0 \leqslant l \leqslant l^*$ определяющая функция имеет вид

$$r(l) = -\frac{Q\pi}{K\sqrt{2}}\sqrt{l} = A\sqrt{l} \tag{3.1}$$

(т. е. соответствует случаю постоянного поля интенсивности Q).

Величина A определяется по точке экспериментальной кривой, отвечающей началу распространения трещины на устойчивом участке. Пусть, например, определяющая функция для $l \geqslant l^*$ дается формулой (полученной из эксперимента) $r = r_1(l)$. Тогда

$$A\sqrt{l^*} = r_1(l^*), \qquad A = r_1(l^*)/\sqrt{l^*}$$

Таким образом,

$$r(l) = \begin{cases} A\sqrt{l} & (l \leqslant l^*) \\ r_1(l) \equiv r_2(l) + A\sqrt{l} & (l \geqslant l^*) \end{cases} \tag{3.2}$$

Искомая интенсивность поля начальных напряжений (вместе с налагаемым сжимающим полем) находится по формуле

$$p_0(x) = Q - \frac{\sqrt{2}K}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{l^*}^{x}\frac{\sqrt{l}\,r_2(l)\,dl}{\sqrt{x^2 - l^2}} \tag{3.3}$$

§ 4. Осесимметричный случай. Для случая осесимметричной задачи соотношение, определяющее радиус R круглой равновесной трещины, имеет вид [1]

$$\int_0^R \frac{rp(r)\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{K\sqrt{R}}{\sqrt{2}} \tag{4.1}$$

Соответствующее интегральное уравнение, определяющее закон распределения неизвестных начальных напряжений в точках плоскости расположения трещины, имеет вид

$$\int_0^R \frac{rp_0(r)\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{K\sqrt{R}}{\sqrt{2}} - \lambda\int_0^R \frac{rg(r)\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}} \tag{4.2}$$

Здесь $g(r)$ — интенсивность напряжений управляемого поля в плоскости трещины, $p_0(r)$ — интенсивность искомых начальных напряжений, $\lambda = \lambda(R)$ — функция, определяющая зависимость между радиусом трещины и параметром возрастания нагрузки.

Решение этого уравнения можно взять в одной из следующих форм

$$p_0(r) = \frac{2}{\pi r}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{R\Psi(R)\,dR}{\sqrt{r^2-R^2}} \tag{4.3}$$

или

$$p_0(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{\Psi'(R)\,dR}{\sqrt{r^2-R^2}} \tag{4.4}$$

Здесь

$$\Psi(R) = \frac{K\sqrt{R}}{\sqrt{2}} - \lambda(R)\int_0^R \frac{rg(r)\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = -\lambda_1(R)\int_0^R \frac{rg(r)\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}} \tag{4.5}$$

где

$$\lambda_1(R) = \lambda(R) - \lambda_0(R)$$

Через $\lambda_0(R)$ обозначена функция, соответствующая случаю отсутствия начальных напряжений. Интенсивность начальных напряжений может быть выражена через определяющую функцию $s(R) = \lambda_1/\lambda_0$.

Действительно,

$$\Psi(R) = -\frac{K\sqrt{R}}{\sqrt{2}}s(R) \tag{4.6}$$

и поэтому

$$p_0(r) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{K}{r}\frac{d}{dr}\int_0^r \frac{R\sqrt{R}s(R)\,dR}{\sqrt{r^2-R^2}} \tag{4.7}$$

Совершенно аналогично § 2 можно показать, что в случае поля начальных напряжений постоянной интенсивности Q при любом управляемом поле определяющая функция

$$s(R) = -\frac{Q\sqrt{2}}{K}\sqrt{R} \tag{4.8}$$

Автор пользуется случаем, чтобы выразить свою глубокую признательность Г. И. Баренблатту за постановку задачи и помощь, оказанную при выполнении настоящей работы.

Поступила 4 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком изломе. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3—5.
2. Остаточные напряжения в металлах и металлических конструкциях. Сб. статей под ред. В. Р. Осгуда. ИИЛ, 1957.
3. Привалов И. И. Интегральные уравнения. ОНТИ, 1935.