Физика горения и взрыва, 1996, т. 32, № 2

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПЕНЫ

УДК 532.529+534.19

В. С. Суров

**Челябинский государственный университет,
454136 Челябинск**

В рамках дискретной модели исследуются акустические свойства пен. Рассчитана собственная частота пульсаций пузырей пены, включая случай ударно-сжатой пены. Отмечено совпадение скоростей распространения малых возмущений, рассчитанных по «послойной» модели, с данными по континуальной модели газожидкостной смеси.

В работах [1, 2] с использованием «кубической» модели пены исследовалось взаимодействие ударных волн (УВ) со средами пенной структуры. Заниженные результаты для осредненных значений давления в «прошедших» и «отраженных» УВ по сравнению с данными по равновесной модели в [2] объяснялись потерями энергии на возбуждение колебаний пузырей пены. В [3] рассмотрена другая модификация дискретной модели (так называемая «послойная» модель пены) и показано, что полученные с ее использованием результаты согласуются с рассчитанными по модели Рахматулина и с имеющимися экспериментальными данными. Поэтому ниже использовалась именно эта модель. По существу, различие в указанных модификациях дискретной модели пены связано с предположением о полном (для «послойной») или частичном (для «кубической») увлечении жидкости в волнах возмущений.

Отметим также, что некоторые экспериментальные факты по взаимодействию УВ с пенами могут быть объяснены только с помощью дискретной модели пены [1, 3].

В рамках дискретной модели пены, используемой для одномерных расчетов, движение пленок жидкости, перемещающихся под действием перепада давлений в смежных слоях, описывается системой N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du^i}{dt} = \frac{1}{\rho_l^0 \delta_l} \Delta p^i, \tag{1}$$

где u^i — скорость движения i-й пленки жидкости; ρ_l^0 — физическая плотность жидкости; $\Delta p^i = p^i - p^{i-1}$ — перепад давлений по разные стороны i-й пленки; $\delta_l = \delta_{g0}/((\delta_{g0} + 1)\rho_l^0/\rho_{f0} - 1)$ — толщина пленки жидкости [3]; δ_{g0} — размер газовой прослойки; ρ_{f0} — плотность пены; N — общее число пленок жидкости, составляющих пену. В приведенных уравнениях не учитывалась инерция газа, находящегося между пленками жидкости, а также фазовые превращения. Процессы в газовых слоях считались адиабатическими. Следовательно, текущие значения давления p^i и плотности газа ρ_g^i в i-м слое газа связаны с начальными p_0 и ρ_{g0} (пена однородна) соотношениями

$$p^i = p_0(\rho_g^i/\rho_{g0})^\gamma, \tag{2}$$

где γ — показатель адиабаты газа. Уравнения (1), (2) для внутренних слоев пены

$(2 \leqslant i \leqslant N-1)$ можно переписать в виде

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{p_0}{\rho_l^0 \delta_l \delta_{g0}^\gamma}\left[(x_{i+1}-x_i)^\gamma - (x_i - x_{i-1})^\gamma\right], \tag{3}$$

где x_i — координата i-й пленки жидкости. Крайние слои ($i = 1$; N) используются для постановки граничных условий.

Соотношение (3) при $\gamma = 1$ по внешнему виду совпадает с уравнениями движения связанных линейных осцилляторов, для свободных колебаний которых в [4] получено точное решение. По аналогии с [4] s-ю гармонику собственной частоты пульсаций пузырей пены ω можно вычислить из соотношения

$$\omega_s = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{p_0}{\rho_l^0 \delta_l \delta_{g0}}}\,\sin\frac{s\pi}{2\,(N+1)}\,. \tag{4}$$

Из всего набора собственных частот практический интерес имеет та, для которой соседние ячейки пены колеблются в противофазе, т. е. когда $s = N$. Кроме того, учитывая, что N достаточно большое число (толщина слоя пены существенно превышает размеры пузырей), так что $\sin(s\pi/2\,(N+1)) \approx 1$, из (4) получим окончательное выражение для собственной частоты колебаний пузырей пены:

$$\omega = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{p_0}{\rho_l^0 \delta_l \delta_{g0}}}. \tag{5}$$

В случае $\gamma \neq 1$ для определения собственной частоты пульсаций пузырей пены необходимо численно проинтегрировать систему уравнений (3), для чего, например, четные слои пены смещались на некоторое расстояние от положения равновесия и в дальнейшем исследовалось возникающее при этом колебательное движение системы. Заметим, что от способа «возбуждения» системы ее собственная частота не зависит, что также подтверждается численными расчетами.

На рис. 1 представлена зависимость частоты ω от плотности газожидкостной смеси. При численном интегрировании системы (3) использовался явный метод Эйлера. Результаты численного расчета при $\gamma = 1$ полностью совпали с полученными значениями по формуле (5), что свидетельствует о приемлемой точности используемого численного метода. Из рис. 1 видно, что с увеличением плотности газожидкостной смеси кривые, соответствующие различным γ, сближаются. Это естественно, так как определяющим фактором становится не сжимаемость газа, заполняющего пузыри пены, а инерционные свойства несущей жидкости.

Отметим, что формула (5) может быть использована для оценки частоты собственных колебаний пены, сжатой УВ. При этом вместо p_0 необходимо использовать значение давления p_f в прошедшей УВ, рассчитанное по равновесной модели [3], а для толщины газовой прослойки δ_g (δ_l остается неизменным и после сжатия пены) воспользоваться выражением $\delta_g = (\rho_l^0 - \rho_f)/(\rho_f/\delta_l - \rho_l^0)$, где ρ_f — равновесное значение плотности пены в прошедшей УВ. Так, для одного варианта расчета из [3] (число Маха $\mathrm{M}_s = 1{,}3$, $\delta_{g0} = 1$ мм) при $\rho_{f0} = 50$ кг/м^3 частота собственных колебаний пузырей пены, рассчитанная по формуле (5), равна 30 кГц, в то время как в численном расчете — 37 кГц, а при $\rho_{f0} = 200$ кг/м^3 — соответственно 15 и 18 кГц.

Другая важная акустическая характеристика пены — скорость распространения малых возмущений. Выражение для скорости звука, полученное в рамках континуальной

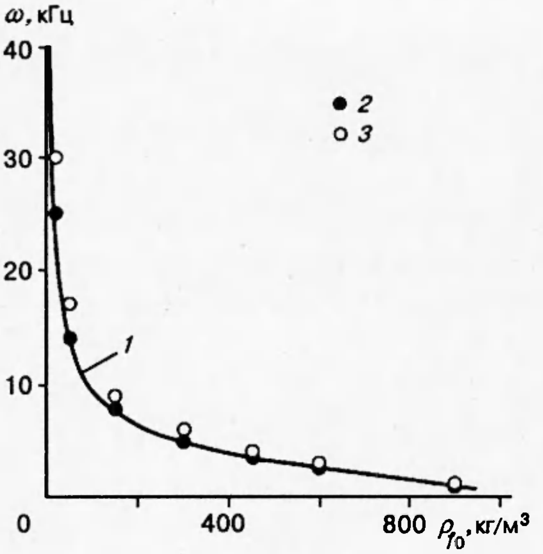

Рис. 1

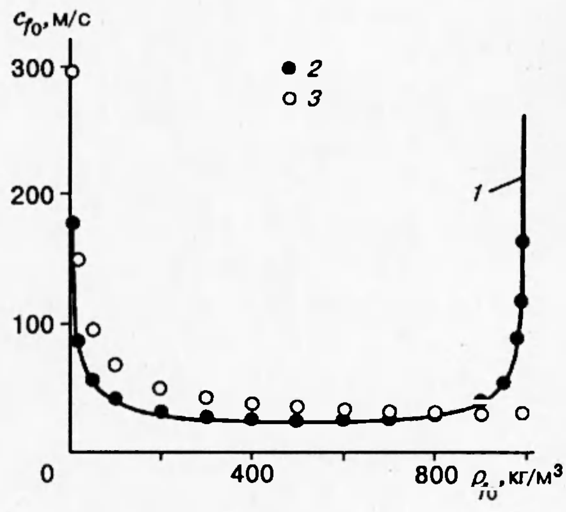

Рис. 2

Рис. 1. Зависимости собственных частот пульсаций пузырей пены ω от ее плотности:
1 — из выражения (5); *2, 3* — численный расчет при $\gamma = 1$ и 1,4; $\rho_l^0 = 1000$ кг/м³, $\delta_{g0} = 1$ мм

Рис. 2. Зависимости скорости звука в пене от ее плотности:
1 — из выражения (6) при $\gamma = 1{,}4$; *2* — по «послойной»; *3* — по «кубической» модели пены

модели сплошной среды [3], имеет вид

$$c_{f0} = \sqrt{\frac{p_0\gamma}{\rho_{f0}\alpha_{g0}}}, \qquad (6)$$

где $\alpha_{g0} = (\rho_l^0 - \rho_{f0})/(\rho_l^0 - \rho_{g0})$ — объемная доля газа в смеси.

Для расчета скорости звука в рамках дискретной модели пены полагалось, что крайний слой жидкости, например «левый», совершает вынужденные колебания по синусоидальному закону

$$x_1 = A\sin(\omega_* t), \qquad (7)$$

а все остальные в момент времени $t = 0$ находились в устойчивом равновесии. После сжатия первой ячейки возмущения передаются второй и т. д. Таким образом, слева направо распространяется волна возмущений, скорость перемещения которой находится из решения системы (3) при заданном граничном условии (7). В проведенных численных расчетах варьировались частота вынужденных колебаний $\omega_* = 20$–200 кГц и ее амплитуда $A = (0{,}1$–$0{,}5)\,\delta_{g0}$. Полученные данные свидетельствуют, что скорость распространения возмущений достаточно слабо зависит от варьируемых параметров, что отмечалось в [5].

Результаты расчетов показаны на рис. 2. Отметим совпадение значений скорости звука, полученных по равновесной и «послойной» моделям, не только в области плотностей смеси, характерных для пен, но и для пузырьковых жидкостей. Это указывает на существование связи между равновесной и дискретной моделями дисперсной среды, несмотря на все их внешние различия.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Суров В. С.** О воздействии плоских воздушных ударных волн на пенообразные среды // Теплофиз. и аэромех. 1994. Т. 1, № 4.
2. **Суров В. С.** Сравнительный анализ двух моделей пены // Физика горения и взрыва. 1995. Т. 31, № 3. С. 22–28.
3. **Суров В. С.** О распространении волн в пенообразных средах // Теплофизика высоких температур. 1995. Т. 33, № 2.
4. **Мандельштам Л. И.** Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
5. **Канн К. Б., Шушков Г. А., Куян А. А.** Экспериментальное исследование гармонических колебаний в газожидкостных пенах // Акустика неоднородных сред: Сб. научн. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1993. Вып. 105.

Поступила в редакцию 13/VI 1995 г.