ПМТФ, № 5, 1970

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛУБИНЫ

В. Е. Захаров, В. Г. Харитонов

(Новосибирск)

Рассматривается устойчивость установившихся периодических волн малой амплитуды на поверхности идеальной жидкости конечной глубины относительно спонтанного возникновения модуляции этой волны. Показано, что неустойчивость, имеющая место для волн на поверхности жидкости бесконечной глубины, исчезает при переходе к жидкости малой глубины.

Как известно, нелинейные установившиеся волны на поверхности жидкости неустойчивы [1,4]. В наиболее общем виде инкремент неустойчивости для волн на поверхности жидкости бесконечной глубины был получен в работе [1]. Случай бесконечной глубины был подробно рассмотрен в работе [2] с учетом также и капиллярных эффектов. В работах [3,4] рассматривалась неустойчивость волн на поверхности жидкости конечной глубины, однако рассматривалась лишь одномерная задача, когда волновые векторы возмущений параллельны волновому вектору исходной волны. В данной работе рассматривается неустойчивость волн на поверхности жидкости конечной глубины при произвольном направлении волновых векторов возмущений. При этом, однако, будем предполагать, что волновые векторы возмущений достаточно близки к волновому вектору исходной волны, так что неустойчивость носит характер спонтанного нарастания модуляции на фоне исходной волны. Такие «модуляционные» неустойчивости известны также для волн в нелинейном диэлектрике [5].

Рассмотрим потенциальное течение идеальной жидкости произвольной глубины в однородном поле тяжести. Выберем систему координат так, что невозмущенная поверхность жидкости совпадает с плоскостью xy. Ось z направлена от поверхности. Далее все векторные обозначения относятся к двумерным векторам в плоскости xy.

Пусть $\eta(\mathbf{r}, t)$ — форма поверхности жидкости, $\Phi(\mathbf{r}, z, t)$ — гидродинамический потенциал. Течение жидкости описывается уравнением Лапласа с двумя условиями на поверхности и условием на дне

$$\Delta\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \sqrt{1+(\nabla\eta)^2}\,\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{z=\eta} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=\eta} - \nabla\eta\nabla\Phi\Big|_{z=\eta} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\eta = -\frac{(\nabla\Phi)^2}{2}\Big|_{z=\eta} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\Big|_{z=\eta} \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=-h} = 0 \tag{4}$$

Полная энергия жидкости

$$E = \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\int\limits_{-h}^{\eta}\left[(\nabla\Phi)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]dz + \frac{g}{2}\int\eta^2 d\mathbf{r} \tag{5}$$

Введем величину

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, z, t)|_{z=\eta}$$

Задание величин η и Ψ в силу единственности решения краевой задачи для уравнения Лапласа полностью определяет течение жидкости.

Воспользовавшись формулой

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{z=\eta} + \frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=\eta}$$

из уравнения (3) получим

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + g\eta = -\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2\Big|_{z=\eta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\Big|_{z=\eta} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}(\nabla\eta\nabla\Phi)\Big|_{z=\eta} \qquad (6)$$

Как показано в работе [2], η и ψ — канонические переменные, энергия E — гамильтониан системы, а уравнения (2) и (6) — уравнения Гамильтона.

Решим далее краевую задачу для уравнения Лапласа. Сделаем предварительно преобразование Фурье по координатам x и y

$$\eta(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi}\int\eta(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{kr}}d\mathbf{r}, \quad \Psi(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi}\int\Psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{kr}}d\mathbf{r}$$

Общее решение уравнения Лапласа с учетом условия на дне

$$\Phi(\mathbf{k}, z) = A(\mathbf{k})e^{|\mathbf{k}|z}[1 + e^{-z|\mathbf{k}|(z+h)}] \qquad (7)$$

Будем далее искать решение в виде ряда по степеням η и ограничимся членами порядка не выше η^2. Учитывая

$$\Phi(\mathbf{k}, z)|_{z=\eta} = \Psi(\mathbf{k})$$

и разлагая экспоненты в ряд, получаем

$$\Phi(\mathbf{k}, z) = \frac{\operatorname{ch}|\mathbf{k}|(z+h)}{\operatorname{ch}|\mathbf{k}|h}\Big\{\Psi(\mathbf{k}) + \int\Psi(\mathbf{k}_1)\eta(\mathbf{k}_2)|\mathbf{k}_1|\operatorname{th}|\mathbf{k}_1|h\delta(\mathbf{k} - \qquad (8)$$

$$- \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2 - \frac{1}{2}\int[|\mathbf{k}-\mathbf{k}_3|\operatorname{th}|\mathbf{k}-\mathbf{k}_3|h + |\mathbf{k}-\mathbf{k}_2|\operatorname{th}|\mathbf{k}-\mathbf{k}_2|h -$$

$$- |\mathbf{k}|\operatorname{th}|\mathbf{k}|h]|\mathbf{k}_1|\Psi(\mathbf{k}_1)\eta(\mathbf{k}_2)\eta(\mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2d\mathbf{k}_3\Big\}$$

Совершая каноническое преобразование к комплексным переменным $a(\mathbf{k})$-амплитудам бегущих волн по формулам

$$\eta(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|\mathbf{k}|\operatorname{th}|\mathbf{k}|h}{\omega(\mathbf{k})}\right)^{1/2}[a(\mathbf{k}) + \bar{a}(-\mathbf{k})] \qquad (9)$$

$$\Psi(\mathbf{k}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|\operatorname{th}|\mathbf{k}|h}\right)^{1/2}[a(\mathbf{k}) - \bar{a}(-\mathbf{k})]$$

получим гамильтониан в виде

$$H = \int\omega(\mathbf{k})a(\mathbf{k})\bar{a}(\mathbf{k})d\mathbf{k} + \int V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)[\bar{a}(\mathbf{k})a(\mathbf{k}_1)a(\mathbf{k}_2) + a(\mathbf{k})\bar{a}(\mathbf{k}_1)\times \qquad (10)$$

$$\times\bar{a}(\mathbf{k}_2)]\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)d\mathbf{k}d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2 + {}^1/_3\int U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)[a(\mathbf{k})a(\mathbf{k}_1)a(\mathbf{k}_2) +$$

$$+ \bar{a}(\mathbf{k})\bar{a}(\mathbf{k}_1)\bar{a}(\mathbf{k}_2)]\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)d\mathbf{k}d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2 + {}^1/_2\int W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)\times$$

$$\times\bar{a}(\mathbf{k})\bar{a}(\mathbf{k}_1)a(\mathbf{k}_2)a(\mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)d\mathbf{k}d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2d\mathbf{k}_3$$

Здесь $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{g|\mathbf{k}|\operatorname{th}|\mathbf{k}|h}$ — закон дисперсии гравитационных волн. Вычисленные выражения для функций $V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$, $U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ и $W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Уравнения движения получаются варьированием гамильтониана по правилу

$$\frac{\partial a(\mathbf{k})}{\partial t} = -i\frac{\delta H}{\delta \bar{a}(\mathbf{k})}, \quad \frac{\partial \bar{a}(\mathbf{k})}{\partial t} = i\frac{\delta H}{\delta a(\mathbf{k})} \tag{11}$$

Тогда для $a(\mathbf{k})$

$$\frac{\partial a(\mathbf{k})}{\partial t} + i\omega(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k}) = -i\int\{V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\,a(\mathbf{k}_1)\,a(\mathbf{k}_2)\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) + 2V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2)\,a(\mathbf{k}_2)\,\bar{a}(\mathbf{k}_1)\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2) + U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\,\bar{a}(\mathbf{k}_1)\,\bar{a}(\mathbf{k}_2)\times \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\}\,d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 - i\int W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)\,\bar{a}(\mathbf{k}_1)\,a(\mathbf{k}_2)\,a(\mathbf{k}_3)\times \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\,d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \tag{12}$$

Пусть установившаяся волна имеет период $L = 2\pi / k_0$. Тогда основная ее гармоника $A\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)$. Нелинейное взаимодействие приводит к появлению нулевой и второй гармоники. Предполагая, что в результате неустойчивости волна слабо модулируется, представим функцию $a(\mathbf{k})$ в виде

$$a(\mathbf{k}) = b(\mathbf{k}) + a_1(\mathbf{k}) + a_2(\mathbf{k}) \tag{13}$$

где $b(\mathbf{k})$, $a_1(\mathbf{k})$, $a_2(\mathbf{k})$ сосредоточены соответственно вблизи $\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ и $\mathbf{k} = 2\mathbf{k}_0$.

Для рассматриваемого здесь случая слабой нелинейности выполняется условие

$$a_2(\mathbf{k}) \ll a_1(\mathbf{k}), \qquad b(\mathbf{k}) \ll a_1(\mathbf{k})$$

Тогда, подставляя (13) в уравнение движения (12), получаем для $a_2(\mathbf{k})$

$$\frac{\partial a_2(\mathbf{k})}{\partial t} + i\omega(\mathbf{k})\,a_2(\mathbf{k}) = -i\int V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\,a_1(\mathbf{k})\,a_1(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\,d\mathbf{k}_1 \tag{14}$$

или, предполагая пакет достаточно узким

$$a_2(\mathbf{k}) = -\frac{V(2\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)}{\omega(2\mathbf{k}_0) - 2\omega(\mathbf{k}_0)}\int a_1(\mathbf{k}_1)\,a_1(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\,d\mathbf{k}_1 \tag{15}$$

Подставим выражение (13) в гамильтониан (10). При этом $a_2(\mathbf{k})$ выразим по формуле (15). Кроме того, оставим в гамильтониане только члены, содержащие $a_1(\mathbf{k})$ в виде произведения $a_1(\mathbf{k})a_1(\mathbf{k})$, так как вклад остальных членов будет мал.

Окончательно получаем упрощенный гамильтониан (опуская индекс у $a_1(\mathbf{k})$)

$$H = \int \omega(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k})\,\bar{a}(\mathbf{k})\,d\mathbf{k} + \int \omega(\mathbf{k})\,b(\mathbf{k})\,\bar{b}(\mathbf{k})\,d\mathbf{k} + \int f(\mathbf{k})\,[b(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k}_1)\,\bar{a}(\mathbf{k}_2) + \bar{b}(\mathbf{k})\,\bar{a}(\mathbf{k}_1)\,a(\mathbf{k}_2)]\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\,d\mathbf{k}d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2 + \frac{\lambda}{2}\int \bar{a}(\mathbf{k})\,\bar{a}(\mathbf{k}_1)\,a(\mathbf{k}_2)\,a(\mathbf{k}_3)\times \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\,d\mathbf{k}d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2d\mathbf{k}_3 \tag{16}$$

Здесь

$$\lambda = W(2\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) - 2\frac{V^2(2\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)}{\omega(2\mathbf{k}_0) - 2\omega(\mathbf{k}_0)} - 2\frac{U^2(-2\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)}{\omega(2\mathbf{k}_0) + 2\omega(\mathbf{k}_0)} \tag{17}$$

$$f(\mathbf{k}) = 2V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) \tag{18}$$

Гамильтониану (16) соответствуют уравнения движения

$$\frac{\partial a(\mathbf{k})}{\partial t}+i\omega(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k})=-i\int[f(\mathbf{k}_1)\,b(\mathbf{k}_1)+f(-\mathbf{k}_1)\,\bar{b}(-\mathbf{k}_1)]\,a(\mathbf{k}_2)\,\delta(\mathbf{k}-$$
$$-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\,d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2-i\lambda\int\bar{a}(\mathbf{k}_1)\,a(\mathbf{k}_2)\,a(\mathbf{k}_3)\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\,d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2d\mathbf{k}_3 \qquad (19)$$

$$\frac{\partial b(\mathbf{k})}{\partial t}+i\omega(\mathbf{k})\,b(\mathbf{k})=-if(\mathbf{k})\int\bar{a}(\mathbf{k}_1)\,a(\mathbf{k}_2)\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\,d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2 \qquad (20)$$

Заметим, что при условии $f(0)=0$ система уравнений (19), (20), имеет точное решение

$$b(\mathbf{k})=0,\quad a_0(\mathbf{k})=Ae^{-it\,[\omega(\mathbf{k}_0)+\lambda\,|A|^2]}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0) \qquad (21)$$

подставляющее собой монохроматическую волну с частотой, зависящей от амплитуды.

Исследуем теперь устойчивость решения (21) по отношению к малым возмущениям вида

$$a(\mathbf{k})=a_0(\mathbf{k})+\alpha(\mathbf{k})\,e^{\,i\omega t-i\Omega t}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0-\varkappa)+\alpha(\mathbf{k})\,e^{-i\omega t+i\Omega t}\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0+\varkappa) \qquad (22)$$
$$b(\mathbf{k})=\beta(\mathbf{k})\,e^{-i\Omega t}+\beta(\mathbf{k})\,e^{i\Omega t}$$

Легко убедиться, что всякое возмущение можно представить в виде суперпозиции возмущений (22).

Подставляя (22) в уравнения движения (9) и (20), получаем дисперсионное уравнение четвертого порядка

$$(\Omega^2-\omega^2(\varkappa))\,(-\Omega+\omega(\mathbf{k}_0+\varkappa)-\omega(\mathbf{k}_0-\varkappa))\times \qquad (23)$$
$$\times(\Omega+\omega(\mathbf{k}_0-\varkappa)-\omega(\mathbf{k}_0))+A^2(\omega(\mathbf{k}_0+\varkappa)+\omega(\mathbf{k}_0-\varkappa)-2\omega(\mathbf{k}_0))\times$$
$$\times[f^2(\varkappa)(\Omega+\omega(\varkappa))+f^2(-\varkappa)(\omega(\varkappa)-\Omega)+\lambda(\Omega^2-\omega^2(\varkappa))]=0$$

Так как спектр гравитационных волн нераспадный [6], следует ожидать развития неустойчивости, при которой волновые векторы удовлетворяют соотношению (см. [1])

$$\omega(\mathbf{k}_0+\varkappa)+\omega(\mathbf{k}_0-\varkappa)=2\omega(\mathbf{k}_0) \qquad (24)$$

Тогда волновые векторы лежат вблизи поверхности

$$\omega(\mathbf{k}_0+\varkappa)-\omega(\mathbf{k}_0)=\omega(\mathbf{k}_0)-\omega(\mathbf{k}_0-\varkappa)=\Omega_0$$

Для рассматриваемого случая $|\varkappa|\ll k_0$ можно положить $\Omega=\Omega_0+\delta\Omega$. Тогда с точностью до членов второго порядка по $\delta\Omega$ имеем

$$(\delta\Omega)^2-(L\varkappa^2)^2-2A^2\varkappa^2LG=0 \qquad (25)$$

Здесь

$$G=\lambda-\frac{f^2(\varkappa)}{\omega(\varkappa)-\Omega_0}-\frac{f^2(-\varkappa)}{\omega(\varkappa)+\Omega_0} \qquad (26)$$

$$L=\frac{1}{2}\,k_\alpha k_\beta\,\frac{\partial^2\omega(\mathbf{k})}{\partial k_\alpha\partial k_\beta} \qquad (27)$$

Тогда инкремент неустойчивости равен

$$\gamma=\sqrt{2A^2\varkappa^2LG+(L\varkappa^2)^2} \qquad (28)$$

Таким образом, получаем условие устойчивости при малых $|\varkappa|$ $LG>0$

Вычисленные для рассматриваемого случая функции L и G имеют вид

$$L = \frac{\sqrt{gh}}{2k_0\sqrt{x\,\mathrm{th}\,x}}\left\{\left[\frac{2x}{\mathrm{ch}^2 x}(1 - x\,\mathrm{th}\,x) - \frac{1}{2\,\mathrm{th}\,x}\left(\mathrm{th}\,x + \frac{x}{\mathrm{ch}^2 x}\right)^2\right]\cos^2\theta + \right.$$
$$\left. + \left(\mathrm{th}\,x + \frac{x}{\mathrm{ch}^2 x}\right)\sin^2\theta\right\} \qquad (29)$$

$$G = -\frac{k_0^3}{32\pi^2}\left\{\left[\sqrt{\frac{x}{\mathrm{th}\,x}}(1 + \mathrm{th}^2 x) - 2\cos\theta\right]^2 \frac{1}{x(1 - \alpha\cos\theta)} + \right.$$
$$+ \left[\sqrt{\frac{x}{\mathrm{th}\,x}}(1 + \mathrm{th}^2 x) + 2\cos\theta\right]^2 \frac{1}{x(1 + \alpha\cos\theta)} + 4(\mathrm{th}\,x - 2\,\mathrm{th}\,2x\,\mathrm{th}\,x) +$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2\,\mathrm{th}\,2x}{\mathrm{th}\,x}}(1 + \mathrm{th}^2 x) + 4(\mathrm{th}\,x\,\mathrm{th}\,2x - 1)\right]^2 \frac{1}{\mathrm{th}\,2x - 2\,\mathrm{th}\,x}\right\}$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{x\,\mathrm{th}\,x}}\left(\mathrm{th}\,x + \frac{x}{\mathrm{ch}^2 x}\right), \qquad x = k_0 h \qquad (30)$$

При не слишком малых x

$$L \approx {}^1/_2 k_0^{-1}\sqrt{gh}\sqrt{x^{-1}\,\mathrm{th}\,x}\,(1 - {}^3/_2\cos^2\theta) \qquad (31)$$
$$G > 0$$

Очевидно, что максимальный инкремент достигается при $\theta = 0$ и неустойчивость развивается при угле меньше некоторого критического.

При $x \ll 1$

$$G \approx \frac{k_0^3}{32\pi^2 x^3}\left\{1 - \frac{x^2}{1 - \cos\theta + {}^1/_2 x^2\cos\theta}\right\}$$
$$L \approx \sqrt{\frac{gh}{k_0}}\,(\sin^2\theta - x^2\cos^2\theta) \qquad (32)$$

Отсюда видно, что неустойчивость не может развиваться при больших углах. При малых углах

$$G \sim (\theta^2 - x^2), \quad L \sim (\theta^2 - x^2)$$

т. е. $LG \sim (\theta^2 - x^2)$ всегда больше нуля. Таким образом, в первом порядке по x волны на поверхности жидкости малой глубины устойчивы. Для выяснения вопроса об устойчивости волн в следующем порядке необходимо пользоваться более точной теорией.

Поступила 4 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е. Об устойчивости волн в нелинейных средах с дисперсией. ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 4.
2. Захаров В. Е. Устойчивость волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости. ПМТФ, 1968, № 2.
3. Benjamin T. B. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systeme. Pros. Roy. Soc., 1967, vol. 299, No. 1456, p. 59.
4. Benjamin T. B., Feir J. E. The disintegration of wave trains on deep water. pt 1, Theory J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt. 3.
5. Литвак А. Г., Таланов В. И. Применение параболического уравнения к расчету полей в диспергирующих нелинейных средах. Изв. вузов, Радиофизика, 1967, т. 10, № 4.
6. Ораевский В. Н., Сагдеев З. Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы. Ж. техн. физ., 1963, т. 32, вып. 11