

МОДЕЛЬ ДЛИННОВОЛНОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ СДВИГОВОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

В. М. Тешуков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Выведена приближенная интегродифференциальная система уравнений, описывающая нестационарные течения вязкого нетеплопроводного газа в узком канале переменного сечения. Найдены обобщенные характеристики системы уравнений, получены условия ее гиперболичности. В связи с теорией характеристик введены понятие среднего числа Маха и условие критичности потока. Исследованы точные решения, описывающие стационарные трансзвуковые течения в канале.

Рассматриваются плоскопараллельные и осесимметричные неустановившиеся течения вязкого нетеплопроводного газа в удлиненном канале переменного сечения. Предполагается, что параметры потока на входе в канал имеют неравномерные распределения по сечению. Построена математическая модель длинноволнового приближения, обобщающая известные уравнения канального приближения [1, 2] на случай неоднородных потоков. На основе методов, развитых в [3, 4], исследованы характеристические свойства интегродифференциальных уравнений, определяющих эволюцию течения, получены условия гиперболичности. Построен класс стационарных решений, описывающих неоднородные трансзвуковые потоки в канале переменного сечения, найдены точные решения, моделирующие отрыв потока от стенки и образование зоны возвратного течения.

Стационарные течения политропного газа в каналах переменного сечения, а также изоэнтропические течения изучались в [5, 6] в рамках аналогичного приближения. В данной работе при анализе стационарных решений с критическим слоем используются некоторые методы анализа течений, развитые в [5].

1. Модель длинноволнового приближения. Рассмотрим плоскопараллельное нестационарное течение вязкого нетеплопроводного газа в удлиненном канале переменного сечения. Пусть X, Y — декартовы координаты на плоскости, T — время, уравнения $Y = 0$ и $Y = H_0 A(X L_0^{-1})$ задают нижнюю и верхнюю стенки канала (H_0 — характерная ширина канала, L_0 — характерная длина). В дальнейшем будем предполагать, что $\epsilon = H_0 L_0^{-1} \ll 1$.

Введем безразмерные независимые и зависимые переменные:

$$x = L_0^{-1} X, \quad y = H_0^{-1} Y, \quad t = L_0^{-1} U_0 T, \quad (1.1a)$$

$$u = U_0^{-1} U, \quad v = H_0^{-1} L_0 U_0^{-1} V, \quad \rho = R_0^{-1} R, \quad p = R_0^{-1} U_0^{-2} P.$$

Здесь R_0, U_0 — характерные плотность и горизонтальная скорость; U, V, R, P — размерные компоненты вектора скорости, плотности и давления; малыми буквами обозначены соответствующие безразмерные величины. Уравнения газовой динамики представим в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + \rho^{-1} p_x &= 0, & \rho_t + (u\rho)_x + (v\rho)_y &= 0, \\ \epsilon^2(v_t + uv_x + vv_y) + \rho^{-1} p_y &= 0, & S_t + uS_x + vS_y &= 0, & \rho &= \rho(p, S). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Последнее равенство задает уравнение состояния газа (S — энтропия).

Уравнения длинноволновой аппроксимации возникают при предельном переходе $\varepsilon \rightarrow 0$ в (1.1). В пределе закон сохранения вертикального импульса дает равенство $p_y = 0$, а тогда $p = p(x, t)$. Это равенство выражает тот факт, что распределение давления поперек канала выравнивается существенно быстрее, чем аналогичное распределение вдоль канала (ввиду существенного различия геометрических масштабов). В приближенном описании выравнивание поперечного распределения давления происходит мгновенно. При этом распределения энтропии и плотности газа в поперечном направлении не обязательно равномерны. Ясно, что такое приближение годится в случае плавных распределений, а моделирование течений с зонами резких градиентов и скачков параметров требует отдельного рассмотрения. Интегрированием уравнения неразрывности можно определить

$$v = -(\rho(p, S))^{-1} \int_0^y ((\rho(p, S))_t + (u\rho(p, S))_x) dy \quad (1.2)$$

(использовано граничное условие $v = 0$ при $y = 0$).

Граничное условие на верхней стенке канала $v - A'(x)u = 0$ с учетом (1.2) записывается в виде

$$\left(\int_0^{A(x)} \rho(p, S) dy \right)_t + \left(\int_0^{A(x)} u\rho(p, S) dy \right)_x = 0. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2), (1.3) вместе с уравнениями

$$u_t + uu_x + vv_y + (\rho(p, S))^{-1} p_x = 0, \quad S_t + uS_x + vS_y = 0 \quad (1.4)$$

образуют замкнутую систему для определения $u(x, y, t)$, $S(x, y, t)$, $p(x, t)$, $v(x, y, t)$.

Для дальнейшего систему уравнений (1.1) удобно преобразовать к эйлерово-лагранжевым координатам x' , t' , λ ($\lambda \in [0, 1]$), переход к которым осуществляется с помощью соотношений

$$x = x', \quad t = t', \quad y = \Phi(x', \lambda, t'), \quad \Phi_t + u(x, \Phi, t)\Phi_x = v(x, \Phi, t), \quad \Phi(x, \lambda, 0) = \Phi_0(x, \lambda).$$

Решение приведенной здесь задачи Коши определяет эволюцию семейства контактных характеристик системы уравнений (1.1), каждая из которых определена уравнением $y = \Phi(x, \lambda, t)$ и условием постоянства лагранжевой переменной λ . Соотношение $y = \Phi_0(x, \lambda)$ задает начальное положение контактной характеристики $\lambda = \text{const}$. Функция $\Phi_0(x, \lambda)$ выбирается так, что $\Phi_0(x, 0) = 0$, $\Phi_0(x, 1) = A(x)$ (можно, в частности, положить $\Phi_0(x, \lambda) = \lambda A(x)$). В новых переменных (штрих в обозначениях далее опускаем) уравнения газовой динамики имеют вид

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_x) + p_x - \Phi_x(\Phi_\lambda^{-1})p_\lambda &= 0, & H_t + (uH)_x &= 0, \\ \varepsilon^2 \rho(v_t + uv_x) + \Phi_\lambda^{-1}p_\lambda &= 0, & S_t + uS_x &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь введена новая искомая функция $H = \rho\Phi_\lambda$. Граничные условия на стенках канала эквивалентны соотношениям

$$\Phi(x, 0, t) = 0, \quad \int_0^1 (\rho(p, S))^{-1} H d\lambda = \int_0^1 \Phi_\lambda d\lambda = A(x). \quad (1.6)$$

Система соотношений (1.5), (1.6), дополненная уравнением

$$\Phi_t + u\Phi_x = v, \quad (1.7)$$

определяет точную модель газового течения в канале. В модели длинноволнового приближения $p_\lambda = 0$, т. е. $p = p(x, t)$. Уравнения (1.5) при $\varepsilon = 0$ сводятся к следующей интегродифференциальной системе:

$$u_t + uu_x + (\rho\sigma)^{-1} \left[\int_0^1 \frac{\bar{H}_x}{\rho} d\lambda - \int_0^1 \frac{\bar{H}\rho S}{\rho^2} S_x d\lambda - A'(x) \right] = 0, \quad H_t + (uH)_x = 0, \quad S_t + uS_x = 0 \quad (1.8)$$

$$\left(\rho_p = \frac{\partial}{\partial p} \rho(p, S) = c^{-2}, \quad \rho_S = \frac{\partial}{\partial S} \rho(p, S), \quad \sigma = \int_0^1 \frac{H\rho_p}{\rho^2} d\lambda = \int_0^1 \frac{H}{\rho^2 c^2} d\lambda \right).$$

Здесь c — скорость звука.

Уравнения (1.8) образуют замкнутую систему для определения функций $u(x, \lambda, t)$, $H(x, \lambda, t)$, $S(x, \lambda, t)$, при этом нелокальная зависимость p от H и S определена в (1.6). Если решение системы уравнений (1.8) найдено, то вертикальная компонента вектора скорости определяется из (1.7), а $\Phi(x, \lambda, t)$ задается уравнением

$$\Phi = \int_0^\lambda (\rho(p, S))^{-1} H d\lambda.$$

Для политропного газа ($\rho = p^{1/\gamma} b(S)$) уравнение (1.6) явно разрешается относительно p :

$$p = (A(x))^{-\gamma} \left(\int_0^1 (b(S))^{-1} H d\lambda \right)^\gamma.$$

Отметим, что для класса частных решений, характеризуемых равенствами $u_\lambda = 0$, $S_\lambda = 0$, $H_\lambda = 0$, система уравнений (1.8) сводится к известным уравнениям каналового приближения:

$$\rho(u_t + uu_x) + p_x = 0, \quad (\rho A)_t + (u\rho A)_x = 0, \quad S_t + uS_x = 0. \quad (1.9)$$

При этом $y = \Phi = \lambda A(x)$. Следовательно, система уравнений (1.8) (либо (1.2)–(1.4)) является обобщением известной модели каналового приближения на случай неоднородных по сечению канала потоков.

Ненулевая компонента вихря вектора скорости при выбранных масштабах представляется в виде $\omega = V_X - U_Y = U_0 H_0^{-1} (\varepsilon^2 v_x - u_y)$.

В приближенной теории $\omega = -U_0 H_0^{-1} u_y$, поэтому течения со скоростью u , не зависящей от λ , безвихревые ($u_y = u_\lambda (\Phi_\lambda)^{-1} = 0$), а общие течения, описываемые уравнениями (1.8), вихревые.

2. Гиперболичность основной системы уравнений. Система уравнений (1.8) описывает процессы, характеризуемые конечной скоростью распространения возмущений вдоль оси канала. Эта скорость определяется специальными интегральными соотношениями, учитывающими в среднем неравномерность потока. Точное описание процессов распространения возмущений возникает на основе определений характеристик системы уравнений с операторными коэффициентами, сформулированных в [3].

Представим уравнения (1.8) в виде

$$U_t + B(U_x) = f, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{U}(x, \lambda, t) = (u, H, S)^T$; действие оператора B на гладкую функцию $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ ($(\dots)^T$ обозначает транспонирование) определено формулой

$$B\langle\varphi\rangle = \begin{pmatrix} u\varphi_1 + (\rho\sigma)^{-1} \left(\int_0^1 \frac{\varphi_2}{\rho} d\nu - \int_0^1 \frac{H\rho S}{\rho^2} \varphi_3 d\nu \right) \\ H\varphi_1 + u\varphi_2 \\ u\varphi_3 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Согласно [3, 4], дифференциальное уравнение $dx/dt = k(x, t)$ определяет характеристическую кривую $x = x(t)$ системы (1.8), если задача на собственные значения

$$(\mathbf{F}, B\langle\varphi\rangle) = k(\mathbf{F}, \varphi) \quad (2.3)$$

имеет нетривиальное решение. Здесь k — собственное значение; $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ — искомый собственный вектор-функционал; (\mathbf{F}, φ) — результат действия функционала \mathbf{F} на гладкую пробную функцию φ (\mathbf{F} рассматривается как линейный функционал, действующий на функции переменной λ ; при этом величины, входящие в (2.3), зависят от x, t параметрически). Соотношение

$$(\mathbf{F}, \mathbf{U}_t + B\langle\mathbf{U}_x\rangle) = (\mathbf{F}, \mathbf{U}_t + k\mathbf{U}_x) = (\mathbf{F}, \mathbf{f}) \quad (2.4)$$

называется соотношением на характеристике (в (2.4) вектор \mathbf{U} дифференцируется только по направлению $dx/dt = k$ в плоскости переменных x, t). Система уравнений (2.1) будет гиперболической системой уравнений, если все k^α , удовлетворяющие (2.3), действительны, а совокупность соответствующих собственных функционалов $\{\mathbf{F}^\alpha\}$ полна в следующем смысле: при определенной гладкости функции φ из равенств $(\mathbf{F}^\alpha, \varphi) = 0$ следует, что $\varphi = 0$. Тогда соотношения на характеристиках (2.4) эквивалентны исходной системе уравнений (2.1).

Получим условия гиперболичности системы уравнений (1.8) в случае, когда u является монотонной функцией от λ ($u_\lambda \neq 0$). В силу независимости пробных функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ уравнение (2.3) эквивалентно следующим:

$$(F_1, (u - k)\varphi_1) + (F_2, H\varphi_1) = 0, \quad (F_2, (u - k)\varphi_2) + \sigma^{-1} \int_0^1 \varphi_2 \rho^{-1} d\nu (F_1, \rho^{-1}) = 0, \quad (2.5)$$

$$(F_3, (u - k)\varphi_3) - \sigma^{-1} \int_0^1 \rho S \rho^{-2} H \varphi_3 d\nu (F_1, \rho^{-1}) = 0.$$

Согласно (2.5), действие функционала F_2 на пробную функцию ψ определяется однозначно, если известен функционал F_1 :

$$(F_2, \psi) = -(F_1, (u - k)H^{-1}\psi) \quad (2.6)$$

(ψ — пробная функция, $H \neq 0$). Функционал F_1 , как следует из (2.5), (2.6), должен удовлетворять уравнению

$$(F_1, (u - k)^2 H^{-1}\varphi_2) - \sigma^{-1} \int_0^1 \varphi_2 \rho^{-1} d\nu (F_1, \rho^{-1}) = 0. \quad (2.7)$$

Для $k \neq u(x, \lambda, t)$, $\lambda \in [0, 1]$ действие функционала F_1 на пробную функцию ψ можно определить следующим образом:

$$(F_1, \psi) = \sigma^{-1} \int_0^1 H \rho^{-1} (u - k)^{-2} \psi d\nu (F_1, \rho^{-1}). \quad (2.8)$$

Полагая $\psi = \rho^{-1}$, получим условие существования нетривиального решения уравнения (2.8) — уравнение для определения характеристической скорости k :

$$\chi(k) = \int_0^1 \frac{H}{\rho^2 c^2} d\nu - \int_0^1 \frac{H}{\rho^2 (u - k)^2} d\nu = 0. \quad (2.9)$$

В результате каждому корню k_i уравнения (2.9) соответствует собственный функционал F_1^i , его действие на произвольную функцию ψ определяется формулой (2.8) при $(F_1^i, \rho^{-1}) = 1$ (это равенство вытекает из (2.9)). Анализ характеристического уравнения (2.9) показывает, что на действительной оси всегда имеются два корня: $k = k_1 > \max_{\lambda} u(x, \lambda, t) = u_1$, $k = k_2 < \min_{\lambda} u(x, \lambda, t) = u_0$. Действительно, $\chi'(k) \neq 0$ при $k > u_1$ и $k < u_0$, $\chi(\pm\infty) > 0$, $\chi(k) \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow u_0$ и $k \rightarrow u_1$ (при гладких зависимостях H , ρ , u от λ). Если же функции H , ρ , u , c не зависят от λ , то (2.9) переходит в обычное уравнение звуковых характеристик системы (1.9). Поэтому характеристики, соответствующие корням k_1 , k_2 , являются аналогами звуковых характеристик. В общем случае корни уравнения (2.9) могут быть комплексными. Для формулировки условий, гарантирующих отсутствие комплексных корней на данном решении u , H , S , рассмотрим аналитическое продолжение функции χ в комплексную плоскость. Рассуждения, полностью аналогичные приведенным в работе [4], дают следующий результат. Уравнение (2.9) имеет только действительные корни ($k = k_1$, $k = k_2$), если

$$\chi^+(u) \neq 0, \quad \Delta \arg \chi^+(u) / \chi^-(u) = 0. \quad (2.10)$$

Здесь $\chi^{\pm}(u)$ — предельные значения аналитической функции $\chi(z)$ на отрезке $[u_0, u_1]$ из верхней и нижней полуплоскости; $\Delta \arg f$ — приращение аргумента комплекснозначной функции f на указанном отрезке. Определив первую компоненту F_1^i собственного вектор-функционала, соответствующего характеристическому корню k_i , зададим вторую компоненту F_2^i формулой (2.6), а F_3^i — формулой

$$(F_3^i, \psi) = \sigma^{-1} \int_0^1 \rho S \rho^{-2} \frac{H \psi}{u - k_i} d\nu$$

(см. (2.5)).

Анализ показывает, что нетривиальные решения уравнения (2.7) в классе обобщенных функций можно найти для бесконечного набора собственных значений $k^\lambda = u(x, \lambda, t)$, $\lambda \in (0, 1)$ (непрерывный спектр характеристических скоростей). Пусть $\delta(\nu - \lambda)$ — обобщенная дельта-функция Дирака, $\delta'(\nu - \lambda)$ — ее производная. Действие этих функционалов на произвольную функцию φ определяется стандартными формулами:

$$(\delta(\nu - \lambda), \varphi(\nu)) = \varphi(\lambda), \quad (\delta'(\nu - \lambda), \varphi(\nu)) = -\varphi'(\lambda).$$

Уравнение (2.7) будет выполнено, если положить $F_1^{\lambda 1} = \rho(\nu) \delta'(\nu - \lambda)$. Действительно,

$$(F_1^{\lambda 1}, (\rho(\nu))^{-1}) = (\delta'(\nu - \lambda), 1) = 0,$$

$$(F_1^{\lambda 1}, (u(\nu) - u(\lambda))^2 (H(\nu))^{-1} \varphi_2(\nu)) = (\delta'(\nu - \lambda), (u(\nu) - u(\lambda))^2 \rho \varphi_2(\nu) (H(\nu))^{-1}) = 0.$$

По первой компоненте $F_1^{\lambda 1}$ с помощью формулы (2.6) вычисляется вторая компонента вектор-функционала $F_2^{\lambda 1} = u_\lambda(\lambda) \rho(\lambda) (H(\nu))^{-1} \delta(\nu - \lambda)$, а третью компоненту $F_3^{\lambda 1}$ можно положить равной нулю. Для построения еще одного решения уравнения (2.7) введем функционал P^λ , действующий на произвольную функцию $\varphi(\nu)$ следующим образом:

$$(P^\lambda, \varphi(\nu)) = \int_0^1 \frac{H(\nu)}{\rho^2(\nu)} \frac{\rho(\nu) \varphi(\nu) - \rho(\lambda) \varphi(\lambda)}{(u(\nu) - u(\lambda))^2} d\nu$$

(интеграл понимается в смысле главного значения). Указанный функционал P^λ удовлетворяет соотношению

$$\left(P^\lambda, \frac{(u(\nu) - u(\lambda))^2}{H(\nu)} \varphi(\nu) \right) = \int_0^1 \frac{\varphi(\nu)}{\rho(\nu)} d\nu.$$

Решение уравнения (2.7) при $k = k^\lambda(x, t) = u(x, \lambda, t)$ ищется в виде $F_1 = F_1^{\lambda 2} = C(\lambda)\delta(\nu - \lambda) + P^\lambda$. Оказывается, что для удовлетворения этому уравнению достаточно взять $C(\lambda) = \sigma\rho(\lambda)$.

Как и ранее, действие второй компоненты собственного вектор-функционала $F_2^{\lambda 2}$ определяем с помощью формулы (2.6):

$$(F_2^{\lambda 2}, \varphi(\nu)) = - \int_0^1 \frac{\varphi(\nu) d\nu}{\rho(\nu)(u(\nu) - u(\lambda))}.$$

Легко проверить, что если задать третью компоненту собственного вектор-функционала $F_3^{\lambda 2}$ соотношением

$$(F_3^{\lambda 2}, \varphi(\nu)) = - \int_0^1 \frac{\rho_S(\nu)}{\rho^2(\nu)} \frac{H(\nu)\varphi(\nu)}{u(\nu) - u(\lambda)} d\nu,$$

то последнее уравнение (2.5) будет также выполнено.

Кроме построенных вектор-функционалов $\mathbf{F}^{\lambda 1}$, $\mathbf{F}^{\lambda 2}$ уравнениям (2.5) при $k^\lambda = u(x, \lambda, t)$ удовлетворяет также $\mathbf{F}^{\lambda 3} = (0, 0, \delta(\nu - \lambda))$. Здесь и в дальнейших формулах для сокращения записи опускаем в обозначениях искомых функций аргументы x, t .

Действуя на уравнения (1.8) найденными вектор-функционалами, получим соотношения на характеристиках:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{H(u_t + k_i u_x)}{\rho(u - k_i)^2} d\nu - \int_0^1 \frac{H_t + k_i H_x}{\rho(u - k_i)} d\nu + \int_0^1 \frac{\rho_S}{\rho^2} \frac{H(S_t + k_i S_x)}{u - k_i} d\nu = A'(x), \\ & \rho_\lambda H(u_t + u u_x) + \rho H(u_{\lambda t} + u u_{\lambda x}) - \rho u_\lambda (H_t + u H_x) = 0, \quad (2.11) \\ & \rho(\lambda) \sigma(u_t(\lambda) + u(\lambda) u_x(\lambda)) + \int_0^1 \frac{H(\nu)}{\rho^2(\nu)} \frac{\rho(\nu)(u_t(\nu) + u(\lambda) u_x(\nu)) - \rho(\lambda)(u_t(\lambda) + u(\lambda) u_x(\lambda))}{(u(\nu) - u(\lambda))^2} d\nu - \\ & - \int_0^1 \frac{H_t(\nu) + u(\lambda) H_x(\nu)}{\rho(\nu)(u(\nu) - u(\lambda))} d\nu + \int_0^1 \frac{H(\nu) \rho_S(\nu)}{\rho^2(\nu)} \frac{S_t(\nu) + u(\lambda) S_x(\nu)}{u(\nu) - u(\lambda)} d\nu = A'(x), \\ & S_t(\lambda) + u(\lambda) S_x(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы завершить проверку условий гиперболичности системы уравнений (1.8), проверим условия полноты для построенной системы собственных функционалов. Пусть $(\mathbf{F}^i, \varphi) = 0$, $i = 1, 2$, $(\mathbf{F}^{\lambda j}, \varphi) = 0$, $j = 1, 2, 3$. Покажем, что $\varphi = 0$, если u, H, S удовлетворяют (2.10). Из уравнения $(\mathbf{F}^{\lambda 3}, \varphi) = 0$ следует, что $\varphi_3 = 0$, а уравнение $(\mathbf{F}^{\lambda 1}, \varphi) = 0$ дает соотношение

$$H \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho \varphi_1) - \rho u_\lambda \varphi_2 = 0. \quad (2.12)$$

С учетом (2.12) уравнение $(\mathbf{F}^{\lambda^2}, \varphi) = 0$ записывается в форме

$$\sigma \rho \varphi_1 - \int_0^1 \frac{H(\nu)}{\rho^2(\nu)u_\nu(\nu)} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\rho(\nu)\varphi_1(\nu) - \rho(\lambda)\varphi_1(\lambda)}{u(\nu) - u(\lambda)} d\nu = 0. \quad (2.13)$$

Прямой подстановкой функции $\rho\varphi_{0i} = (u - k_i)^{-1}$ в (2.13) убеждаемся в том, что она является решением этого уравнения. Введем вместо искомой функции φ_1 новую неизвестную

$$w = \rho\varphi_1 - \sum_{i=1}^2 \alpha_i \rho\varphi_{0i}, \quad (2.14)$$

выбрав коэффициенты $\alpha_i(x, t)$ из условий $w = 0$ при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. После интегрирования по частям в (2.13) и перехода к интегрированию по u получим сингулярное интегральное уравнение для определения w :

$$w \left(\sigma + \frac{H(1)}{\rho^2(1)u_\lambda(1)(u(1) - u(\lambda))} - \frac{H(0)}{\rho^2(0)u_\lambda(0)(u(0) - u(\lambda))} - \int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{H(\nu)}{\rho^2(\nu)u_\nu(\nu)} \frac{du}{u_\nu(\nu)(u - u(\lambda))} \right) + \int_{u_0}^{u_1} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{H(\nu)}{\rho^2(\nu)u_\nu(\nu)} \frac{w(u) du}{u_\nu(\nu)(u - u(\lambda))} \right) \right) = 0. \quad (2.15)$$

Пусть коэффициенты сингулярного интегрального уравнения (2.15) удовлетворяют условию Гёльдера по переменной u . Согласно общей теории сингулярных интегральных уравнений [7], уравнение (2.15) однозначно разрешимо в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на интервале (u_0, u_1) и ограниченных на концах интервала, если символ уравнения не вырождается, а индекс уравнения равен нулю. Эти условия сводятся к (2.10), поэтому из (2.15) вытекает, что $w = 0$. Следовательно,

$$\rho\varphi_1 = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \rho\varphi_{0i}. \quad (2.16)$$

Уравнения $(\mathbf{F}^i, \varphi) = 0$ с учетом равенства (2.12) можно записать в виде

$$\int_0^1 \frac{H}{u_\nu \rho^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\rho\varphi_1}{u - k_1} \right) d\nu = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.17)$$

В силу (2.9)

$$\int_0^1 \frac{H}{u_\nu \rho^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{(u - k^i)(u - k^j)} \right) d\nu = 0 \quad (2.18)$$

при $i \neq j$. Подстановка (2.16) в (2.17) и учет соотношений (2.18) приводят к уравнениям, из которых вытекает, что $\alpha_i = 0$. Следовательно, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$.

В итоге установлено, что система уравнений (1.8) гиперболична на решении (u, H, S) , если $u_\lambda \neq 0$ и выполнены условия (2.10).

Для немонотонных профилей скорости можно получить условия гиперболичности уравнений (1.8), несколько изменив рассуждения, приведенные в [8], где рассматривалась близкая по постановке задача. По-видимому, нарушение условий гиперболичности приводит к некорректности задачи Коши для уравнений (1.8). Установим этот факт для линеаризованной системы уравнений с «замороженными» коэффициентами. Действительно, если рассмотреть линеаризацию уравнений (1.8) на векторе $\mathbf{U}_0 = (u(x_0, \lambda, t_0), H(x_0, \lambda, t_0), S(x_0, \lambda, t_0))$, где $\mathbf{U} = (u, H, S)$ — решение системы (1.8) (линеаризованная система с «замороженными» по x, t коэффициентами), то однородные уравнения допускают решения

вида $\mathbf{U} = \mathbf{V}_0(\lambda)l^{-n} e^{i l(x-kt)}$, где l — действительный параметр; $n > 0$; k — комплексный корень ($\text{Im } k > 0$) уравнения (2.9) при $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$. При $l \rightarrow \infty$ $\mathbf{U}(x, \lambda, 0) \rightarrow 0$, но $\mathbf{U}(x, \lambda, t)$ при $t > 0$ не стремится к нулю, что указывает на отсутствие непрерывной зависимости от начальных данных. Следовательно, при нарушении условий гиперболичности можно ожидать потери устойчивости течения в длинноволновом приближении.

3. Стационарные решения. При рассмотрении стационарных течений введем среднее число Маха

$$M = \left(\int_0^1 \frac{H d\lambda}{\rho^2 c^2} \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{H d\lambda}{\rho^2 u^2} \right)^{-1/2}. \quad (3.1)$$

Если параметры течения не зависят от λ (однородный поток), то, очевидно, $M = |u|c^{-1}$. Если же поток неоднороден и при $x = x_0$ $|u(x_0, \lambda)| > c(x_0, \lambda)$, то, как легко видеть, $M > 1$. Аналогично $M < 1$, если $|u(x_0, \lambda)| < c(x_0, \lambda)$. Следовательно, значение $M = 1$ может достигаться на тех сечениях $x = \text{const}$, где $|u| - c$ меняет знак. Равенство $M(x_0) = 1$ эквивалентно выполнению характеристического уравнения при $k = 0$. Это означает, что в точке x_0 одна из скоростей распространения возмущений обращается в нуль.

Так как выбор лагранжевой переменной λ неоднозначен, то в стационарном случае удобно взять $\lambda = \psi$, где ψ — функция тока ($\psi_y = \rho u$, $\psi_x = -\rho v$). Отличие от предыдущего выбора несущественно: $\lambda = \psi$ на сечениях $x = \text{const}$ изменяется от 0 до Q , где Q — постоянный расход газа в струе. В соответствии с этим в (3.1) и аналогичных формулах изменяются пределы интегрирования. Уравнения (1.8) в стационарном случае интегрируются:

$$S = S(\lambda), \quad 2^{-1}u^2 + i(p, S(\lambda)) = I(\lambda), \quad uH = 1 \quad (3.2)$$

(S, I — произвольные функции, $i(p, S)$ — удельная энтальпия газа). Уравнения (3.2) можно разрешить относительно u и H :

$$u = \pm \sqrt{2(I(\lambda) - i(p, S(\lambda)))}, \quad H = \pm (2(I(\lambda) - i(p, S(\lambda))))^{-1/2}. \quad (3.3)$$

Пусть на входе в канал при $x = 0$ скорость u положительна, тогда в (3.3) фиксируется знак $+$. Подстановка (3.3) в (1.6) приводит к уравнению, определяющему давление $p(x)$:

$$K(p) = \int_0^Q \frac{d\lambda}{\rho(p, S(\lambda)) \sqrt{2(I(\lambda) - i(p, S(\lambda)))}} = A(x). \quad (3.4)$$

Производные функции $K(p)$ имеют вид

$$K'(p) = (1 - M^2) \int_0^Q H \rho^{-2} u^{-2} d\lambda, \quad (3.5)$$

$$K''(p) = \int_0^Q \frac{\tau_{pp} d\lambda}{(2(I - i))^{1/2}} + 3 \int_0^Q \frac{\tau \tau_p d\lambda}{(2(I - i))^{3/2}} + 3 \int_0^Q \frac{\tau^3 d\lambda}{(2(I - i))^{5/2}} \quad \left(\tau = \frac{1}{\rho} \right).$$

Из приведенных формул следует, что качественное поведение неоднородных потоков аналогично поведению однородных. В сверхзвуковом течении ($M > 1$) при расширении канала ($A'(x) > 0$) давление падает, а скорость u увеличивается вдоль каждой линии тока. В дозвуковом течении ($M < 1$) p и u ведут себя аналогично при сужении канала ($A'(x) < 0$). Будем считать, что уравнения состояния газа удовлетворяют условиям монотонности и выпуклости: $\tau_p(p, S) < 0$, $\tau_{pp}(p, S) > 0$. В случае однородного течения (решение u, H ,

S не зависит от λ) этих условий достаточно для того, чтобы неравенство $K''(p_c) > 0$ выполнялось в точке $p = p_c$, определяемой условием $K'(p_c) = 0$. Из этого свойства функции $K(p)$ вытекает, что $K(p)$ достигает минимума при $p = p_c$, а при $p \neq p_c$ меняется монотонно. В случае неоднородных течений условие неотрицательности последних двух слагаемых во втором соотношении (3.5) и условие $K'(p_c) = 0$ можно представить в виде

$$\int_0^Q (\tau_p + \tau^2 f^2) \tau f^3 d\lambda \geq 0; \quad (3.6a)$$

$$\int_0^1 (\tau_p + \tau^2 f^2) f d\lambda = 0 \quad (3.6b)$$

($f = (2(I - i))^{-1/2}$). В общем случае неравенство (3.6a) не является следствием равенства (3.6b), но если уравнение состояния газа имеет вид

$$\tau = b(S)\varphi(p) \quad (3.7)$$

($b > 0, \varphi' < 0, \varphi'' > 0$), то неравенство (3.6a) будет следствием (3.6b); при этом неравенство (3.6a) сводится к неравенству Коши:

$$\left(\int_0^Q b^2 f^3 d\lambda \right)^2 \leq \int_0^Q b^3 f^5 d\lambda \int_0^Q b f d\lambda.$$

Выделим класс уравнений состояния газа, для которых функция $K(p)$ выпукла при всех значениях p . Эти уравнения состояния характеризуются неравенством

$$4\tau\tau_{pp} - 3\tau_p^2 > 0. \quad (3.8)$$

Для таких функций $\tau(p, S)$ условие положительности подынтегрального выражения во второй формуле (3.5) сводится к неравенству $ab > -a^2 - 4^{-1}b^2$ ($a = \tau^{3/2}(2(I - i))^{-5/4}$, $b = \tau_p \tau^{-1/2}(2(I - i))^{-1/4}$). В дальнейшем будем считать, что уравнения состояния газа либо имеют вид (3.7), либо удовлетворяют условию (3.8). Тогда существует единственное значение $p = p_c$, где функция $K(p)$ достигает минимума, а при $p \neq p_c$ $K(p)$ меняется монотонно.

Рассмотрим задачу о стационарном протекании газа через заданный канал. На входе при $x = 0$ зададим $u = u_0(y) > 0$, $p = p_0 = \text{const} > 0$ (p_0 — среднее значение давления на входе), $\rho = \rho_0(y) > 0$. Этими данными определяются при $x = 0$

$$\psi_0(y) = \int_0^y \rho_0(y') u_0(y') dy', \quad Q = \int_0^{A(0)} \rho_0(y') u_0(y') dy'. \quad (3.9)$$

Функция $S_0(y)$ находится из уравнения $\rho(p_0, S_0(y)) = \rho_0(y)$ (считаем, что $\rho_S(p, S) > 0$). В соответствии с (3.1) течение на входе дозвуковое ($M < 1$), если

$$\int_0^{A(0)} \frac{dy}{\rho_0(\eta) u_0^2(\eta)} > \int_0^{A(0)} \frac{dy}{\rho_0(\eta) c^2(p_0, \rho(\eta))},$$

либо сверхзвуковое при выполнении обратного неравенства. Разрешив первое уравнение (3.9) относительно $y = y_0(\psi)$, найдем $I(\psi) = I(\lambda) = 2^{-1} u_0^2(y_0(\psi)) + i(p_0, S_0(y_0(\psi)))$, что позволяет определить функцию $K(p)$ по формуле (3.4). Из уравнения

$$K'(p) = \int_0^Q \frac{-c^{-2}(p, S(\psi)) + (2(I(\psi) - i(p, S(\psi))))^{-1}}{\rho^2(p, S(\psi))(2(I(\psi) - i(p, S(\psi))))^{1/2}} d\psi = 0, \quad (3.10)$$

где $S(\psi) = S_0(y_0(\psi))$, находим критическое давление $p = p_c$; при этом $p_c < p_0$, если на входе $M < 1$, и $p_c > p_0$, если на входе $M > 1$. Действительно, условие $M < 1$ эквивалентно неравенству $K'(p_0) > 0$, но при $p \rightarrow 0$ подынтегральное выражение в (3.10) становится отрицательным ($c(p, S(\psi)) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 0$). Поэтому $K'(p)$ меняет знак на промежутке $(0, p_0)$ и $0 < p_c < p_0$. Заметим, что выражения (3.3) определены при $p > p^0 = \max_{\psi} P(\psi)$,

где $P(\psi)$ — корень уравнения $I(\psi) = i(P(\psi), S(\psi))$. Если на входе в канал $M > 1$, то $K'(p_0) < 0$, но при $p \rightarrow p^0$ $K'(p) \rightarrow +\infty$, поэтому $K(p)$ меняет знак на промежутке (p_0, p^0) и $p_0 < p_c < p^0$. Для существования непрерывного стационарного течения необходимо выполнение неравенства $A(x) \geq K(p_c) = \min_p K(p)$, так как в противном случае уравнение

(3.4) не имеет решений при некоторых x .

Из свойств функции $K(p)$ следует, что на сверхзвуковых участках течения $p < p_c$, а на дозвуковых $p > p_c$. Поэтому обращение в нуль подкоренного выражения в (3.3) ($p = p^0$) может произойти только в дозвуковой области при расширении канала ($A(x)$ принимает значение $K(p^0)$). Если функция $A(x)$ всюду удовлетворяет неравенству $K(p_c) \leq A(x)$, то из уравнения (3.4) можно найти распределение давления $p = p(x)$, а затем $u(\lambda, x)$, $H(\lambda, x)$ с помощью формул (3.3).

Заметим, что в точках x_i , где достигается равенство $p(x_i) = p_c$, возможно ветвление решения: если $A(x) > K(p_c)$ для $x > x_i$, то решение $p = p(x)$ уравнения (3.4) может продолжаться в область $x > x_i$ либо дозвуковой ветвью ($p > p_c$), либо сверхзвуковой ($p < p_c$). Так могут быть построены и трансзвуковые течения, в том числе течение через сопло с горловиной ширины $K(p_c)$, с дозвуковым потоком в сужающейся части и сверхзвуковым в расширяющейся части. Если для выбранного каким-либо способом стационарного течения в расширяющейся дозвуковой части канала при возрастании x достигается равенство $A(x) = K(p^0)$, то решение вида (3.3) перестает существовать. В сверхзвуковой части канала достижение равенства $A(x) = K(p^0)$ не препятствует дальнейшему продолжению решения (3.3), так как в этой части давление убывает при расширении канала ($p < p_c < p^0$).

4. Возвратные течения. Точка остановки потока, в частности, может появиться при полностью дозвуковом течении газа через несимметричный канал с расширением. Пусть функция $A(x)$, определяющая форму верхней стенки канала, удовлетворяет неравенству $A(x) > K(p_c)$ на рассматриваемом дозвуковом течении. Пусть для $x < x_1$ выполняется также неравенство $A(x) < K(p^0)$, а в точке $x = x_1$ достигается равенство $A(x_1) = K(p^0)$. Для определенности предположим, что $u > 0$ при $x < x_1$, а при $x = x_1$ функция u впервые принимает нулевое значение на верхней стенке канала. Так как в дозвуковом течении $K'(p) > 0$, решение вида (3.3) перестает существовать для $x > x_1$, если канал продолжает расширяться ($A(x) > A(x_1)$). Но при $x > x_1$ можно построить стационарное решение другой структуры. На этом решении из точки A_1 , где $u = 0$, выходит разделяющая линия тока $A_1 B_1$ (рис. 1), ниже которой движутся частицы, поступившие через левый торец канала, а выше линии происходит поворот линий тока — траекторий частиц, поступающих через правый торец канала. Это решение описывает течение с отрывом основного потока от стенки канала. Пусть линия тока $A_1 B_1$ задается уравнением $y = \eta(x)$ ($x > x_1$).

Рассмотрим сечение $x = \text{const}$, $x > x_1$. Так как в области основного потока и возвратного течения соотношения вида (3.3) выполняются при соответствующем выборе знаков перед радикалом, то в области основного потока имеем

$$\eta(x) = \bar{\eta}(p(x)) = \int_0^Q \frac{d\lambda}{\rho(p, S(\lambda)) \sqrt{2(I(\lambda) - i(p, S(\lambda)))}}$$

При описании течения в области между $A_1 B_1$ и верхней стенкой канала в формулах

(3.3) нужно $I(\lambda)$ заменить на $I_1(\lambda)$, $S(\lambda)$ — на $S_1(\lambda)$, $i(p, S)$ — на $i_1(p, S_1)$, $\rho(p, S)$ — на $\rho_1(p, S_1)$ (газ, поступающий в канал справа, имеет в общем случае другое уравнение состояния и другие «константы» движения). Точки остановки потока имеют координаты $(x, \lambda(p(x)))$, где $\lambda(p)$ — решение уравнения $I_1(\lambda(p)) - i_1(p, S_1(\lambda)) = 0$.

На отрезке EC , где λ изменяется от $\lambda(p^0) = Q$ до $\lambda(p)$, в (3.3) выбирается знак $+$, а на отрезке CD , где λ изменяется от $\lambda(p)$ до Q , знак $-$. Толщина слоя, занятого возвратным течением, $\xi = \xi(x)$ находится в виде

$$\xi(x) = \xi(p(x)) = \int_{\varphi}^{\lambda(p)} \frac{d\lambda}{\rho_1 \sqrt{2(I_1 - i_1)}} - \int_{\lambda(p)}^Q \frac{d\lambda}{\rho_1 \sqrt{2(I_1 - i_1)}}.$$

Равенство $\bar{\eta}(p) + \xi(p) = A(x)$ определяет распределение давления вдоль канала при $x > x_1$, если известны $I(\lambda)$, $I_1(\lambda)$, $S(\lambda)$, $S_1(\lambda)$. Если функция $p = p(x)$ найдена, то течение в канале при $x > x_1$ описывается соотношениями вида (3.3), как указывалось выше.

При рассмотрении конкретных примеров для упрощения примем $S_1(\lambda) = S_1 = \text{const}$. Считая зависимость $I_1(\lambda)$ монотонной, перейдем в интеграле, представляющем $\bar{\xi}(p)$, к переменной интегрирования $\mu = I_1(\lambda)$. Введем функцию $w(\mu) = (I_1'(\lambda))^{-1}$. Тогда уравнение $\bar{\xi}(p) + \bar{\eta}(p) = A(x)$ запишем в форме

$$2 \int_{I_1(Q)}^{i_1(p, S_1)} \frac{w(\mu) d\mu}{\rho_1(p, S_1) \sqrt{2(\mu - i_1(p, S_1))}} = A(x) - \bar{\eta}(p).$$

Задание уравнений состояния, функции $w(\mu)$, постоянной S_1 полностью определяет течение в возвратной зоне. Рассмотрим простой случай: $w(\mu) = -N = \text{const}$; при этом предыдущее уравнение упрощается:

$$\bar{\xi}(p) = 2N(\rho(p, S_1))^{-1} \sqrt{2(I_1(Q) - i_1(p, S_1))} = A(x) - \bar{\eta}(p) \quad (4.1)$$

($I_1(Q) = i_1(p^0, S_1)$) в силу того, что u обращается в нуль при $p = p^0$. При значениях p , близких к p^0 , $\bar{\xi}'(p) + \bar{\eta}'(p) < 0$. Поэтому из уравнения (4.1) при $A'(x) > 0$ определяется монотонно убывающая в некоторой окрестности точки $x = x_1$ функция $p(x)$. В указанной окрестности толщина слоя $\xi(p(x))$, занятого возвратным течением, возрастает, а толщина слоя, занятого основным потоком, убывает. В расширяющемся канале убывание давления продолжается до тех пор, пока $\bar{\xi}'(p) + \bar{\eta}'(p) < 0$. Отметим, что в точке x_1 давление достигает максимального значения $p = p^0$.

Приведем результаты расчетов неоднородных течений политропного газа через сопло, выполненных на основе приближенной модели.

Пусть в соотношениях, задающих переход к безразмерным переменным, $U = C_0$ (C_0 — скорость звука на входе при $x = 0, y = 0$), H_0 — начальная ширина канала на входе, R_0 — плотность газа при $x = 0, y = 0$. Тогда безразмерные параметры течения при $x = y = 0$ удовлетворяют соотношениям $p = \gamma^{-1}$, $\rho = 1$, $A(0) = 1$ (γ — показатель политропы). Уравнение состояния газа задается в виде $p = \gamma^{-1} a(S) \rho^\gamma$ ($a(S) = 1$ при $x = y = 0$). Поток на входе в канал характеризуется постоянством давления и горизонтальной компоненты скорости, а также линейным по y профилем температуры:

$$u = u_0 = \text{const}, \quad \rho = (1 + \beta u_0 y)^{-1}, \quad a(S) = (1 + \beta u_0 y)^\gamma, \quad p = \gamma^{-1}$$

($u_0 > 0, \beta > 0$). Тогда при $x = 0$

$$\psi = \psi(y) = \beta^{-1} \ln(1 + \beta u_0 y), \quad a(S(\psi)) = e^{\beta \gamma \psi}, \quad Q = \psi(1).$$

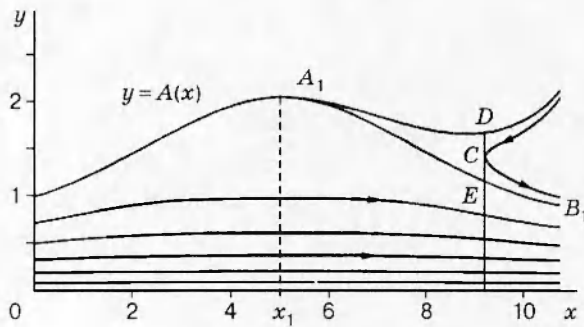


Рис. 1

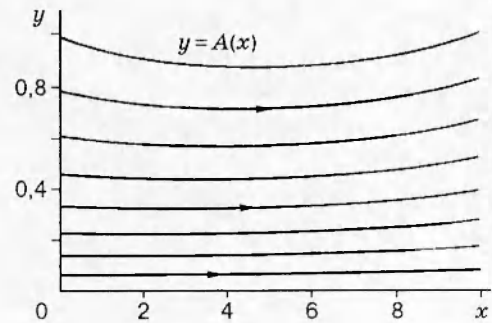


Рис. 2

Эти соотношения определяют $I(\psi)$, $i(p, S(\psi))$:

$$I = 2^{-1}u_0^2 + (\gamma - 1)^{-1}e^{\beta\psi}, \quad i = (\gamma p)^{(\gamma-1)/\gamma} e^{\beta\psi} / (\gamma - 1).$$

Согласно предыдущим формулам, $u(p, \psi)$, $y(p, \psi)$ при $x > 0$ задаются равенствами

$$u(p, \psi) = \sqrt{u_0^2 + 2(\gamma - 1)^{-1}e^{\beta\psi}(1 - (\gamma p)^{(\gamma-1)/\gamma})},$$

$$y(p, \psi) = 2\beta^{-1}(\gamma p)^{-1/\gamma}(e^{\beta\psi} - 1)(u(p, \psi) + u(p, 0))^{-1},$$

а распределение давления находится из уравнения $y(p, Q) = A(x)$. Течение на входе дозвуковое ($M < 1$), если $u_0 < 4^{-1}(\beta + \sqrt{\beta^2 + 16})$, и сверхзвуковое ($M > 1$) в противном случае.

На рис. 2 приведены линии тока, а на рис. 3, а-в — соответственно профили скорости u на входе, в критическом сечении ($M = 1$) и на выходе из сопла для трансзвукового стационарного течения с линейным распределением давления $p = \gamma^{-1}(1 - bx)$ вдоль канала ($\gamma = 1,4$, $u_0 = 1$, $\beta = 3$, $b = (16)^{-1}$). Температурная неоднородность дозвукового потока на входе приводит к сдвиговому сверхзвуковому течению на выходе из сопла.

На рис. 1 показана картина линий тока для дозвукового потока с теми же параметрами на входе в канал в случае, когда распределение давления вдоль канала следующее:

$$p = (5/7)((21/20)^{7/2} - ((21/20)^{7/2} - 1)(x/5 - 1)^4).$$

В расширяющемся канале при $x < 5$ дозвуковой поток тормозится, профиль горизонтальной скорости становится неоднородным по вертикали и при $x = 5$ на верхней стенке появляется точка остановки потока. Для $x > 5$ стационарное течение продолжается как течение с отрывом основного потока от стенки и образованием зоны возвратного течения. Считается, что в зоне возвратного течения газ имеет то же уравнение состояния, а его энтропия принимается постоянной; ее значение совпадает с $S(Q)$ (значением S в основном потоке на верхней линии тока). Течение в возвратной зоне характеризуется дополнительным соотношением $w(\mu) = -N = -0,1$, что соответствует линейному профилю скорости

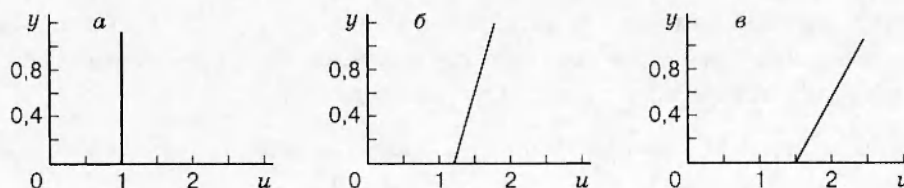


Рис. 3

$u(y)$ на участке втекания на правом торце канала $x = 11$. Расширение зоны возвратного течения приводит к уменьшению толщины зоны, занятой основным потоком, и росту скорости основного течения.

В итоге построена модель длинноволнового приближения, описывающая нестационарные неоднородные течения газа в удлиненном канале переменного сечения. Показано, что при определенных условиях система уравнений движения является гиперболической. Исследованы общие свойства стационарных течений газа с уравнениями состояния, удовлетворяющими условиям монотонности и выпуклости и дополнительному условию (3.7) или (3.8).

При рассмотрении более общих уравнений состояний, удовлетворяющих условиям монотонности и выпуклости, можно ожидать изменения качественных свойств стационарных течений (наличия нескольких максимумов и минимумов функции $K(p)$).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае осесимметричного движения в канале ($0 \leq r \leq B(x)$) уравнения аналогичного приближения в переменных Эйлера имеют вид

$$u_t + uu_x + wu_r + \rho^{-1}p_x = 0, \quad p_r = 0, \quad \rho_t + (u\rho)_x + r^{-1}(\rho rw)_r = 0, \quad S_t + uS_x + wS_r = 0. \quad (4.2)$$

Здесь x — безразмерная координата вдоль оси канала; r — безразмерная радиальная координата в цилиндрической системе координат; u, w — соответствующие компоненты вектора скорости (безразмерные переменные вводятся так же, как в (1.1a)). Легко видеть, что после замены переменных $y = 2^{-1}r^2, v = rw, A(x) = 2^{-1}B^2(x)$ уравнения (4.2) преобразуются к виду (1.1) при $\varepsilon = 0$, а граничное условие на стенке канала — к виду (1.3). Поэтому все результаты справедливы и для осесимметричного движения, а точные решения получаются из решений плоской задачи заменой переменных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01210).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
3. Тешуков В. М. О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–562.
4. Тешуков В. М. Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
5. Varley E., Blythe P. A. Long eddies on sheared flows // Stud. Appl. Math. 1988. V. 79. P. 103–187.
6. Крайко А. Н., Ланюк А. Н. О влиянии неравномерностей полей полной энтальпии и энтропии на интегральные характеристики сопла Лавалья // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 3. С. 102–109.
7. Тешуков В. М., Стерхова М. М. Характеристические свойства системы уравнений сдвигового течения с немонотонным профилем скорости // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 3–39.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 30/V 1996 г.