

**ПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗОНА ОКОЛО КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ
В ПЛОСКОСТИ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ
ОСНОВНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ**

Частные случаи задачи об определении пластической зоны около кругового отверстия в плоскости, когда основное напряженное состояние есть полиномиальная функция координат, рассматривались в [1—9], но правильного решения не получено. Точное решение этой задачи при произвольном полиномиальном распределении основных напряжений в общем виде дано в [10], однако продолжают появляться работы [11], в которых повторяются ошибочные решения. В данной статье, используя результаты из [10], предложен новый способ нахождения коэффициентов отображающей функции и приведен пример точного решения задачи об определении пластической зоны около кругового отверстия при конкретном квадратичном распределении основных напряжений.

Пусть в некоторой области упругого тела, находящегося в условиях плоской деформации или плоского напряженного состояния, основные напряжения задаются функциями Колосова — Мухелишвили [12]

$$(1) \quad \Phi_0(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j, \quad \Psi_0(z) = \sum_{j=0}^m b_j z^j,$$

где коэффициенты — известные постоянные. Выбирая эти функции в виде (1), можно получить решения задач, имеющих практический интерес [4, 6, 13].

Сделаем в этой области круговое отверстие $x^2 + y^2 \leq R^2$, к контуру которого приложим постоянные усилия $\sigma_r = p$, $\tau_{r\phi} = 0$, $r = R$ (r, ϕ — полярные координаты). Допустим, что вокруг отверстия реализуется осесимметричное бигармоническое напряженное состояние [10]

$$(2) \quad \begin{aligned} (\sigma_r + \sigma_\phi)/2 &= p + \varepsilon k (1 - k_1) + \varepsilon k \ln(r^2 R^{-2}), \\ (\sigma_\phi - \sigma_r)/2 + i\tau_{r\phi} &= \varepsilon k (1 - k_1 R^2 r^{-2}), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad k > 0, \quad k_1 \leq 1. \end{aligned}$$

Напряжения (2) удовлетворяют граничным условиям на контуре отверстия, уравнениям равновесия и условию пластичности $[(\sigma_\phi - \sigma_r)/2]^2 + \tau_{r\phi}^2 = k^2 (1 - k_1 R^2 r^{-2})^2$. При $k_1 = 0$ получается известное условие пластичности Треска — Сен-Венана. При специальном выборе k_1 напряжения (2) удовлетворяют и другим условиям пластичности [10].

В упругой зоне напряжения можно представить через функции

$$(3) \quad \Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z)$$

($\Phi_1(z), \Psi_1(z)$ характеризуют дополнительные напряжения, вызванные наличием отверстия и пластической зоны). Обозначим границу между пластической и упругой зонами через L . Считаем, что напряжения при переходе через L непрерывны. Голорморфные функции $\Phi_1(z), \Psi_1(z)$ нужно найти такие, чтобы на L напряжения равнялись выражениям (2) и в окрестности бесконечно удаленной точки было [10, 12]

$$(4) \quad \Phi_1(z) = O(1/z^2), \quad \Psi_1(z) = O(1/z^2).$$

Имеют место формулы [12]

$$(5) \quad \begin{aligned} (\sigma_x + \sigma_y)/2 &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} = (\sigma_r + \sigma_\phi)/2, \\ (\sigma_y - \sigma_x)/2 + i\tau_{xy} &= \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = [(\sigma_\phi - \sigma_r)/2 + i\tau_{r\phi}]e^{-2i\phi}. \end{aligned}$$

Так как $e^{-2i\phi} = \bar{z}/z$, $r^2 = \bar{z}z$, то, подставляя в (5) выражения (2), (3), получим для дополнительных функций $\Phi_1(z), \Psi_1(z)$ граничные условия на L

$$(6) \quad \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} = p + \varepsilon k(1 - k_1) + \varepsilon k \ln \frac{\bar{z}z}{R^2} - [\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)}], \quad z \in L,$$

$$\bar{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z) = \varepsilon k \left(1 - k_1 \frac{R^2}{z\bar{z}}\right) \frac{\bar{z}}{z} - [\bar{z}\Phi_0'(z) + \Psi_0(z)].$$

При $|z| \rightarrow \infty$ должны выполняться условия (4).

Пусть функция

$$(7) \quad z = Rc\omega(\zeta) = Rc\zeta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n}, \quad c = |c| > 0, \quad c_0 = 1$$

конформно отображает область $|\zeta| > 1$ на бесконечную область вне неизвестного контура L . В (7) можно считать, что $c = |c| > 0$, так как поворот системы координат на угол $\arg c$ не изменяет граничные условия (6). Обозначим

$$(8) \quad \Phi_2(\zeta) = k^{-1}\Phi_1[Rc\omega(\zeta)], \quad \Psi_2(\zeta) = k^{-1}\Psi_1[Rc\omega(\zeta)];$$

$$\alpha_j = k^{-1}a_j(Rc)^j = \alpha_{(j)}c^j, \quad \beta_j = k^{-1}b_j(Rc)^j = \beta_{(j)}c^j, \quad j = 0, \overline{m},$$

причем с учетом (4) и (7) при больших $|\zeta|$ должно быть

$$(9) \quad \Phi_2(\zeta) = O(1/\zeta^2), \quad \Psi_2(\zeta) = O(1/\zeta^2).$$

Теперь, используя (1), (7), (8), перепишем граничные условия (6) для функций $\Phi_2(\zeta)$, $\Psi_2(\zeta)$ в форме

$$(10) \quad \Phi_2(t) + \overline{\Phi_2(t)} = p/k + \varepsilon(1 - k_1) + \varepsilon \ln c^2 + \varepsilon \ln \omega(t) \overline{\omega(t)} -$$

$$- \left[\sum_{j=0}^m \alpha_j \omega^j(t) + \sum_{j=0}^m \bar{\alpha}_j \overline{\omega^j(t)} \right], \quad |t| = 1,$$

$$\frac{\overline{\omega(t)}}{\omega'(t)} \Phi_2'(t) + \Psi_2(t) = \varepsilon \frac{\overline{\omega(t)}}{\omega(t)} - \frac{\varepsilon k_1}{c^2 \omega^2(t)} - \left[\overline{\omega(t)} \sum_{j=1}^m j \alpha_j \omega^{j-1}(t) + \sum_{j=0}^m \beta_j \omega^j(t) \right].$$

В (10) под значениями функций на окружности $|t| = 1$ понимаются предельные значения функций при стремлении ζ из области $|\zeta| > 1$ к точкам окружности $|t| = 1$.

Точное решение краевой задачи (9), (10) в общем виде дано в [10]. Для случая $m = 2$ решение краевой задачи (9), (10) записывается так [10]:

$$(11) \quad \Phi_2(\zeta) = \varepsilon \ln \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} - \left\{ \alpha_1 [\omega(\zeta) - c_1 - \zeta] + \alpha_2 [\omega^2(\zeta) - (c_1^2 + 2c_2) - \right.$$

$$\left. - 2c_1\zeta - \zeta^2] + \frac{\bar{\alpha}_1}{\zeta} + \bar{\alpha}_2 \left(\frac{2\bar{c}_1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \right) \right\},$$

$$\Psi_2(\zeta) = \frac{-\varepsilon k_1}{c^2 \omega^2(\zeta)} - \beta_0 - \beta_1 \omega(\zeta) - \beta_2 \omega^2(\zeta) + \frac{1}{\omega'(\zeta)} \left[\frac{\varepsilon}{\zeta^2} - \bar{\alpha}_1 \left(\frac{\bar{c}_1}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^3} \right) - \right.$$

$$\left. - 2\bar{\alpha}_2 \left(\frac{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2}{\zeta^2} + \frac{2\bar{c}_1}{\zeta^3} + \frac{1}{\zeta^4} \right) + \beta_0 + \beta_1 (c_1 + \zeta) + \right.$$

$$\left. + \beta_2 (c_1^2 + c_2 + 2c_1\zeta + \zeta^2) \right];$$

$$(12) \quad \omega(\zeta) = \zeta + c_1 + \frac{c_2 A_2 \zeta^4 + (\varepsilon c_1 - \bar{A}_1) \zeta^3 - (\bar{A}_1 c_1 + \bar{A}_2 + \bar{B}_1) \zeta^2 - (\bar{A}_2 c_1 + \bar{B}_2) \zeta - \bar{B}_3}{\zeta (A_2 \zeta^4 + A_1 \zeta^3 - \varepsilon \zeta^2 + \bar{A}_1 \zeta + \bar{A}_2)},$$

где

$$(13) \quad A_1 = \alpha_{(1)}c + 2\alpha_{(2)}c^2c_1, \quad A_2 = 2\alpha_{(2)}c^2,$$

$$B_1 = \beta_0 + \beta_{(1)}cc_1 + \beta_{(2)}c^2(c_1^2 + c_2), \quad B_2 = \beta_{(1)}c + 2\beta_{(2)}c^2c_1, \quad B_3 = \beta_{(2)}c^2;$$

$$(14) \quad p/k + \varepsilon(1 - k_1) + \varepsilon \ln c^2 - \{ \alpha_0 + \bar{\alpha}_0 + (\alpha_{(1)}c_1 + \bar{\alpha}_{(1)}\bar{c}_1)c +$$

$$+ [\alpha_{(2)}(c_1^2 + 2c_2) + \bar{\alpha}_{(2)}(\bar{c}_1^2 + 2\bar{c}_2)]c^2 \} = 0.$$

Входящие в формулы (11)–(14) коэффициенты c_1, c_2 определяются условиями, означающими, что дробь в (12) не должна иметь особых точек при $|\zeta| \geq 1$. Коэффициент c находится из уравнения (14). Как отмечалось в [10], в предшествующих работах [1–9, 11], до решения задачи всегда считают, что $c_1 = 0$, в уравнении для c вида (14) отсутствуют слагаемые, содержащие c вне знака логарифма, и не выполняются условия (9). В [10] предложен способ получения уравнений для c_1, c_2 , состоящий в требовании совпадения нулей числителя и знаменателя в (12) при $|\zeta| \geq 1$. В этой статье поступим немного иначе.

Нетрудно проверить, что если ζ_q есть корень многочлена в знаменателе в (12), то и $\zeta_{2+q} = 1/\bar{\zeta}_q$, $q = 1, 2$, также корень. Если $|\zeta_q| \leq 1$, то $|\zeta_{2+q}| = 1/|\bar{\zeta}_q| \geq 1$, т. е. всегда один корень внутри единичного круга, а другой вне единичного круга, либо корень $\zeta_q = 1/\bar{\zeta}_q$ на единичной окружности.

Сравнивая выражения (7) и (12), получим, что коэффициенты c_n разложения в окрестности бесконечно удаленной точки в ряд функции $\omega(\zeta)$ удовлетворяют рекуррентной системе уравнений

$$(15) \quad \begin{aligned} A_2 c_3 + A_1 c_2 - \varepsilon c_1 + \bar{A}_1 &= 0, \\ A_2 c_4 + A_1 c_3 - \varepsilon c_2 + \bar{A}_1 c_1 + \bar{A}_2 + \bar{B}_1 &= 0, \\ A_2 c_5 + A_1 c_4 - \varepsilon c_3 + \bar{A}_1 c_2 + \bar{A}_2 c_1 + \bar{B}_2 &= 0, \\ A_2 c_6 + A_1 c_5 - \varepsilon c_4 + \bar{A}_1 c_3 + \bar{A}_2 c_2 + \bar{B}_3 &= 0, \\ A_2 c_{n+3} + A_1 c_{n+2} - \varepsilon c_{n+1} + \bar{A}_1 c_n + \bar{A}_2 c_{n-1} &= 0, \quad n = \overline{4, \infty}. \end{aligned}$$

В случае $m = 1$, т. е. при $\alpha_{(2)} = 0, \beta_{(2)} = 0$, из (12)–(15) выводим

$$(16) \quad \omega(\zeta) = \zeta + c_1 + \frac{(\varepsilon c_1 - \bar{\alpha}_{(1)} c) \zeta^2 - (\bar{\alpha}_{(1)} c c_1 + \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_{(1)} c \bar{c}_1) \zeta - \bar{\beta}_{(1)} c}{\zeta (\alpha_{(1)} c \zeta^2 - \varepsilon \zeta + \bar{\alpha}_{(1)} c)};$$

$$(17) \quad p/k + \varepsilon(1 - k_1) + \varepsilon \ln c^2 - [\alpha_0 + \bar{\alpha}_0 + (\alpha_{(1)} c_1 + \bar{\alpha}_{(1)} \bar{c}_1) c] = 0;$$

$$(18) \quad \begin{aligned} \alpha_{(1)} c c_2 - \varepsilon c_1 + \bar{\alpha}_{(1)} c &= 0, \\ \alpha_{(1)} c c_3 - \varepsilon c_2 + \bar{\alpha}_{(1)} c c_1 + \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_{(1)} c \bar{c}_1 &= 0, \\ \alpha_{(1)} c c_4 - \varepsilon c_3 + \bar{\alpha}_{(1)} c c_2 + \bar{\beta}_{(1)} c &= 0, \\ \alpha_{(1)} c c_{n+2} - \varepsilon c_{n+1} + \bar{\alpha}_{(1)} c c_n &= 0, \quad n = \overline{3, \infty}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вначале уравнения (16)–(18). Так как $\omega(\zeta)$ не должна иметь особых точек при $|\zeta| \geq 1$, кроме полюса при $\zeta = \infty$, то возьмем решение системы (18) в виде

$$(19) \quad c_0 = q_1 + \delta_0 = 1, \quad c_1 = q_1 \zeta_1 + \delta_1, \quad c_2 = q_1 \zeta_1^2 + \delta_2, \quad c_n = q_1 \zeta_1^n, \quad n = \overline{3, \infty}, \\ |\zeta_1| < 1$$

($q_1, \delta_0, \delta_1, \delta_2, \zeta_1$ — неопределенные пока величины). Подставляя (19) в систему (18), получим

$$(20) \quad \begin{aligned} \alpha_{(1)} c \delta_2 - \varepsilon \delta_1 + \bar{\alpha}_{(1)} c \delta_0 &= 0, \\ -\varepsilon \delta_2 + \bar{\alpha}_{(1)} c \delta_1 + \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_{(1)} c \bar{c}_1 &= 0, \\ \bar{\alpha}_{(1)} c \delta_2 + \bar{\beta}_{(1)} c &= 0; \end{aligned}$$

$$(21) \quad \alpha_{(1)} c \zeta_1^2 - \varepsilon \zeta_1 + \bar{\alpha}_{(1)} c = 0, \quad |\zeta_1| < 1.$$

Из первого уравнения (19) имеем $q_1 = 1 - \delta_0$, из уравнений (20) последовательно находим

$$(22) \quad \begin{aligned} \delta_2 &= -\bar{\beta}_{(1)} / \bar{\alpha}_{(1)}, \quad \delta_1 = -(-\varepsilon \delta_2 + \bar{\beta}_0 + \bar{\beta}_{(1)} c \bar{c}_1) / (\bar{\alpha}_{(1)} c), \\ \delta_0 &= -(\alpha_{(1)} c \delta_2 - \varepsilon \delta_1) / (\bar{\alpha}_{(1)} c). \end{aligned}$$

В (22) справа входит c_1 , но для c_1 есть вторая формула (19):

$$(23) \quad c_1 = (1 - \delta_0)\zeta_1 + \delta_1;$$

подставляя в (23) выражения (22) и учитывая (21), запишем

$$(24) \quad c_1 = \left\{ 1 + \frac{\alpha_{(1)}}{\alpha_{(1)}} \left[\frac{\bar{\beta}_0}{\bar{\alpha}_{(1)}^c} + \frac{\bar{\beta}_{(1)}}{\bar{\alpha}_{(1)}} \left(\bar{c}_1 + \frac{\alpha_{(1)}}{\alpha_{(1)}} \zeta_1 \right) \right] \zeta_1 \right\} \zeta_1.$$

Это уравнение эквивалентно соответствующему уравнению в [10]. Таким образом, для неизвестных c , c_1 , ζ_1 имеем систему из трех уравнений (17), (21), (24).

Подставляя (19) в (7) и суммируя ряд, получим вместо выражения (16) следующее:

$$(25) \quad \omega(\zeta) = \zeta + c_1 + \frac{\delta_2}{\zeta} + \frac{c_2 - \delta_2}{\zeta - \zeta_1}.$$

В (25) уже все коэффициенты определяются полностью решением системы (17), (21), (24) относительно c , c_1 , ζ_1 и учетом формул (19), (22). Пример решения этой системы и построения упругопластической границы L по формуле (25) для конкретных значений заданных внешних параметров приведен в [10].

Вернемся теперь к системе (15) и возьмем ее решение в виде

$$(26) \quad \begin{aligned} c_{-1} &= q_1 + q_2 + \delta_{-1} = 0, \quad c_0 = q_1\zeta_1 + q_2\zeta_2 + \delta_0 = 1, \\ c_1 &= q_1\zeta_1^2 + q_2\zeta_2^2 + \delta_1, \quad |\zeta_1| < 1, \quad |\zeta_2| < 1, \quad \zeta_1 \neq \zeta_2, \\ c_2 &= q_1\zeta_1^3 + q_2\zeta_2^3 + \delta_2, \quad c_n = q_1\zeta_1^{n+1} + q_2\zeta_2^{n+1}, \quad n = \overline{3, \infty}. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений (26) находим

$$(27) \quad q_1 = \frac{-\zeta_2\delta_{-1} - (1 - \delta_0)}{\zeta_2 - \zeta_1}, \quad q_2 = \frac{1 - \delta_0 + \zeta_1\delta_{-1}}{\zeta_2 - \zeta_1}.$$

Подставив (27) в третье и четвертое уравнение (26), имеем

$$(28) \quad \begin{aligned} c_1 &= \delta_{-1}\zeta_1\zeta_2 + (1 - \delta_0)(\zeta_1 + \zeta_2) + \delta_1, \\ c_2 &= \delta_{-1}\zeta_1\zeta_2(\zeta_1 + \zeta_2) + (1 - \delta_0)[(\zeta_1 + \zeta_2)^2 - \zeta_1\zeta_2] + \delta_2. \end{aligned}$$

Уравнения для δ_{-1} , δ_0 , δ_1 , δ_2 , ζ_1 , ζ_2 получим, подставляя (26) в (15):

$$(29) \quad \begin{aligned} A_1\delta_2 - \varepsilon\delta_1 + \bar{A}_1\delta_0 + \bar{A}_2\delta_{-1} &= 0, \\ -\varepsilon\delta_2 + \bar{A}_1\delta_1 + \bar{A}_2\delta_0 + \bar{B}_1 &= 0, \\ \bar{A}_1\delta_2 + \bar{A}_2\delta_1 + \bar{B}_2 &= 0, \quad \bar{A}_2\delta_2 + \bar{B}_3 = 0; \end{aligned}$$

$$(30) \quad A_2\zeta_{1,2}^4 + A_1\zeta_{1,2}^3 - \varepsilon\zeta_{1,2}^2 + \bar{A}_1\zeta_{1,2} + \bar{A}_2 = 0.$$

Из (29) последовательно находим

$$(31) \quad \begin{aligned} \delta_2 &= -\bar{B}_3/\bar{A}_2, \\ \delta_1 &= -(\bar{A}_1\delta_2 + \bar{B}_2)/\bar{A}_2, \\ \delta_0 &= -(-\varepsilon\delta_2 + \bar{A}_1\delta_1 + \bar{B}_1)/\bar{A}_2, \quad \delta_{-1} = -(A_1\delta_2 - \varepsilon\delta_1 + \bar{A}_1\delta_0)/\bar{A}_2. \end{aligned}$$

Так как ввиду (13) в правую часть (31) входят коэффициенты c_1 , c_2 , то, подставляя (31) в (28), получим уравнения для них. Таким образом, необходимые нам величины c , c_1 , c_2 , ζ_1 , ζ_2 находятся из системы уравнений (14), (28), (30). Если же в (31) подставим выражения (28), то будем иметь систему уравнений для δ_{-1} , δ_0 , δ_1 , при этом надо учитывать и (14), (30).

Суммируя ряд (7) с коэффициентами (26), запишем вместо выражения (12)

$$(32) \quad \omega(\zeta) = \zeta + c_1 + \frac{\delta_2}{\zeta} + \frac{a_1\zeta_1^3}{\zeta - \zeta_1} + \frac{a_2\zeta_2^3}{\zeta - \zeta_2},$$

где все коэффициенты полностью определяются решением системы (14), (28), (30) и учетом формул (27), (31).

Если допустить, что заданные параметры таковы, что многочлен (30) может иметь кратный корень $\zeta_1 = \zeta_2$, $|\zeta_1| < 1$, то вместо (26) следует взять решение системы (15) в виде

$$(33) \quad c_{-1} = q_1 + \delta_{-1} = 0, \quad c_0 = (q_1 + q_2)\zeta_1 + \delta_0 = 1, \\ c_1 = (q_1 + 2q_2)\zeta_1^2 + \delta_1, \quad c_2 = (q_1 + 3q_2)\zeta_1^3 + \delta_2, \quad c_n = [q_1 + (n+1)q_2]\zeta_1^{n+1}, \\ n = \overline{3, \infty}.$$

Из первых двух уравнений (33) имеем

$$(34) \quad q_1 = -\delta_{-1}, \quad q_2 = (1 - \delta_0)/\zeta_1 + \delta_{-1},$$

формулы для c_1, c_2 принимают при этом вид

$$(35) \quad c_1 = \delta_{-1}\zeta_1^2 + 2(1 - \delta_0)\zeta_1 + \delta_1, \quad c_2 = 2\delta_{-1}\zeta_1^3 + 3(1 - \delta_0)\zeta_1^2 + \delta_2,$$

который следует также и из (28) при $\zeta_1 = \zeta_2$.

При подстановке (33) в систему (15) получаем для $\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1, \delta_2$ уравнения (29) или (31), а вместо (30)

$$(36) \quad A_2\zeta_1^4 + A_1\zeta_1^3 - \varepsilon\zeta_1^2 + \bar{A}_1\zeta_1 + \bar{A}_2 = 0;$$

$$(37) \quad 4A_2\zeta_1^3 + 3A_1\zeta_1^2 - 2\varepsilon\zeta_1 + \bar{A}_1 = 0, \quad |\zeta_1| < 1,$$

где условие (37) обеспечивает кратность корня ζ_1 многочлена (36). Это возможно, если коэффициенты в (36) связаны дополнительными соотношениями. Из формул Вьета для (36) имеем

$$(38) \quad \zeta_1 + 1/\bar{\zeta}_1 = -A_1/2A_2, \quad \zeta_1/\bar{\zeta}_1 = \bar{A}_1/A_1;$$

$$(39) \quad (-A_1/2A_2)^2 + 2\bar{A}_1/A_1 = -\varepsilon/A_2, \quad (\bar{A}_1/A_1)^2 = \bar{A}_2/A_2.$$

При выполнении (39) из (38) можно найти ζ_1 . Уравнения (36), (37) эквивалентны соотношениям (38), (39).

Суммируя ряд (7) с коэффициентами (33), получим вместо (12)

$$\omega(\zeta) = \zeta + c_1 + \frac{\delta_2}{\zeta} + \frac{c_2 - \delta_2}{\zeta - \zeta_1} + \frac{q_2\zeta_1^4}{(\zeta - \zeta_1)^2},$$

здесь все коэффициенты полностью определяются решением системы (14), (35), (36), (37) и учетом формул (34), (31).

Рассмотрим пример. Пусть заданы параметры

$$(40) \quad a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad a_2 = \bar{a}_2,$$

тогда основные напряжения будут такие:

$$\sigma_x = -4a_2y^2, \quad \sigma_y = 4a_2x^2, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Из (8), (13), (40) имеем

$$(41) \quad \alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \alpha_{(1)} = 0, \quad \beta_{(1)} = 0, \quad \alpha_{(2)} = k^{-1}a_2R^2 = \bar{\alpha}_{(2)}, \quad \beta_{(2)} = 0,$$

$$A_2 = 2\alpha_{(2)}c^2 = \bar{A}_2, \quad A_1 = 2\alpha_{(2)}c^2c_1 = A_2c_1, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = 0.$$

Уравнения (14), (30) принимают вид

$$(42) \quad p/k + \varepsilon(1 - k_1) + \varepsilon \ln c^2 - \alpha_{(2)}(c_1^2 + 2c_2 + \bar{c}_1^2 + 2\bar{c}_2)c^2 = 0;$$

$$(43) \quad \zeta_{1,2}^4 + c_1\zeta_{1,2}^3 - \frac{\varepsilon}{2\alpha_{(2)}c^2}\zeta_{1,2}^2 + \bar{c}_1\zeta_{1,2} + 1 = 0.$$

С учетом (41) из (31), (28), (27), (32) получаем

$$(44) \quad \delta_2 = 0, \quad \delta_1 = 0, \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_{-1} = 0; \\ c_1 = \zeta_1 + \zeta_2, \quad c_2 = (\zeta_1 + \zeta_2)^2 - \zeta_1\zeta_2; \\ q_1 = -(\zeta_2 - \zeta_1)^{-1}, \quad q_2 = (\zeta_2 - \zeta_1)^{-1};$$

$$(45) \quad \omega(\zeta) = \zeta + \zeta_1 + \zeta_2 + \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2} \left(\frac{\zeta_1^3}{\zeta - \zeta_1} - \frac{\zeta_2^3}{\zeta - \zeta_2} \right).$$

Исключая ζ_1, ζ_2 из (43), (44), запишем

$$(46) \quad \bar{c}_1 + c_1(-c_1^2 + 3c_2 - \varepsilon/A_2) = 0, \quad 1 - (c_1^2 - c_2)(c_1^2 + c_2 - \varepsilon/A_2) = 0.$$

Можно решать систему для трех неизвестных c, c_1, c_2 : (42), (46).

Но из формул Вьета для уравнения (43) с учетом (44) имеем соотношения

$$(47) \quad 2c_1 + \bar{c}_1/(\zeta_1 \zeta_2) = 0, \quad \zeta_1 \zeta_2 + (c_1 \bar{c}_1 + 1)/(\zeta_1 \zeta_2) = -\varepsilon/(2\alpha_{(2)}c^2), \\ \zeta_1 \zeta_2 = \bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_2.$$

Из первого уравнения (47) следует два варианта: $c_1 = \zeta_1 + \zeta_2 = 0$ и $c_1 \neq 0, \zeta_1 \zeta_2 = \pm 1/2$. Второй вариант нам не подходит, так как при этом, как показывает проверка, невозможно удовлетворить условиям однолистности функции $\omega(\zeta)$. Остается первый вариант $c_1 = 0, \zeta_2 = -\bar{\zeta}_1$. Тогда из второго уравнения (47) находим

$$(48) \quad \zeta_1^2 = \frac{\varepsilon}{4\alpha_{(2)}c^2} [1 - \sqrt{1 - (4\alpha_{(2)}c^2)^2}],$$

причем должно быть $2\sqrt{|\alpha_{(2)}|}c < 1$. Формула (45) принимает вид

$$(49) \quad \omega(\zeta) = \zeta + \frac{\zeta_1^2}{2} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_1} + \frac{1}{\zeta + \zeta_1} \right) = \frac{\zeta^3}{\zeta^2 - \zeta_1^2}.$$

Функция $\omega(\zeta)$ (49) однолистка при $|\zeta| > 1$, и граница L полностью охватывает круговое отверстие, если выполняются неравенства

$$(50) \quad |\zeta_1|^2 \leq 1/3, \quad 1 + |\zeta_1|^2 \leq c.$$

Из первого неравенства (50) с учетом (48) имеем $2\sqrt{|\alpha_{(2)}|}c \leq \sqrt{3/5}$.

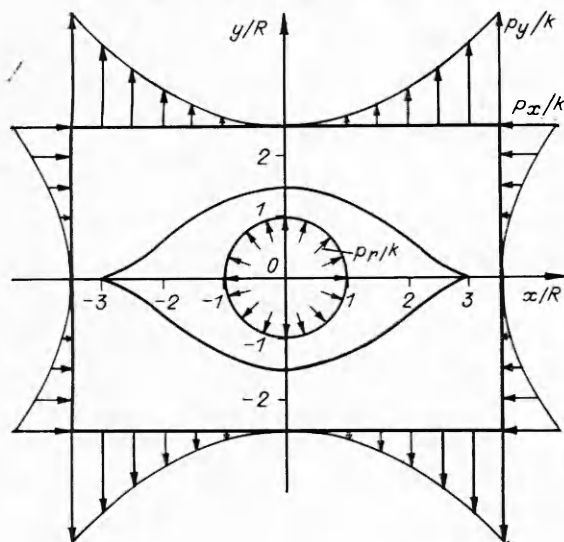
Уравнение (42) с учетом (44), (48) записывается так:

$$(51) \quad \varepsilon p/k - k_1 = -[\ln c^2 + \sqrt{1 - (4\alpha_{(2)}c^2)^2}].$$

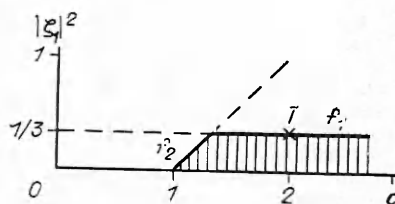
Соотношение (51) — уравнение для c . Но если задавать c , то это будет формула для p/k (какое давление следует приложить к контуру отверстия, чтобы была пластическая зона и выполнялись ограничения (50)).

Пусть $|\zeta_1|^2 = 1/3, c = 2$, при этом $4|\alpha_{(2)}| = 0,15, \varepsilon p/k - k_1 = -2,1863, \sigma_x/k = -0,15(y/R)^2, \sigma_y/k = 0,15(x/R)^2, \tau_{xy} = 0$. Из (49) получаем уравнение контура L в параметрическом виде

$$(52) \quad \frac{x}{R} = \frac{3 \cos \varphi - 2 \cos^3 \varphi}{1/3 + \sin^2 \varphi}, \\ \frac{y}{R} = \frac{2 \sin^3 \varphi}{1/3 + \sin^2 \varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$



Р и с. 1



Р и с. 2

Вид контура (52) представлен на рис. 1, где $p_i = \sigma_{ij}n_j$ (n_j — компоненты нормали к площадке). Область параметров (50), при которых существует решение (49), показана на рис. 2 (заштрихована). Контур L на рис. 1 построен для параметров, соответствующих точке I на рис. 2. Если параметры отвечают прямой f_2 , то граница L будет касаться контура отверстия, если прямой f_1 , то на L будут точки возврата, как на рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Плоская упругопластическая задача. Пластические области у круговых отверстий в пластинках и балках // ПММ.— 1946.— Т. 10, вып. 3.
2. Савін Г. М., Парасюк О. С. Вплив нерівномірно напруженого поля на пластичну зону навколо отвору // Доповіді АН УРСР.— 1948.— № 3.
3. Савін Г. М., Парасюк О. С. Пластичні зони довкола кругового отвору в плоскому нерівномірно напруженому полі // Наук. зап. Львів. державн. ун-ту. Сер. фіз.-мат.— 1949.— Т. 12, вип. 3.
4. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий.— М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.
5. Хома І. Ю. Пластичні зони біля кругового отвору в плоскому нерівномірно напруженому полі при врахуванні нормальних і дотичних зусиль // Прикл. механіка.— 1963.— Т. 9, вип. 2.
6. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий.— Киев: Наук. думка, 1968.
7. Мирсалимов В. М. О бигармонических решениях задач для упругопластических тел при наличии неоднородности напряженного поля / Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук.— 1972.— № 3.
8. Рева Т. Л. О применении рациональных функций для решения упругопластических задач // Прикл. механика.— 1974.— Т. 10, вып. 11.
9. Галин Л. А. Упругопластические задачи.— М.: Наука, 1984.
10. Остросаблин Н. И. Плоское упругопластическое распределение напряжений около круговых отверстий.— Новосибирск: Наука, 1984.
11. Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи.— М.: Наука, 1987.
12. Мухелишвили И. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
13. Тимошенко С. П., Гудвер Дж. Теория упругости.— М.: Наука, 1979.

г. Новосибирск

Поступила 14/XII 1988 г.

ЗАМЕЧАНИЯ РЕЦЕНЗЕНТА

Я взял на себя смелость добавить ссылки, имеющие непосредственное отношение к теме статьи:

14. Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача.— Новосибирск: Наука, 1983.
15. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела.— М.: Наука, 1978.
16. Морозов Е. М., Никшиков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения.— М.: Наука, 1980.
17. Вычислительные методы в механике разрушения/Под ред. С. Н. Атлури.— М.: Мир, 1989.

Ошибки, допущенные в прежних работах [1—9, 11], совершенно правильно критикуются уважаемым Н. И. Остросаблиным. Однако эта критика недостаточна. При изучении конкретных упругопластических задач необходимо иметь в виду следующее.

1. Для решения упругопластической задачи, после удовлетворения дифференциальных уравнений и краевых условий, необходимо проверять выполнение неравенства, вытекающего из условия пластичности, в «упругой» области, так как аналитические методы не гарантируют выполнения этого неравенства в «упругой» области решения. Можно доказать, что в задаче о пластической зоне вблизи отверстия при полиномиальном распределении напряжений вдали от отверстия условие пластичности всегда нарушается в «упругой» области так называемых точных решений, если степень полинома m больше или равна единице. Об этом прекрасно знал Л. А. Галин, который не придавал особого значения таким «точным» решениям, а рассматривал их

лишь в качестве иллюстрации своего метода (для кругового отверстия при плоской деформации). Все «точные» решения [1—11] при $m \geq 1$ (в настоящей статье) не удовлетворяют условию пластичности.

2. Все точные аналитические решения упругопластических задач, полученные в [1—11] и в данной статье, легко получить методом функциональных уравнений [14].

3. К сожалению, точное определение контура границы пластической области не всегда имеет существенное значение, так как пластические деформации в значительной части пластической зоны могут быть пренебрежимо малыми. В этом случае гораздо полезнее приближенное решение, «схватывающее» наиболее «глубокую» зону, в которой имеют место существенные пластические деформации.

4. Поиск точных аналитических решений упругопластических задач — мало-перспективное научное направление, которому посвящена обширная литература (см., например, [6, 9—11, 14, 15]), хотя все существенные точные решения можно пересчитать на пальцах одной руки. Гораздо перспективнее компьютерные методы, самые эффективные из которых излагаются в [16, 17].

25/II 1989 г.

Г. П. Черепанов

ОТВЕТ АВТОРА

1. Известно, что бесконечная плоскость с отверстием является идеализацией задачи для конечной области с отверстием, в случае когда размеры отверстия малы по сравнению с размерами области. Идеализация делается для того, чтобы не решать более сложную задачу для двусвязной области. Решение для бесконечной плоскости с отверстием будет приближенным для конечной области с отверстием, хотя само решение идеализированной краевой задачи может быть найдено точно. Поэтому решением для бесконечной плоскости с отверстием можно пользоваться только в некоторой конечной области вокруг отверстия. Вышесказанное отмечается, например, в [10, 12], а в данной статье специально не оговаривается, так как это общепринятый подход. Если в конечной области без отверстия основное напряженное состояние полиномиальное, то, очевидно, коэффициенты a_j, b_j в (1) должны быть такими, чтобы условие пластичности не достиглось в рассматриваемой области. Для примера из статьи имеем основные напряжения: $(\sigma_y - \sigma_x)/2k + i\tau_{xy}/k = 2\alpha_{(2)}r^2/R^2$, и условие пластичности Треска не будет достигаться, если $2|\alpha_{(2)}|r^2/R^2 < 1$. Данное неравенство определяет соотношение между величиной коэффициента $|\alpha_{(2)}|$ и относительным размером отверстия и конечной области, в которой и должно рассматриваться решение. Для числового примера получаем $r^2 < R^2/2|\alpha_{(2)}| = R^2/2 \cdot 0,0375 = 13,33R^2$, т. е. в этой области допустимо пользоваться решением для бесконечной плоскости с отверстием. Дополнительные напряжения, вызванные наличием отверстия и пластической зоны вокруг него, даются комплексными потенциалами $\Phi_1(z), \Psi_1(z)$ и при больших r имеют порядок $O(1/r^2)$, т. е. быстро убывают и не могут сильно изменить область, в которой можно пользоваться решением для бесконечной плоскости с отверстием.

2. Хотя метод функциональных уравнений из [14] позволяет иногда получить решение путем выбора $\omega(\zeta)$ в виде многочлена или рациональной функции и подбора неизвестных коэффициентов, но уравнение для отображающей функции $\omega(\zeta)$, полученное в [10, 14], решает задачу для общего случая и в данной статье не усложняет решение по сравнению с методом функциональных уравнений.

3. Здесь решается статически определимая задача, когда напряжения и упругопластическая граница находятся независимо от уравнений для деформаций. Для определения деформаций или смещений в пластической зоне надо решать свою систему уравнений и иметь для нее краевые условия на упругопластической границе (см., например, [10, 15]). Для этого и нужно знать упругопластическую границу, на которой значения деформаций или смещений со стороны области упругости будут известны. До решения уравнений для деформаций мы не знаем, где какие деформации в пластической зоне. Если мы имеем точные выражения для упругопластической границы и деформаций на ней, то это не хуже, чем какие-то приближенные выражения.

4. В статье решается конкретная задача и не обсуждается перспективность научных направлений. Автор согласен с тем, что численные методы находят широкое применение и позволяют решать более сложные задачи, для которых нельзя найти аналитическое решение. Но и точные аналитические решения тоже имеют значение и могут, например, использоваться также в качестве теста для проверки численных методов.

Работы [14, 15] можно включить в список литературы, так как они посвящены изучению упругопластических задач, но все же непосредственно задача данной статьи в них не рассматривается, поэтому на эти работы и не было ссылки.

В [16, 17] применяются численные методы решения задач механики. В данной статье численные методы не используются и не обсуждаются. Включение этих работ в список литературы представляется излишним.

7/IV 1989 г.

Н. И. Остроаблин