ПМТФ, № 6, 1990

УДК 539.3

А. А. Буренин, Ю. А. Россихин

О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОСТИ НА ХАРАКТЕР РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ПРОДОЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Ударные волны (УВ) в наследственно упругих средах изучались в работах [1, 2] на базе упрощенной теории Ю. Н. Работнова [3] методом малого параметра (роль малых величин играли наследственные параметры), который комбинировался с методом факторизации нелинейных операторов, с теорией разрывов, с асимптотическими методами и т. д.

В данной работе рассматривается распространение плоской УВ в нелинейных вязкоупругих средах с интегральной и дифференциальной вязкостью без предположения о малости вязкоупругих параметров. В качестве методов решения используется лучевой метод [4—9], состоящий в том, что искомые функции за фронтом УВ представляются в виде степенных рядов, коэффициентами которых служат скачки производных от перемещения соответствующего порядка, а также метод сращивания асимптотических разложений [10].

Сначала рассмотрим нелинейную наследственно упругую среду, т. е. среду с интегральной вязкостью. Уравнения, описывающие движение такой среды в переменных Эйлера в декартовой прямоугольной системе координат, имеют вид

$$\sigma = ku_{,1} + \alpha u_{,1}^2 - \int_0^t K(t-t')\,u_{,1}(t')\,dt' + \ldots,$$
$$\sigma_{,1} = \rho_0(u_{,(2)} + 2u_{,1}u_{,1(1)} + \ldots). \tag{1}$$

Здесь $\sigma = \sigma_{11}$ — напряжение; $u = u_1$ — отличная от нуля компонента вектора перемещения; $k = \lambda + 2\mu$; λ, μ — параметры Ламэ; $\alpha = 3(l + m + n) - (7/2)(\lambda + 2\mu)$; l, m, n — упругие постоянные третьего порядка [11]; $u_{,(k)} = \partial^k u/\partial t^k$; $u_{,k} = \partial^k u/\partial x^k$; t — время; $x = x_1$ — координата, отсчитываемая по нормам к границе наследственно упругого полупространства $x > 0$; $K(t)$ — ядро наследственности. Аналогичная система уравнений в переменных Лагранжа использовалась в [12] для описания эволюции слабых волн.

Пусть начиная с момента времени $t = 0$ граница $x = 0$ полупространства $x > 0$ нагружается таким образом, что $u|_{x=g(t)} = g(t)$ $(g(0) = 0,\ g_{,1}(0) \neq 0,\ g(t) > 0)$. Разложим функцию $g(t)$ в ряд Маклорена по времени t. Тогда

$$u(g(t), t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} n_k t^k \tag{2}$$

(n_k — известные постоянные). В результате динамического воздействия (2) в наследственно упругой среде будет распространяться продольная УВ со скоростью G [13]. За фронтом УВ решение строим в виде лучевого ряда

$$u = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \varkappa_k \Big|_{t=\int_0^x \frac{ds}{G(s)}} \left(t - \int_0^x \frac{ds}{G(s)}\right)^k, \tag{3}$$

где $\varkappa_k = [u_{,(k)}]$ — скачки производных k-го порядка по времени t от функции u.

Для определения коэффициентов $\varkappa_k$ лучевого ряда (3) продифференцируем первое уравнение системы (1) k раз, а второе — $(k-1)$ раз по времени t, возьмем их разность на различных сторонах волновой поверхности Σ и применим условие совместности [14]

$$[f_{,1(k-1)}] = -G^{-1}[f_{,(k)}] + G^{-1}\frac{\delta[f_{,(k-1)}]}{\delta t}.$$

В результате получим рекуррентное уравнение

$$F_k\left(\varkappa_k, \varkappa_{k-1}, \ldots, \varkappa_1, \frac{\delta\varkappa_{k-1}}{\delta t}, \frac{\delta\varkappa_{k-2}}{\delta t}, \ldots, \frac{\delta\varkappa_1}{\delta t}\right) = 0, \quad k \geqslant 1, \tag{4}$$

позволяющее подсчитать скачки любого порядка. При $k = 1$ из (4) находим соотношение $(k + \alpha G^{-1}\varkappa_1 - \rho_0 G^2 - \rho_0 G\varkappa_1 + \ldots)\varkappa_1 = 0$, из которого определяем

$$G = c(1 + b\varkappa_1 + \ldots), \tag{5}$$

совпадающую со скоростью УВ в упругой среде. Здесь $b = (\alpha - k)\,k^{-1}(2c)^{-1}$; $c = k^{1/2}\rho_0^{-1/2}$.

Полагая в уравнении (4) $k = 2, 3, \ldots$ и учитывая на каждом шаге предыдущее соотношение, получаем

$$\varkappa_k = f_k\left(\varkappa_1, \frac{\delta\varkappa_1}{\delta t}, \ldots, \frac{\delta^{k-1}\varkappa_1}{\delta t^{k-1}}\right). \tag{6}$$

Если подставить (5), (6) в (3), а затем полученный ряд использовать в (2), то в результате алгебраических действий имеем

$$\left.\frac{\delta^s\varkappa_1}{\delta t^s}\right|_{t=0} = P_k(n_1, n_2, \ldots, n_{s+1}, \varepsilon, K(0)), \tag{7}$$

где $\varepsilon^2 = n_1 c^{-1}$; $K(0)$ — ядро релаксации $K(t)$ при $t = 0$.

Зависимость (7) позволяет представить $\varkappa_1$ в виде ряда по степеням t или x:

$$\varkappa_1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left.\frac{\delta^k\varkappa_1}{\delta t^k}\right|_{t=0} t^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left.\left(G^k\frac{d^k\varkappa_1}{dx^k}\right)\right|_{x=0} x^k, \tag{8}$$

а подстановка формулы (8) в (5), (6) дает возможность вычислять G и $\varkappa_k$ в моменты времени, близкие к началу процесса деформирования. Если подставим определенные таким образом G и $\varkappa_k$ в (3) и ограничимся двумя первыми членами ряда, то в результате несложных, но громоздких вычислений найдем

$$u = \left(\frac{n_1}{1-\varepsilon^2} - e(\varepsilon)\right)(t-y) + \frac{1}{2b}\left\{-\beta + \left(\frac{7}{2}cb + 1\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(-\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{e(\varepsilon)}{c}y\right)\left(\frac{n_1}{1-\varepsilon^2} - e(\varepsilon)\,y\right)^{-1} e(\varepsilon)\right\}(t-y)^2 + \ldots, \tag{9}$$

где $\beta = K(0)(2\rho_0 c^2)^{-1}$ — коэффициент затухания продольной УВ в линейной наследственно упругой среде;

$$y = \left(1 - \frac{bn_1}{1-\varepsilon^2}\right)(be(\varepsilon))^{-1}\ln\left[1 + be(\varepsilon)\,c^{-1}\left(1 - \frac{bn_1}{1-\varepsilon^2}\right)^{-2}x\right];$$

$$e(\varepsilon) = \left[\frac{n_2}{(1-\varepsilon^2)^3} + \frac{\beta}{b}\right](1-\varepsilon^2)^2\left[-2\varepsilon^2(1-\varepsilon^2) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \frac{7}{2}cb - 1\right)\frac{(1-\varepsilon)^2}{bc}\right]^{-1}.$$

При выводе (9) учитывалось, что

$$\varkappa_1 = -\frac{n_1}{1-\varepsilon^2} + e(\varepsilon)\,t, \quad \varkappa_2 = \frac{\beta}{b} + \left[1 + \left(\frac{7}{2}bc + 1\right)\frac{\varkappa_1}{c}\right]\frac{1}{b\varkappa_1}\,\frac{\delta\varkappa_1}{\delta t}\,.$$

Соотношение (9) несколько упрощается, если сделать естественное предположение о малости ε. Тогда

(10)

$$u = n_1\,[1-(n_2b+\beta)\,y]\,(t-y) + \frac{1}{2b}\left[-\beta + \frac{n_2b+\beta}{1-(n_2b+\beta)\,y}\right](t-y)^2 + \ldots,$$

где $$y = \frac{1-bn_1}{bn_1(n_2b+\beta)}\ln\left[1 + \frac{bn_1(n_2b+\beta)}{c\,(1-bn_1)^2}\,x\right].$$

При $\beta = 0$ из (10) получаем выражение для перемещения в упругой среде

$$u = n_1(1-n_2by)(t-y) + (1/2)n_2(1-n_2by)^{-1}(t-y)^2 + \ldots,$$

$$y = \frac{1-bn_1}{b^2n_1n_2}\ln\left[1 + \frac{b^2n_1n_2}{c\,(1-bn_1)^2}\,x\right].$$

Проанализируем поведение скачка $\varkappa_1$, т. е. коэффициента при $t-y$ в (10), в зависимости от времени. Видно, что $\varkappa_1$ при $\beta \leqslant -bn_2$ $(b<0)$ возрастает с течением времени, а при $\beta > -bn_2$ затухает до нуля за конечный промежуток времени, $0 \leqslant t \leqslant t^* = (\beta + bn_2)^{-1}$. Иначе говоря, при $\beta > -bn_2$ в момент времени $t = t^*$ УВ, несмотря на активное нагружение полупространства, превращается в слабую, и (10) теряет смысл для $t > t^*$.

Теперь рассмотрим нелинейную вязкоупругую среду с дифференциальной вязкостью, поведение которой описывается уравнением

(11) $$\sigma = ku_{,1} + \alpha u_{,1}^2 + \theta v_{,1} + \ldots$$

(v — скорость, θ — коэффициент суммарной вязкости при сдвиговых и объемных деформациях).

С помощью теории разрывов, изложенной выше, можно показать, что в материале, поведение которого описывается моделью (11), УВ в виде поверхности разрыва распространяться не может, т. е. лучевой метод неприменим. Однако, как показано ниже, в такой среде может распространяться структурная УВ, в которой напряжение и скорости изменяются быстро, но непрерывно.

Для построения решения исключим из (11) и второго уравнения (1) напряжение σ и приведем найденное таким образом уравнение к безразмерному виду

$$\left[1 + 2(\varkappa+1)\left(\varepsilon\frac{\partial w}{\partial s} + \varepsilon^2\frac{\partial w}{\partial m}\right)\right]\left[\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial m} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 w}{\partial m^2}\right] -$$
$$-\,\eta\left(\frac{\partial^3 w}{\partial s^2\,\partial m} + 2\varepsilon\frac{\partial^3 w}{\partial s\,\partial m^2} + \varepsilon^2\frac{\partial^3 w}{\partial m^3}\right)\left(1 + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial s} + \varepsilon^2\frac{\partial w}{\partial m}\right) -$$
$$-\,\eta\varepsilon\frac{\partial w}{\partial m}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + 3\varepsilon\frac{\partial^3 w}{\partial s^2\,\partial m} + 3\varepsilon^2\frac{\partial^3 w}{\partial s\,\partial m^2} + \varepsilon^3\frac{\partial^3 w}{\partial m^3}\right) -$$
$$-\,\varepsilon^2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial m^2} + 2\varepsilon\frac{\partial w}{\partial m}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial m} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 w}{\partial m^2}\right)\right] + \ldots = 0.$$

Здесь введены следующие безразмерные величины: $m = n_2n_1^{-1}c^{-1}(x - ct)$, $s = n_2n_1^{-3/2}c^{-1/2}x$, $\varepsilon = n_1^{1/2}c^{-1/2}$, $\eta = n_2n_1^{-1}k^{-1}\theta$, $\varkappa = 2cb$, $w = n_2n_1^{-2}u$.

С учетом двух членов ряда граничное условие (2) в безразмерной форме запишется так:

$$(13)\qquad w - \varepsilon s + m - \frac{1}{2}(\varepsilon s - m)^2 \Big|_{s=\varepsilon(\varepsilon s - m)+\frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon s - m)^2} = 0.$$

В задаче о структурной УВ коэффициент вязкости η предполагается равным нулю всюду, за исключением некоторого слоя небольшой толщины, где η считается малым.

Предположим, что ε — малая величина, отыщем решение в виде асимптотического ряда по ε. Поскольку такое представление решения справедливо только вблизи границы, то при его построении вязкостью можно пренебречь. Тогда из (12) и (13) получим внешнее разложение

$$(14)\qquad w(s, m) = w^e = f_0 s - m + \frac{1}{2}m^2 + \varepsilon\left[-f_0' s^2 + f_1 s + f_0\left(m - \frac{1}{2}m^2\right)\right] + $$
$$+ \varepsilon^2\left[\frac{2}{3}f_0'' s^3 - f_1' s^2 + f_2 s + \left(\frac{1}{2}m^2 - m\right)(1 - m - f_1)\right] + \ldots,$$

где функции $f_k(m)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) определяются из условий сращивания с внутренним разложением, которое справедливо вдали от границы и убывает на бесконечности.

Для построения внутреннего разложения сделаем в (12) замену переменной $n = \varepsilon^k s$ (k — некоторое целое число). Решение преобразованного таким образом уравнения (12), удовлетворяющее условию затухания на бесконечности, ищем в виде ряда

$$(15)\qquad w(n, m) = w^i = w_0^i + \varepsilon w_1^i + \varepsilon^2 w_2^i + \ldots$$

Можно показать, что нелинейная структурная УВ существует только при $k = 3$ (при $k = 1$ и $k > 3$ структурная УВ вообще отсутствует, а при $k = 2$ она линейная, т. е. w_k^i ($k = 0, 1, \ldots$) удовлетворяют линейным уравнениям).

Подстановка (15) в преобразованное при помощи замены $n = \varepsilon^3 s$ уравнение (12) приводит к необходимости решать на каждом шаге нелинейное уравнение

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 w_k^i}{\partial n\,\partial m} + \varkappa\frac{\partial w_k^i}{\partial m}\frac{\partial^2 w_k^i}{\partial m^2} - \nu\frac{\partial^3 w_k^i}{\partial m^3} = \varphi_k^i\left(n, m, w_0^i, w_1^i, \ldots, w_{k-1}^i\right),$$

которое путем замены $v_k = \varkappa^{-1}\partial w_k^i/\partial m$ сводится к неоднородному уравнению Бюргерса [15]. Здесь $\nu = \eta/2\varepsilon^2$; коэффициент η имеет порядок ε^2.

Для нулевого члена ряда (15) решение уравнения (16) $\left(\varphi_0^i \equiv 0\right)$ имеет вид [15]

$$(17)\qquad w_0^i = -\frac{2\nu}{\varkappa}\ln\Phi,\quad \Phi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu n}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(m-\zeta)^2}{4\nu n} - \frac{\varkappa}{2\nu}F_0(\zeta)\right]d\zeta$$

($F_0(\zeta)$ — неизвестная функция, также определяемая из условий сращивания).

Используя известную методику сращивания асимптотических разложений (14) и (17), разработанную Ван Дайком [16], в размерных переменных получим

$$u = \frac{n_2 p^2 - \varkappa n_1^2 x - 2n_1 cp}{2c^2\left(1 + \varkappa n_2 c^{-2} x\right)} + n_2^2 n_1^{-1}\nu\varkappa^{-1}\ln\left(1 + \varkappa n_2 c^{-2} x\right)$$

($p = x - ct$).

Таким образом, интегральная вязкость вызывает затухание УВ, а дифференциальная вязкость размывает ее фронт, что приводит к превращению УВ в структурную УВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Локшин А. А.** Нелинейные ударные волны в средах с памятью и метод разрывов // ДАН СССР.— 1982.— Т. 263, № 24.
2. **Локшин А. А.** Нелинейная ударная волна в наследственной среде и точная факторизация нелинейного волнового оператора // Изв. АН СССР. МТТ.— 1985.— № 6.
3. **Работнов Ю. И.** Элементы наследственной механики твердых тел.— М.: Наука, 1977.
4. **Бабич В. М., Алексеев А. С.** О лучевом методе вычисления интенсивности волновых фронтов // Изв. АН СССР. Сер. геофиз.— 1958.— № 1.
5. **Алексеев А. С., Гельчинский Б. Я.** О лучевом методе вычисления полей волн в неоднородных средах с криволинейными границами раздела // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1959.— Т.3.
6. **Алексеев А. С., Бабич В. М., Гельчинский Б. Я.** Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1961.— Т. 5.
7. **Бабич В. М.** Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в упругой неоднородной анизотропной среде // Там же.
8. **Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д.** Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических телах // ПММ.— 1973.— Т. 37, № 1.
9. **Россихин Ю. А.** Лучевой метод решения динамических задач в анизотропной термоупругой среде // Изв. АН СССР. МТТ.— 1977.— № 4.
10. **Буренин А. А., Шаруда В. А.** Косой удар по упругому полупространству // Изв. АН СССР. МТТ.— 1984.— № 6.
11. **Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуща О. И.** Введение в акустоупругость.— Киев: Наук. думка, 1977.
12. **Нигул У. К.** Асимптотический анализ эволюции формы импульса в наследственно упругих средах и возможные приложения в акустодиагностике // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1979.— Вып. 41.
13. **Буренин А. А., Чернышов А. Д.** Ударные волны в изотропном упругом пространстве // ПММ.— 1978.— Т. 42, № 4.
14. **Томас Т.** Пластическое течение и разрушение в твердых телах.— М.: Мир, 1964.
15. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
16. **Найфе А. Х.** Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.

г. Владивосток *Поступила 2/II 1989 г.*

УДК 532.5:551.324

Ф. Х. Ахмедова, Л. М. Котляр

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСТЕКАНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Известно [1, 2], что исследование гидродинамических процессов в погранслойном приближении можно свести к решению уравнения, описывающего форму свободной поверхности нелинейно-вязкой жидкости, с помощью методов теории подобия и анализа размерностей. Однако краевые задачи, возникающие при математическом моделировании, существенно нелинейны, и их решения в общем случае могут быть найдены лишь численными методами. Отсутствие априорных оценок точности численных методов делает необходимым построение их аналитических решений хотя бы в частных автомодельных случаях для тестирования на них соответствующих разностных схем.

В [3] с помощью аппарата группового анализа [4, 5] проведена групповая классификация уравнения, определяющего форму свободной поверхности нелинейно-вязкой жидкости в одномерном приближении, а именно ледника. Полученные инвариантные решения использовались для построения автомодельных задач, иллюстрирующих качественные особенности течения жидкости со степенным реологическим законом.

В настоящей работе решается двумерная автомодельная задача растекания жидкости по ложу сложной конфигурации.

1. Основное уравнение. Рассматривая нестационарное течение нелинейно-вязкой жидкости в изотермическом приближении, можно показать [2], что функция $l(x, y, t)$, описывающая свободную поверхность, удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению второго по-