

## К ФРАКТАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕХОДА МЕДЛЕННОГО ГОРЕНИЯ В ДЕТОНАЦИЮ В ГАЗАХ

К. О. Сабденов, Л. Л. Миньков

Томский государственный университет, 634050 Томск

Сформулированы основные уравнения газодинамики горения на основе понятий «нормальная скорость пламени» и «поверхность горения». Поверхность горения в общем случае турбулентного горения представляется фракталом. Показано, что такое представление и способ построения основных уравнений не противоречат известным ранее результатам, полученным в рамках классической теории горения и статистической теории турбулентности. Изучен переход медленного горения в детонацию при зажигании у закрытой части трубы. Полученные результаты по порядку величин соответствуют экспериментальным данным.

### ВВЕДЕНИЕ

Переход медленного горения в детонацию в газах, несмотря на запросы практики, до сих пор остается неразрешенной проблемой. Основные физические идеи в этом вопросе сформулированы еще в трудах К. И. Щелкина, Я. Б. Зельдовича и др. Но перспективное и конкретное математическое описание переходного периода пока не найдено. Сложность проблемы связана с описанием процессов турбулентного горения газов. В [1] сформулированы три основных требования, которым должна удовлетворять модель турбулентного горения:

- а) в отсутствие турбулентности описывать распространение ламинарного пламени;
- б) быть двухпараметрической;
- в) учитывать хотя бы суммарную кинетику химических реакций.

Модель, предложенная в [1], отвечает всем перечисленным требованиям, но слишком сложна. К тому же, при вычислении длины переходного участка приходится задавать определенные условия, что указывает на неполноту модели. В связи с этим здесь вводится еще одно требование:

- г) модель должна описывать стационарную детонационную волну.

В [1] подробно обсуждаются работы [2, 3] и отмечается, что в [2] отсутствует непрерывный переход ламинарного горения в турбулентное и не учитывается влияние волн сжатия на скорость горения. Если первое существенно, то второе вряд ли. По концепции Щелкина и его экспериментальным данным, скорость горения в первую очередь определяется турбулентностью (быстрым и сильным ростом поверхности горения). Но основной недостаток [2, 3] за-

ключается в неполноте физического описания процессов турбулентного горения.

Не лишена чрезмерной сложности и работа [4], что делает трудным понимание переходного периода как физического явления. Характерное время перехода в детонацию в модели [4] составляет  $\sim 10^{-6}$  с, что на четыре-пять порядков ниже экспериментальных данных, приведенных в [5]. Тем не менее модель [4] удовлетворяет всем вышеперечисленным требованиям.

В [6] сформулирована простая полуэмпирическая теория переходного периода на основе теории фракталов. Несмотря на весьма грубые допущения, она дает неплохие оценки времени и протяженности преддетонационного участка. Настоящая работа является дальнейшим развитием [6] и прямой математической реализацией сценария К. И. Щелкина.

### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Классическая теория горения использует понятие скорости  $W$  химических реакций. Эта величина характеризует превращение одного продукта в другой на атомарном и молекулярном уровнях и является универсальной вне зависимости от масштабов длин и времени, в которых изучается процесс горения. В большинстве практически важных случаев аррениусовская зависимость скорости  $W$  от температуры делает ее существенной только в очень малых масштабах пространства и времени. Далее нам понадобятся понятия скорости нормального распространения пламени  $u_n$  и площади поверхности горения  $S$ . Если в некото-

ром пространстве поверхность  $S$  локализована в объеме  $V$ , то величина  $u_n S_V$ , где  $S_V$  — удельная площадь поверхности пламени, будет иметь смысл скорости химических реакций в объеме  $V$ . Такое определение предполагает, что характерные размеры, по которым определяется  $S_V$ , намного больше толщины зоны химических реакций. Если разбить  $V$  на отдельные фракции  $V_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , то  $S_V = 0$  в таких  $V_i$ , которые полностью заняты продуктами сгорания или свежей смесью. Тогда, если  $C$  и  $1 - C$  — доли (массовая или объемная) свежей смеси и сгоревшего газа в объеме  $V_i$ , то  $S_V(C = 0) = S_V(C = 1) = 0$ . Отсюда следует, что  $S_V = S_V(C)$ .

Заметим, что теперь имеется по крайней мере один параметр с размерностью длины; из него и скорости  $u_n$  (в случае ламинарного пламени) можно составить размерность коэффициента диффузии. Проведенное рассуждение позволяет сформулировать уравнения горения как химическое превращение конечных объемов относительно новых исходных представлений — нормальной скорости горения и площади поверхности пламени. При турбулентном горении появляется еще один параметр с размерностью скорости — среднеквадратичное значение пульсации скорости  $u'$ . Оказывается, что и в этом случае можно однозначно определить явный вид скорости химических реакций и коэффициента диффузии.

Отметим, что проблема перехода медленного горения в детонацию — это, прежде всего, проблема турбулентной скорости химических реакций и турбулентной диффузии пламени (поверхности горения). Если первое определяет фронт горения через количество сгорающих молей в единицу времени в некоторой точке пространства, то второе определяет способность к перемещению поверхности пламени как множества точек с ненулевой скоростью химических реакций. Таким образом, пламя (как ламинарное, так и турбулентное) можно математически определить как решение одного параболического дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Это будет самой простой моделью турбулентного пламени как геометрического объекта. Утверждение о типе уравнения пламени основано не только на имеющихся в распоряжении размерных величинах  $u_n$  [м/с] и  $V, S, S_V$  [1/м], из которых можно составить (см. выше) выражения скорости химических реакций и коэффициента диффузии. В математической физике давно из-

вестны нелинейные параболические уравнения, имеющие решения в виде бегущих волн «переключения»: реагент  $\rightarrow$  продукт [7, 8]. Следующие ниже рассуждения посвящены формулировке указанного уравнения.

Произвольная гладкая поверхность конечной площади в общем случае локализована в конечном объеме. При этом существует связь  $V = V(S)$ . Например, для поверхности, заданной уравнением  $x = b(a - y)^m$  ( $b, m$  — действительные положительные числа) и ограниченной бесконечным цилиндром с фиксированным радиусом  $a$  (рис. 1), справедливы соотношения

$$S = \frac{2\pi}{1+m} ba^{1+m}, \quad V = \pi ba^{2+m}.$$

Исключая отсюда произвольный параметр  $b$ , находим

$$V = \frac{1+m}{2} aS. \quad (1)$$

Для произвольно искривленных поверхностей линейная связь между объемом и площадью нарушается. Можно ожидать, что для фракталов, ввиду их (локальной) самоподобности и однородности, будет выполняться скейлингово соотношение  $V \sim S^n$ ,  $n \in [0; 1]$ , справедливое для произвольного объема из элементов  $V_i$  и частично или полностью ограничивающих их поверхностей  $S_i$ . Такая связь имеет ясную геометрическую трактовку. Рассмотрим две фрактальные поверхности в разрезе (рис. 2). Их площади равны, но различны значения  $n_1$  и  $n_2$ . Поверхности локализованы в разных объемах. Правая больше скомкана и занимает меньший объем, но имеет большую фрактальную размерность  $d_f$ . Это означает, что  $n = n(d_f)$ . При  $d_f = 2$  зависимость между  $V$  и  $S$  должна быть линейной, как в (1). В случае предельно плотной упаковки ( $d_f = 3$ )  $V$  стремится к  $V_0$  и перестает зависеть от  $S$ . Формуле, связывающей  $S$  и  $V$ , придадим вид

$$V = V_0(S/S_0)^n, \quad (2)$$

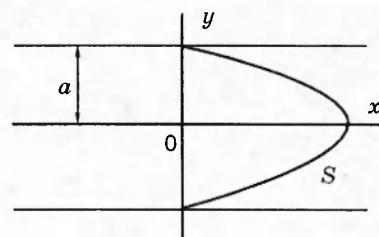


Рис. 1. Сечение поверхности фронта пламени  $S$  в трубе радиуса  $a$

где  $V_0, S_0$  — характерные объем и площадь. Учитывая сказанное, заключаем, что  $n(d_f = 2) = 1, n(d_f = 3) = 0$ . Ясно, что при любом  $n$  из указанного промежутка зависимость (2) монотонна. Значит,  $n$  — неотрицательная величина. Простейшей формой функции  $n(d_f)$  является линейная:  $n = 3 - d_f$ . В этом случае

$$V = V_0(S/S_0)^{3-d_f}, \quad 2 \leq d_f \leq 3, \quad (3)$$

причем (см. ниже аналогию с кривой Коха)  $V_0 \sim a^3, S_0 \sim a^2$ .

Формулу (3), связывающую занимаемый фракталом объем с его площадью и размерностью, более строго можно получить на основе громоздких выкладок. Но аналогичную зависимость в двумерном пространстве легко найти на примере кривой Коха (рис. 3). Толщина кривой на каждом шаге трансформации равна

$$h_k = \frac{L_0 \sin \alpha}{3^k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $L_0$  — начальная длина отрезка, которая трансформируется в кривую Коха. Сама кривая Коха получается в пределе  $k = \infty$ . Длина кривой и ее фрактальная размерность (размерность Хаусдорфа — Безиковича) равны

$$L_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k L_0, \quad d_H = \frac{\ln 4}{\ln 3}.$$

Площадь  $S_k$ , занимаемая кривой на плоскости рисунка, определяется как

$$S_k = L_k h_k = \left(\frac{4}{9}\right)^k L_0^2 \sin \alpha.$$

Последнему выражению придадим следующую форму:

$$\frac{S_k}{L_0^2 \sin \alpha} = \left(\frac{h_k}{L_0 \sin \alpha}\right)^{2-d_H} = \left(\frac{l_k}{L_0}\right)^{2-d_H},$$

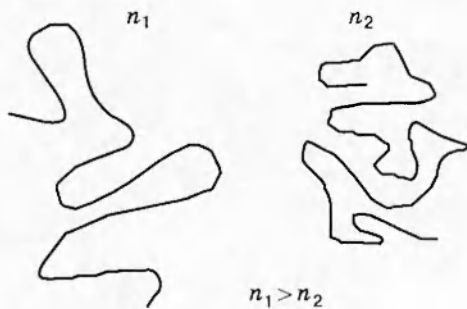


Рис. 2. Разрез двух фрактальных поверхностей

где  $l_k$  — длина звена кривой  $L_k$ . Здесь  $k$ , как и ранее, принимает значения из натурального ряда. Как известно, два счетных множества эквивалентны. Поэтому можно считать, что  $-\infty < k < +\infty$ . Тогда  $S_k$  и  $l_k$  могут произвольно увеличиваться или уменьшаться. Принимая их непрерывными переменными, приходим к двумерному аналогу (3):

$$S \sim l^{2-d_H}, \quad 1 \leq d_H \leq 2,$$

на что указывает здесь цифра 2. Из приведенного анализа, конечно, не следует формула (3), так как последняя относится к трехмерному случаю. Но этот анализ позволяет легко понять (3) как трехмерное обобщение формулы, найденной на основе рассмотрения кривой Коха. Эту кривую можно рассматривать как основу (хотя и грубой, но все же ясной и наглядной) модели турбулентного пламени на плоскости. Найденные связи между площадью и длиной в двумерном случае (как и между объемом и площадью в трехмерном) будут общими вне зависимости от способа построения фрактального объекта [9]. Разными окажутся только численные значения фрактальной размерности и меры Хаусдорфа — Безиковича.

Найдем явный вид скорости  $W$ . Для этого определим входящую в нее величину  $S_V$  следующим образом:

$$S_V = \delta S / \delta V.$$

В произвольном объеме  $\delta V$  значение  $\delta S$  ненулевое только в том случае, если  $\delta V$  занято одновременно и продуктами сгорания, и свежей смесью. Тогда вероятность обнаружить химическую реакцию в произвольном объеме  $\delta V$  пропорциональна вероятности  $C$  того, что  $\delta V$  будет занята свежей смесью, и вероятности  $1 - C$  того, что в  $\delta V$  находятся продукты сгорания.

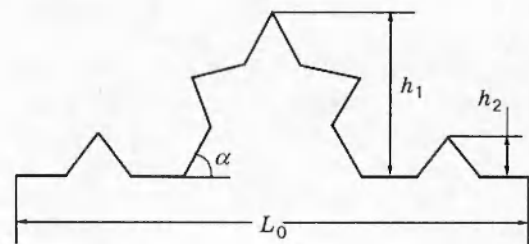


Рис. 3. Кривая Коха как модель турбулентного пламени на плоскости

Следовательно, можно записать

$$S_V = \frac{S}{V} C^{m_1} (1 - C)^{m_2}, \quad (4)$$

где  $m_1, m_2$  — положительные числа. Такая простая форма удовлетворяет указанным выше необходимым условиям  $S_V|_{C=0} = S_V|_{C=1} = 0$ , исключая из рассмотрения поверхности, не имеющие физического смысла как поверхности горения. Степени  $m_1$  и  $m_2$  феноменологически учитывают дополнительные механизмы, влияющие на изменение скорости химических реакций. В настоящей работе полагалось  $m_1 = 1, m_2 = 2$ . О преимуществе такого выбора значений  $m_1, m_2$  сказано ниже.

Если  $S$  — фрактал, то

$$\frac{S}{V} = \frac{1}{a} \left( \frac{S}{S_0} \right)^{d_f - 2}$$

Возможный коэффициент пропорциональности в этом выражении точно определить пока не удается. Скорее всего, это функция фрактальной размерности, но порядка единицы. В настоящей работе этот коэффициент пропорциональности положен равным единице. Размерная величина  $a$  — это радиус трубы. Тогда

$$W = \frac{u_n}{a} \left( \frac{S}{S_0} \right)^{d_f - 2} C(1 - C)^2.$$

Представим  $S$  как сумму площади поверхности пламени при ламинарном горении  $S_0$  и наложенного на него возмущения, вызванного пульсациями скорости  $u'$ . Оба эти фактора определяют положительный прирост объема  $V$ . Но процессы горения стремятся уничтожить любое возмущение поверхности [7]. Тогда для скорости прироста объема  $V$  получим

$$\frac{dV}{dt} = S_0 u_n + B S_0 u' - S u_n,$$

где  $t$  — время,  $B$  — некоторый коэффициент.

Подставим (2) в приведенное уравнение для  $V$ :

$$\frac{dS}{dt} \sim \frac{S^{d_f - 2}}{3 - d_f} (S_0 u_n + B S_0 u' - S u_n).$$

При отсутствии турбулентности площадь поверхности пламени равна  $S_0$ , а  $V = \text{const}$  в любой момент времени. В физически строгих рассуждениях при решении задач на основе излагаемой модели начальное условие для  $S$  должно задаваться в виде

$$S_{t=t_0} = S_0,$$

так как в модели заведомо предполагается существование ламинарного фронта.

Уравнение для  $S$  релаксационное. При  $d_f \rightarrow 3$  и с течением времени характерное время релаксации стремится к нулю. Тогда приближенно

$$u_n \frac{S}{S_0} = u_n + B u'.$$

Эта формула дает интегральную турбулентную скорость горения, но не скорость пламени. Теперь  $W$  примет вид

$$W = \frac{u_n}{a} \left( 1 + B \frac{u'}{u_n} \right)^{d_f - 2} C(1 - C)^2. \quad (5)$$

Легко видеть, что

$$\frac{u_n}{a} \left( 1 + B \frac{u'}{u_n} \right)^s, \quad s = d_f - 2,$$

играет роль константы скорости химических реакций. При  $u'/u_n \gg 1$

$$W \approx \frac{u_n^{1-s} u'^s}{a} B^s C(1 - C)^2.$$

Здесь  $B^s u_n^{1-s} u'^s$  — асимптотическая формула В. Н. Вилюнова для скорости турбулентного горения, которая и является скоростью пламени в пределе больших  $u'/u_n$  [10]. Теперь более ясен и физический смысл  $W$ , определенной по (5):  $W$  — это приведенная скорость химических реакций при макроскопическом описании горения как движущейся поверхности пламени, где каждый ее элементарный участок имеет скорость, направленную вдоль его нормали.

Турбулентное пламя в общем случае движется со скоростью

$$u_\tau = u_n \left( 1 + B \frac{u'}{u_n} \right)^s. \quad (6)$$

Как видно, ламинарное и турбулентное пламена одинаково описываются в рамках общего представления. На основе (5), (6) и приведенных рассуждений легко найти выражение для коэффициента диффузии  $D$  пламени, вид которого должен определяться радиусом трубы и величиной, имеющей размерность скорости. Из физических соображений ясно, что по мере роста  $u'$  и  $s$  величина  $D$  должна расти. Но из (5) видно, что скорости  $u_n, u'$  образуют единый комплекс, обладающий таким свойством и имеющий размерность [м/с], — это скорость турбулентного пламени  $u_\tau$ . Поэтому для нахождения  $D$  необходимо взять  $u_\tau$  и  $a$ :

$$D = 2u_\tau a. \quad (7)$$

Обоснование коэффициента пропорциональности в этом выражении дано ниже. В дальнейшем пренебрегаем изменением молекулярной

массы и считаем  $C$  массовой долей свежей смеси. Она определяется уравнением

$$\rho \frac{\partial C}{\partial t} + \rho u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D \rho \frac{\partial C}{\partial x} - \rho W, \quad (8)$$

где  $\rho$  — средняя плотность газа,  $u$  — скорость газа вдоль оси трубы. Здесь и далее все зависимые переменные считаются осредненными величинами. Так как выражение скорости химических реакций определено, то уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{Q}{c_p} W \quad (9)$$

(где  $T$  — температура,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $p$  — давление,  $Q$  — полный тепловой эффект химических реакций,  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении) совместно с (8) учитывает суммарную кинетику химических реакций, т. е. условие в) выполнено. Уравнения (8) и (9) должны быть дополнены уравнениями импульса, неразрывности, состояния идеального газа и конкретной формой связи  $u' = u'(u)$ .

Подводя итоги вышеизложенному, выпишем систему уравнений газодинамики горения в дивергентном и одномерном по пространству варианте:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma - 1} p + \rho \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} u \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \rho \frac{u^2}{2} \right) = \\ = Q \frac{\ddot{u}_n}{a} K \rho C (1 - C)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho C + \frac{\partial}{\partial x} \rho u C = \\ = 2u_n a \frac{\partial}{\partial x} K \rho \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{u_n}{a} K \rho C (1 - C)^2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) = -\frac{\lambda}{a} \rho u |u|,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \rho u = 0, \quad K = \left( 1 + B \sqrt{\lambda} \frac{|u|}{u_n} \right)^s,$$

где  $\lambda$  — коэффициент сопротивления трубы. Здесь использована следующая связь между  $u'$  и  $u$  [11]:  $u' = \sqrt{\lambda} |u|$ , где числовой коэффициент пропорциональности положен равным единице ввиду неопределенности параметра  $B$ .

Из способа нахождения  $W$  видно, что  $d_f$  зависит от  $u'/u_n$  и степени шероховатости стенок трубы, так как эти факторы непосредственно влияют на свойства поверхности пламени. К сожалению, пока не удается найти

указанную зависимость, поэтому ниже считаем  $d_f$  постоянной величиной. Модель двухпараметрична; условие б) выполнено.

## ЛАМИНАРНОЕ ГОРЕНИЕ

Для рассмотрения первого предельного случая — ламинарного горения — перепишем (8) относительно мольной доли  $Y$ , положив  $u' = 0$  (или  $d_f = 2$ ):

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + u \frac{\partial Y}{\partial x} = 2u_n a \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{u_n}{a} Y(1 - Y)^2.$$

Переходя в систему координат, в которой  $u = 0$ , приходим к задаче нахождения скорости  $u_*$  распространения пламени:

$$\begin{aligned} 2u_n a \frac{d^2 Y}{dx^2} + u_* \frac{dY}{dx} - \frac{u_n}{a} Y(1 - Y)^2 = 0, \\ Y|_{x \rightarrow \infty} = 1, \quad \frac{dY}{dx} \Big|_{x \rightarrow -\infty} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Ее решение легко находится:

$$Y(x) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(x/2a)}, \quad u_* = u_n.$$

Смысл приведенных результатов прост и ясен. Скорость распространения пламени равна экспериментально известной. Распределение температуры

$$T = T_0 + \frac{Q}{c_p} \frac{1}{(1 + \exp(x/2a))^2},$$

где  $T_0$  — температура свежей смеси при  $x \rightarrow \infty$ , отлично от михельсоновского, что естественно. Физические основы изложенной теории предполагают рассмотрение горения на масштабах, много больших михельсоновских. Наличие характерного размера  $2a$  указывает на то, что пламя здесь не является плоской поверхностью, а несколько вытянуто вдоль оси трубы.

Если в (7) вместо 2 взять другое число, то температура продуктов сгорания не будет равняться адиабатической. Это означает, что коэффициент в (7) однозначно определяется из закона сохранения энергии.

Если в определении  $W$  множитель  $1 - Y$  взять в степени, близкой к единице, то вытянутость поверхности горения будет очень малой. Такие поверхности обладают слабой устойчивостью. Например, при  $m_2 = 1$  решение задачи, аналогичной (11), неустойчиво, что выявлено численными расчетами (более подробно этот вопрос обсуждается в «Приложении»).

Степени выше двух дают решения с более вытянутой поверхностью пламени. Характерный размер  $2a$  фронта горения вдоль оси трубы представляется привлекательным в силу простоты и наглядности аналитических решений и непротиворечивости экспериментальной картине умеренной изогнутости фронта ламинарного пламени.

Из результатов настоящего пункта ясно, что здесь условие а) выполнено. Сравнивая приведенную скорость химических реакций для ламинарного горения из (11) с (5), заключаем, что (6) является скоростью пламени в смысле собственного значения уравнения (8), записанного относительно  $Y$  с граничными условиями из (10) при заданном  $u' = \text{const}$ . Нахождение скорости пламени как решение задачи на собственные значения рассматривалось в [12] на основе полуэмпирического подхода и применения функции распределения флуктуации скорости и температуры. Полученное в [12] выражение идентично формуле Вилюнова. Его частный случай при  $s = 1/2$  найден в [13], где для вычисления скорости турбулентного пламени применялась статистическая теория турбулентности.

Если  $u'/u_n \ll 1$ , то  $d_f \approx 2$ . Тогда  $u_\tau \approx u_n(1 + B(d_f - 2)(u'/u_n))$ . Аналогичная формула с  $B(d_f - 2) \approx 1$  предложена в [14]. Так как значения  $d_f$  и  $u'$  коррелированы, при малых  $u'$  добавка к нормальной скорости пламени в формуле для  $u_\tau$  является малой, порядка выше единицы по  $u'$ . При  $u'/u_n \rightarrow \infty$ ,  $d_f \rightarrow 3$  скорость  $u_\tau$  приблизительно равна  $u'$  и не зависит от  $u_n$  [10]. Эти результаты известны, экспериментально проверены и общеприняты.

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Переход медленного горения в детонацию изучался на основе системы (10), для которой масштабные параметры выбраны в виде  $u_* = \sqrt{Q}$ ;  $\rho_* = \rho_0$ ;  $p_* = \rho_0 Q$ ;  $t_* = a/u_n$ ;  $x_* = aM$ ;  $M = \sqrt{Q}/u_n$ . Численно решалась задача, в которой все параметры и переменные безразмерны:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\gamma - 1} p + \rho \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} u \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} p + \rho \frac{u^2}{2} \right) = K \rho C (1 - C)^2, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho C + \frac{\partial}{\partial x} \rho u C &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{2K\rho}{M^2} \frac{\partial C}{\partial x} - K \rho C (1 - C)^2, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) &= -\lambda M \rho u |u|, \\ K &= \left( 1 + BM \sqrt{\lambda} |u| \right)^s, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} \rho u = 0, \quad (15)$$

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{(\text{Re}|u|)^{0,273}}, \quad \text{Re} = \frac{2a\sqrt{Q}}{\nu}.$$

Выражение для  $\lambda$  взято из [15]. Коэффициент кинематической вязкости  $\nu$  считался постоянным.

Сформулируем начальные условия. При выводе (5), (7)–(9) заведомо предполагается наличие фронта горения. Это означает, что (8), (9) принципиально не могут моделировать процесс зажигания, для которого необходимо применять классическую теорию горения. К тому же, задача одномерна по пространству. Поэтому применение (12)–(15) к реальным условиям ограничивается неопределенностью времени действия поджигающей искры и времени формирования пламени до заполнения им всего сечения трубы. Тем не менее можно ввести формально промежуток времени зажигания  $\Delta t$ , по порядку величин совпадающий с истинным временем зажигания. Предположим, что  $\Delta t$  известно, как и полная энергия  $E$ , выделившаяся за это время. Будем считать, что  $\Delta t$  много меньше времени перехода медленного горения в детонацию. Тогда начальную стадию формирования пламени можно представить в виде дополнительных, мгновенных точечных источников в правых частях (12), (13) соответственно:

$$\frac{E'}{M} \delta(t) \delta(x), \quad -\frac{1}{M} \delta(t) \delta(x), \quad E' = \frac{E}{\rho_0 Q S_0 a}. \quad (16)$$

В численных расчетах  $E'$  не варьировалась и полагалась равной единице. Дельта-функции аппроксимировались простой ступенькой с конечной шириной. Теплотери в стенку трубы не учитывались. Начало горения происходит в центре трубы неограниченной длины. Это эквивалентно зажиганию у закрытой части при адиабатических условиях на жестком торце.

Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} p|_{t=0} &= p_0/\rho_0 Q, \quad C|_{t=0} = 1, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad \rho|_{t=0} = 1, \quad (17) \end{aligned}$$

где  $p_0, \rho_0$  — размерные начальные давление и плотность газовой смеси.

Система уравнений (12)–(15) решалась численно по явной 2-го порядка точности по пространственной координате схеме Годунова —

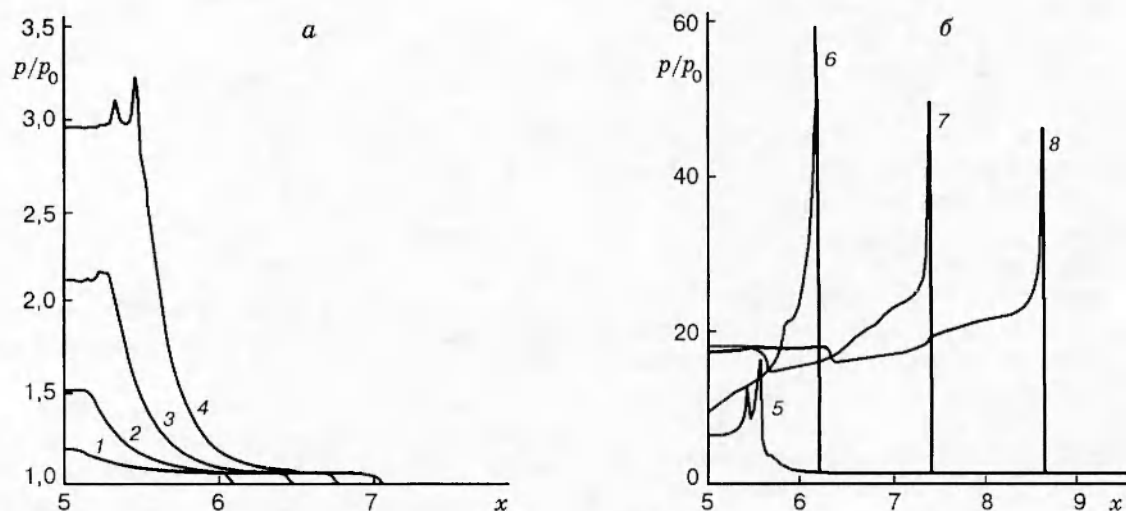


Рис. 4. Распределение давления для смеси  $2\text{H}_2 + \text{O}_2$  при  $t = 5,82$  (1),  $7,92$  (2),  $9,62$  (3),  $11,05$  (4),  $12,00$  (5),  $12,60$  (6),  $13,65$  (7) и  $14,71$  (8)

Колгана [16, 17], причем вторая производная в уравнении диффузии аппроксимировалась неявно.

Аппроксимация источников членов проводилась следующим образом. В уравнениях концентрации и энергии комплекс  $\rho C$  определялся с верхнего временного слоя, а комплекс  $(1 - C)^2$  — с нижнего. В уравнении движения  $\rho u$  определялась с верхнего временного слоя, а  $|u|$  — с нижнего.

Расчетная область  $[0; 10]$  разбивалась на 1000 ячеек. Схемная «диффузия» примерно в семь раз меньше физической.

Расчеты проводили для смесей  $2\text{H}_2 + \text{O}_2$  и  $\text{H}_2 + 2\text{O}_2$  [1] при нормальных условиях. Значения параметров  $B$  и  $s$  взяты равными 10 и 0,9 соответственно. Значение  $B$  подбиралось так, чтобы согласовать расчет с экспериментом, а  $s = 0,9$  легко обосновать. При сильной турбулентности в период ускорения пламени фрактальная размерность поверхности горения должна быть ближе к трем, чем к двум. Результаты расчета приведены в таблице.

Сравнение теории с экспериментом

Смесь	$x_D/2a$		$T_D, c$	
	теория	эксперимент	теория	эксперимент
$2\text{H}_2 + \text{O}_2$	56	38	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
$\text{H}_2 + 2\text{O}_2$	108	92	$4,6 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$

Экспериментальные данные взяты из [5]. Эволюция распределения давления и скорости для смеси  $2\text{H}_2 + \text{O}_2$  приведена на рис. 4, 5. Центру симметрии соответствует  $x = 5$ .

На рис. 4, а ясно видна волна сжатия впереди фронта пламени. Положение последней совпадает со вторым, более высоким скачком давления. В период ускорения во фронте пламени образуются парами небольшие волны сжатия. Первые, отражаясь от «торца», догоняют вторые, бегущие по направлению распространения пламени, и значительно усиливают их. Образовавшаяся впоследствии пересжатая де-

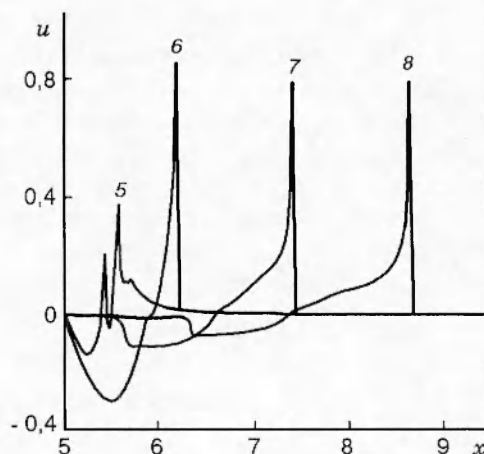


Рис. 5. Распределение безразмерной скорости для смеси  $2\text{H}_2 + \text{O}_2$  (обозначения см. на рис. 4, б)

тонационная волна (кривая *b* на рис. 4, *b*) выходит с течением времени к точке Чепмена — Жуге. Условие *г*) в модели выполнено. Основные размерные параметры, определяющие расстояние  $x_D$  и время  $T_D$  перехода к детонации, те же, что и в [6].

Как видно из таблицы, теоретические результаты сильно различаются по  $T_D$ . Это, возможно, объясняется тем, что началу движения пламени предшествует значительное время формирования самого пламени. Выше указано, что для таких режимов горения изложенная модель неприменима. Если грубо по результатам расчета отбрасывать этот период времени, то  $T_D \sim 3 \cdot 10^{-3}$  и  $1 \cdot 10^{-2}$  с, что более приемлемо. Соответственно уменьшается разница в значениях  $x_D$ . Учитывая, что речь идет о быстропотекающем процессе, модель можно считать удовлетворительной.

## ВЫВОДЫ

1. Сформулированная система уравнений газодинамики горения позволяет рассчитывать процессы ламинарного и турбулентного горений, принципиально не разделяя их.

2. Введены понятия приведенной скорости химических реакций и коэффициента диффузии поверхности горения (пламени).

3. В зависимости от условий горения, которые проявляются как геометрические факторы, меняются численные значения приведенной скорости химических реакций и коэффициента диффузии пламени, но не форма указанных констант.

4. Модель не описывает и принципиально не может описать известное из экспериментов возникновение детонационной волны на некотором (относительно небольшом) расстоянии от фронта пламени, так как приведенная скорость химических реакций не зависит в явном виде от температуры.

5. Это означает, что значения длины переходного участка и времени перехода, найденные по настоящей модели, надо рассматривать как первые приближения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Выше было отмечено, что задача о распространении пламени с  $m_2 = 1$  неустойчива. Поясним, как это проявляется. Численное решение (12)–(17) с  $m_2 = 1$  при полном отсутствии турбулентности дает переход горения в

детонацию. Причем первоначальное возмущение (волна сжатия) впереди фронта пламени, возникшее от «искры» в виде дельта-функции, не наблюдается. Фронт пламени сразу же приобретает скорость, близкую к скорости звуковой волны сжатия, что в конечном итоге приводит к детонации. Это противоречит физике явления и свидетельствует о проявлении неустойчивости. При  $m_2 = 2$  картина совершенно иная. Волна сжатия убеждает вперед, а пламя движется со скоростью порядка  $(\rho_0/\rho_1 - 1)u_n$ , где  $\rho_1$  — плотность газа за фронтом пламени.

Ясно, что уравнение для  $C$  относится к классу, рассмотренных А. Н. Колмогоровым, И. Г. Петровским и Н. С. Пискуновым (теория КПП) еще в 1938 г. [7]. Ими же была доказана устойчивость таких уравнений относительно финитных и неподвижных возмущений. Поэтому, трактуя «странное» поведение пламени в наших расчетах как проявление его неустойчивости, мы не обнаруживаем противоречия с теорией КПП.

Рассмотрим вопрос о коэффициенте диффузии пламени (возможно, название подобрано неудачно). Если в турбулентном горении он может быть объяснен наличием хаотических пульсаций скорости  $u'$  и массовой доли продукта (или свежей смеси)  $C'$  с применением известной градиентной гипотезы:

$$C' = l' \frac{dC}{dx},$$

где  $l'$  — путь смешения, то в случае ламинарного горения физическая трактовка формулы  $D = 2au_n$  становится трудной задачей, так как мы приходим к парадоксальному выводу: гладкий невозмущенный фронт пламени при описании горения в понятиях площади поверхности  $S$  и нормальной скорости  $u_n$  должен иметь коэффициент диффузии  $D$ , равный  $2au_n$ . И при этом не нарушаются все основные законы сохранения как при ламинарном, так и при турбулентном горении. Возможно, в скором будущем в случае ламинарного горения все-таки удастся придать  $D$  конкретный и ясный физический смысл.

Выше было отмечено, что к асимптотической формуле Виллюнова приводят по сути совершенно различные подходы. Можно уверенно говорить, что эта формула представляет собой один из фундаментальных результатов теории турбулентного горения.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев М. А., Степанов А. М. Режимы ускорения газового пламени в трубах // Физика горения и взрыва. 1987. Т. 23, № 2. С. 31–40.
2. Hjertager В. Н. // Combust. Sci. Techn. 1982. V. 27. P. 5.
3. Boni A. A., Chapman M., Cook J. L., et al. // Prog. Astronaut. and Aeronaut. 1978. V. 58. P. 379.
4. Смирнов Н. Н., Панфилов И. И. Режимы развития горения и детонации в газовых смесях // Физика горения и взрыва. 1992. Т. 28, № 5. С. 72–80.
5. Бартълме Ф. Газодинамика горения. М.: Энергоиздат, 1981.
6. Сабденев К. О. Фрактальная теория перехода медленного горения в детонацию в газах // Физика горения и взрыва. 1995. Т. 31, № 5. С. 106–112.
7. Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
8. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику: Учеб. руководство. М.: Наука, 1990.
9. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
10. Виллюнов В. Н. О скорости турбулентного горения. Критериальное описание // Физика горения и взрыва. 1975. Т. 11, № 1. С. 51–56.
11. Зельдович Я. Б. К теории возникновения детонации в газах // Журн. техн. физики. 1947. Т. 17, № 3. С. 3–26.
12. Белоусов П. В., Дик И. Г. Распространение зоны горения по турбулентной среде // Физика горения и взрыва. 1985. Т. 21, № 4. С. 32–38.
13. Кузнецов В. Р. Распространение пламени в турбулентном потоке реагирующей смеси // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 5. С. 3–15.
14. Щелкин К. И., Трошин Я. К. Газодинамика горения. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
15. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
16. Колган В. П. Применение принципа минимальных значений производных к построению схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Учен. записки ЦАГИ. 1972. Т. 3, № 6. С. 68–77.
17. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С. К. Годунова. М.: Наука, 1976.

*Поступила в редакцию 23/IX 1996 г.,  
в окончательном варианте — 18/IV 1997 г.*