ПМТФ, № 2, 1962

СТАЦИОНАРНОЕ КОНВЕКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ

С. А. Регирер

(*Москва*)

Рассматриваются стационарная конвекция и устойчивость вязкой проводящей жидкости, заполняющей круглый вертикальный канал, при наличии джоулевой диссипации и азимутального магнитного поля.

1. Уравнения магнитной гидродинамики для конвективных процессов в вертикальных каналах [1] обладают семейством точных решений в цилиндрических координатах [1]

$$v_r = v_\theta = 0, \qquad v_z = v(r, \theta), \qquad H_r = 0, \qquad H_\theta = \frac{2\pi r j}{c}, \qquad H_z = H_z(r, \theta)$$

$$T = t(r, \theta) + z\gamma, \qquad T_e = t_e(r, \theta) + z\gamma \qquad (\gamma, j = \mathrm{const}) \tag{1.1}$$

причем скорость v, индуцированное магнитное поле H_z и температура в канале t и в окружающей среде t_e удовлетворяют уравнениям

$$\eta \triangle v + \varkappa \frac{H_\theta}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\theta} + \rho\beta g t = 0, \qquad \frac{H_\theta}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \nu_m \triangle H_z = 0 \tag{1.2}$$

$$c_v \rho v \gamma = k \triangle t + \frac{j^2}{\sigma}, \qquad \triangle t_e = 0 \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$$

Рассмотрим при помощи этих уравнений задачу о конвективном течении вязкой жидкости в круглом цилиндрическом канале радиуса r_0 при наличии джоулевой диссипации и азимутального магнитного поля, созданных продольным электрическим током $j_z = j$, пропускаемым через жидкость.

Предельные условия для системы (1.2) состоят в следующем: на оси канала ($r = 0$) скорость, магнитное поле и температура конечны; на стенке канала ($r = r_0$) скорость и индуцированное магнитное поле обращаются в нуль, а температура и тепловой поток непрерывны; при $r \to \infty$ в массиве задан горизонтальный тепловой поток q_e. Ограничиваясь рассмотрением только свободной конвекции, потребуем также, чтобы расход жидкости через сечение канала был равен нулю. Заметим, что обращение H_z в нуль при $r = r_0$ связано с предположением о диэлектричности массива.

Рассматриваемая задача решалась в работе [1] для простого частного случая, когда вертикальный градиент температуры γ был равен нулю.

Введем безразмерные величины

$$r' = \frac{r}{r_0}, \quad v' = v\frac{r_0}{\nu}, \quad H_\theta' = \frac{cH_\theta}{2\pi r_0 j}, \quad H_z' = \frac{cH_z}{2\pi r_0 j}, \quad t' = \frac{t}{|\gamma| r_0}$$

$$t_e' = \frac{t_e}{|\gamma| r_0}, \quad \chi = \frac{k_e}{k}, \quad q_e' = \frac{q_e}{|\gamma| k_e}, \quad \Phi' = \frac{r_0 j^2}{c_v \eta |\gamma| \sigma}, \quad P = \frac{c_v \eta}{k}$$

$$P_m = \frac{\nu}{\nu_m}, \quad M = \frac{2\pi\mu r_0^2 j}{c^2}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}, \quad G = \frac{\beta g |\gamma| r_0^4}{\nu^2}, \quad R = PG, \quad \delta = \frac{\gamma}{|\gamma|}$$

---

[1] Здесь и далее сохранены обозначения статьи [1].

Отбрасывая далее штрихи, запишем в новых переменных уравнения (1.2) и сформулированные выше предельные условия

$$\triangle v + \frac{M^2}{P_m}\frac{\partial H_z}{\partial \theta} + Gt = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{P_m}\triangle H_z = 0$$
$$\delta v = \frac{1}{P}\triangle t + \Phi, \qquad \triangle t_e = 0 \qquad (1.3)$$

$$v,\ H_z,\ t \text{ конечны при } r = 0$$
$$v = H_z = 0, \quad t = t_e, \quad \frac{\partial t}{\partial r} = \chi\frac{\partial t_e}{\partial r} \quad \text{при } r = 1 \qquad (1.4)$$
$$\frac{\partial t_e}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial t_e}{\partial \theta}\sin\theta \to -q_e \quad \text{при } r \to \infty$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 rv(r, \theta)\, dr\, d\theta = 0$$

Решение системы (1.3), (1.4) при отличных от нуля Φ и q_e будем искать в виде

$$v = u_0(r) + u_1(r)\cos\theta, \qquad t = t_0(r) + t_1(r)\cos\theta$$
$$H_z = h_0(r) + h_1(r)\sin\theta, \qquad t_e = t_{e0}(r) + t_{e1}(r)\cos\theta \qquad (1.5)$$

Тем самым предполагается, что асимметричная составляющая скорости имеет различное направление по обе стороны плоскости $\theta = \pm\pi/2$, которая перпендикулярна горизонтальному тепловому потоку на бесконечности.

Подстановка (1.5) в (1.3), (1.4) приводит к уравнениям

$$D_0 u_0 + G t_0 = 0, \quad D_0 h_0 = 0, \quad \delta u_0 = \frac{1}{P}D_0 t_0 + \Phi, \quad D_0 t_{e0} = 0 \qquad (1.6)$$

$$D_1 u_1 + \frac{M^2}{P_m}h_1 + G t_1 = 0, \qquad -u_1 + \frac{1}{P_m}D_1 h_1 = 0, \quad \delta u_1 = \frac{1}{P}D_1 t_1$$
$$D_1 t_{e1} = 0 \qquad \left(D_\nu = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2}\right) \qquad (1.7)$$

с предельными условиями

$$u_i,\quad h_i,\quad t_i \text{ конечны при } r = 0 \quad (i = 0, 1)$$
$$u_i = h_i = 0, \quad t_i = t_{ei}, \quad t_i' = \chi t'_{ei} \quad \text{при } r = 1$$
$$t_{e1}'\cos^2\theta + \frac{1}{r}t_{e1}\sin^2\theta \to -q_e \quad \text{при } r \to \infty \qquad (1.8)$$
$$\int_0^1 r u_0(r)\, dr = 0$$

Системы (1.6) и (1.7) решаются независимо. Каждая из них сводится к одному уравнению четвертого порядка, общее решение которого выражается через цилиндрические функции. Удовлетворяя условиям (1.8), получим следующие окончательные формулы:

$$v = \frac{\Phi\delta}{2F_0}[2F_0 + (\lambda_0 I_{00} - 2I_{10})J_0(\lambda_0 r) + (2J_{10} - \lambda_0 J_{00})I_0(\lambda_0 r)] +$$
$$+ \frac{2q_e\lambda_1^2\cos\theta}{P\delta(F_1 - f_1)}\left[\frac{J_1(\lambda_1 r)}{J_{11}} - \frac{I_1(\lambda_1 r)}{I_{11}}\right] \qquad (1.9)$$

$$H_z = \frac{2q_e P_m \sin\theta}{P\delta(F_1 - f_1)}\left[2r - \frac{J_1(\lambda_1 r)}{J_{11}} - \frac{J_1(\lambda_1 r)}{I_{11}}\right] \tag{1.10}$$

$$t = \frac{\Phi\delta\lambda_0^2}{2GF_0}\left[(\lambda_0 I_{00} - 2I_{10}) J_0(\lambda_0 r) - (2J_{10} - \lambda_0 J_{00}) I_0(\lambda_0 r)\right] - \\ - \frac{2q_e\cos\theta}{F_1 - f_1}\left[\frac{2M^2 r}{R\delta} + \frac{J_1(\lambda_1 r)}{J_{11}} + \frac{I_1(\lambda_1 r)}{I_{11}}\right] \tag{1.11}$$

$$t_e = \frac{\Phi\delta\lambda_0^2}{GF_0}\left(\lambda_0 J_{00} I_{00} - J_{00} I_{10} - J_{10} I_{00} - \frac{RF_0}{2\chi\lambda_0^2\delta}\ln r\right) - \\ - q_e\cos\theta\left\{r - \frac{1}{r}\left[1 + \frac{4\lambda_1^4}{R\delta(F_1 - f_1)}\right]\right\} \tag{1.12}$$

$$\lambda_0^4 = -R\delta, \qquad \lambda_1^4 = -(M^2 + R\delta), \qquad J_{\nu\mu} = J_\nu(\lambda_\mu), \qquad I_{\nu\mu} = I_\nu(\lambda_\mu)$$

$$F_0 = J_{00} I_{10} - J_{10} I_{00}, \qquad F_1 = \lambda_1\left(\frac{J_{01}}{J_{11}} + \frac{I_{01}}{I_{11}}\right), \qquad f_1 = 2\left(1 + \frac{M^2 - \chi\lambda_1^4}{M^2 + \lambda_1^4}\right)$$

Осесимметричная часть найденного решения не связана с магнитогидродинамическим взаимодействием и определяется только величиной джоулевой диссипации. Если одновременно устремить Φ и M^2 к нулю, то в формулах (1.9), (1.11), (1.12) останутся лишь члены, отражающие асимметричную часть процесса, которые известны из обычной гидродинамической теории [2]. В предельном случае, когда Φ конечно и $M^2 \to \infty$, с ростом магнитного поля асимметричная часть потока подавляется. В этом легко убедиться, введя в (1.9) функции Томсона и их асимптотические представления при больших $|\lambda_1|$ (см., например, [1]).

2. Исследуем далее трансцендентные уравнения

$$F_0(z) = J_0(z^{1/4}) I_1(z^{1/4}) - J_1(z^{1/4}) I_0(z^{1/4}) = 0 \tag{2.1}$$

$$F_1(z) - f_1(z) = z^{1/4}\left[\frac{J_0(z^{1/4})}{J_1(z^{1/4})} + \frac{I_0(z^{1/4})}{I_1(z^{1/4})}\right] - 2\left(1 + \frac{M^2 - \chi z}{M^2 + z}\right) = 0 \tag{2.2}$$

Обозначим через z_0 корень уравнения (2.1), которому соответствует наименьшее положительное значение $R_0 = -\delta z_0$; аналогично определим z_1 как корень (2.2), которому соответствует наименьшее положительное значение $R_1 = -\delta(M^2 + z_1)$. Очевидно, что при $R = R_0$ и $R = R_1$ решение (1.9) — (1.12) теряет устойчивость.

Корни уравнения (2.1) не зависят от M^2 и χ; все они положительны и наименьший из них $z_0 \approx 451$ лежит между первым и вторым корнями функции $J_1(z^{1/4})$. Критическое число Рэлея, определяемое через z_0, есть $R_0 = z_0$, а соответствующий критический градиент температуры отрицателен ($\delta = -1$).

При отсутствии магнитного поля ($M^2 = 0$) наименьший вещественный корень уравнения (2.2) также положителен и всегда меньше первого корня функции $J_1(z^{1/4})$. Поэтому соответствующее ему критическое число Рэлея есть $R_1(0, \chi) = z_1(0, \chi)$ и $R_1(0, \chi) < R_0$. Значения $R_1(0, \chi)$ вычислены в работе [2].

В предельном случае бесконечной теплопроводности массива ($\chi \to \infty$) и при конечной величине поля $z_1(M^2, \infty)$ совпадает с первым корнем $J_1(z^{1/4})$. Поэтому $R_1(M^2, \infty) = M^2 + z_1 \approx M^2 + 215{,}8$. Легко видеть, что при слабых полях, как и в обычной гидродинамике, $R_1(M^2, \infty) < R_0$, а при бо́льших может иметь место обратное неравенство.

В общем случае корни уравнения (2.2) могут быть как положительными, так и отрицательными. Используя численный расчет вместе с некоторыми оценками, удается установить, что $R_1(M^2, \chi)$ есть возрастающая функция своих аргументов ($M^2 \geqslant 0$, $\chi \geqslant 0$), причем критический градиент температуры всегда отрицателен ($\delta = -1$), так как $z_1(M^2, \chi) + M^2 > 0$, Заметим, что нулевое значение z, хотя оно и удовлетворяет уравнению (2.2), не является собственным числом задачи. Исключение составляет специальный случай, когда $M^2 = 96(\chi + 1)$. Это обнаруживается путем непосредственного решения исходных уравнений при $R\delta + M^2 = 0$.

Так как $z_1(M^2, \chi)$ стремится к конечному пределу при $M^2 \to 0$, то $f_1(z)$, а вместе с ней и корень z_1 при $M^2 \ll 1$ практически не зависят от M^2. Следовательно, для слабых полей

$$R_1(M^2, \chi) \approx z_1(0, \chi) + M^2 \tag{2.3}$$

Возрастание M^2 приводит к убыванию z_1, причем $z_1 = 0$ при $M^2 = 96(\chi + 1)$. Справедливы неравенства

$$z_1 \geqslant 0, \quad R_1 \geqslant M^2 \quad \text{при } M^2 \leqslant 96(\chi + 1)$$
$$z_1 < 0, \quad R_1 < M^2 \quad \text{при } M^2 > 96(\chi + 1)$$

показывающие, что увеличение R_1 с ростом M^2 ослабляется.

Чтобы исследовать асимптотическое поведение $R_1(M^2, \chi)$ для $M^2 \gg 1$, воспользуемся тем, что тогда $z_1 < 0$. Для отрицательных z имеем

$$\overline{J_0(z^{1/4})} = I_0(z^{1/4}), \qquad \overline{z^{-1/4} J_1(z^{1/4})} = z^{-1/4} I_1(z^{1/4})$$

(чертой обозначены комплексно сопряженные величины). С их помощью (2.2) может быть переписано в виде [1]

$$|z|^{1/4} \psi(|z|^{1/4}) \cos\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2} + \beta(|z|^{1/4})\right] = 1 + \frac{M^2 - \chi z}{M^2 + z} \tag{2.4}$$

где

$$\frac{J_0(z^{1/4})}{J_1(z^{1/4})} = \psi(|z|^{1/4}) \exp\frac{i\pi}{2} \beta(|z|^{1/4})$$

Вещественные функции $\psi(|z|^{1/4})$ и $\beta(|z|^{1/4})$ при возрастании $|z|$ от 0 до ∞ убывают соответственно от $+\infty$ до $+1$ и от -0.5 до -1 (см. [3], стр. 366). Левая часть уравнения (2.4) есть монотонно возрастающая функция $|z|$, равная двум при $|z| = 0$. Используя это обстоятельство, рассуждением от противного легко показать, что при $M^2 \to \infty$ корень уравнения (2.4) также неограниченно возрастает по модулю, но при этом всегда $z_1 + M^2 > 0$.

Поэтому большие по модулю корни (2.4) должны удовлетворять приближенному уравнению

$$\frac{\sqrt{2}}{2} |z|^{1/4} \approx 1 + \frac{M^2 - \chi z}{M^2 + z} \qquad (z < 0) \tag{2.5}$$

которое выведено на основе отмеченных выше свойств функций ψ и β.

Отсюда получаем

$$R_1 = M^2 + z_1 \approx \frac{2z_1(\chi + 1)}{4 - \sqrt{2}|z_1|^{1/4}} \approx \sqrt{2}|z_1|^{3/4}(\chi + 1) \sim \sqrt{2} M^{3/2}(\chi + 1) \tag{2.6}$$

Асимптотическая формула (2.6) справедлива только при $M^2 \gg 96(\chi + 1)$, когда z_1 отрицательно и велико по модулю.

3. Результаты предыдущего раздела позволяют сделать некоторые выводы относительно устойчивости рассматриваемых конвективных течений.

Будем называть потерей устойчивости первого рода или разрушением течения случай, когда при достижении критического числа Рэлея $R^\times$ ста-

[1] Аналогичное преобразование позволяет доказать высказанное ранее утверждение об отсутствии отрицательных корней у уравнения (2.1).

новится невозможным течение, характеризуемое формулами (1.5) — при этом коэффициенты в формулах (1.9) — (1.12) неограниченно возрастают. Потерей устойчивости второго рода назовем случай, когда при достижении критического числа Рэлея $R^\times$ на стационарное движение или состояние равновесия, существующее при $R < R^\times$, накладывается критический режим, существующий только при $R = R^\times$. Оба этих частных вида потери устойчивости можно встретить в задачах обычной гидродинамической теории конвекции [2,4].

Характер потери устойчивости зависит от значений Φ и q_e. Возможны следующие частные случаи:

(а) Случай $\Phi \neq 0$, $q_e \neq 0$. При $R = R_1$ и $R = R_0$ происходит разрушение течения.

(б) Случай $\Phi \neq 0$, $q_e = 0$. При $R = R_1$ происходит потеря устойчивости второго рода: на стационарный осесимметричный процесс накладывается критический асимметричный. Решение при $R = R_1$ имеет вид (1.5), где u_0, t_0, t_{e0} определены так же, как и в (1.9) — (1.12), и

$$\begin{gathered} u_1(r) = C\,[J_1(\lambda_1 r)\, I_{11} - J_{11} I_1(\lambda_1 r)] \qquad (C = \mathrm{const}) \\ h_1(r) = \frac{CP_m}{\lambda_1^2}\{2J_{11}I_{11}r - [J_1(\lambda_1 r)\, I_{11} + J_{11} I_1(\lambda_1 r)]\} \\ t_1(r) = -\frac{CP}{\lambda_1^2}\left\{\frac{2M^2}{R} J_{11}I_{11}r - [J_1(\lambda_1 r)\, I_{11} + J_{11} I_1(\lambda_1 r)]\right\} \\ t_{e1}(r) = 2CJ_{11}I_{11}\lambda_1^2 / Gr \end{gathered} \tag{3.1}$$

При $R = R_0$ течение разрушается без возникновения асимметрии.

(в) Случай $\Phi = 0$, $q_e \neq 0$. При $R = R_1$ происходит разрушение асимметричного течения; при $R = R_0$ наступает потеря устойчивости второго рода: на стационарный асимметричный процесс накладывается критический осесимметричный. Решение при $R = R_0$ имеет вид (1.5), где u_1, h_1, t_1, t_{e1} те же, что и в (1.9) — (1.12), и

$$\begin{gathered} u_0(r) = C\,[J_0(\lambda_0 r)\, I_{00} - J_{00} I_0(\lambda_0 r)] \qquad (C = \mathrm{const}) \\ t_0(r) = \frac{C\lambda_0^2}{G}[J_0(\lambda_0 r)\, I_{00} + J_{00} I_0(\lambda_0 r)] \\ t_{e0}(r) = t_0(1) = 2CJ_{00}I_{00}\lambda_0^2 / G \end{gathered} \tag{3.2}$$

(г) Случай $\Phi = 0$, $q_e = 0$. При $R = R_1$ и $R = R_0$ происходит потеря устойчивости равновесия второго рода и возникают асимметричный ($R = R_1$) или осесимметричный ($R = R_0$) критические режимы, описываемые формулами (3.1) с соответствующими тригонометрическими множителями или (3.2).

Последние два случая не могут встретиться в задачах с конечной проводимостью жидкости и приводятся лишь для удобства сравнения с расчетом, выполненным при отсутствии поля и диссипативного разогрева [2].

Принимая во внимание результаты п. 2, можно утверждать, что для слабых полей $R_1 < R_0$ и неустойчивость того или иного рода наступает всегда при $R = R_1$, причем начало неустойчивости затягивается с ростом магнитного поля. Для сильных полей $R_1 > R_0$ и неустойчивость возникает при $R = R_0$; это критическое число, так же как и вся осесимметричная часть процесса, от магнитного поля не зависит.

Зависимость R_1 от M^2 при $M^2 \ll 1$ оказывается квадратичной, подобно некоторым другим задачам [5, 6]. Асимптотическое же поведение $R_1(M^2, \chi)$ существенно отличается от найденных в работе [5] формул $R^\times \sim M$ и $R^\times \sim M^2$, относящихся к случаям, когда внешнее магнитное поле параллельно или перпендикулярно плоскости раздела асимметричной части