

Аналогичным образом получается и результат о стремлении при $i \rightarrow \infty$ величин $\hat{\rho}_1^{(i+1)}$ и $\gamma_1^{(i+1)}$ к пределам $\hat{\rho}_1$ и γ_1 , где $\hat{\rho}_1$ и γ_1 — рассмотренные выше величины $\hat{\rho}_1 = \exp(-\lambda_{1,1}^2 T_1)$ и $\gamma_1 = \exp[-\lambda_{1,1}^2 (T - T_1)]$ для периодического решения (1.8), (1.9).

Случаи, когда выполняется одно из двух равенств $A = 0$, $B = 0$ или оба сразу, рассматриваются аналогично.

Поступила 26 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочина Н. Н. О регулировании уровня грунтовых вод при орошении. — ПМТФ, 1973, № 5, с. 125.
2. Кочина Н. Н. О некоторых нелинейных задачах уравнения теплопроводности. — ПМТФ, 1972, № 3, с. 123.

УДК 534.222.2 622.235.5

ОБ ОДНОЙ ИМПУЛЬСНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЗРЫВА НА ВЫБРОС

Н. Б. Ильинский

(Казань)

Известно, что при взрыве в ряде случаев можно пренебречь сжимаемостью среды, ее прочностными и пластическими свойствами и силами трения по сравнению с инерционными силами. Тогда получается модель идеальной несжимаемой жидкости, уравнения движения которой в импульсной постановке задач гидродинамики имеют вид

$$(1) \quad \mathbf{v} = - (1/\rho) \nabla p;$$

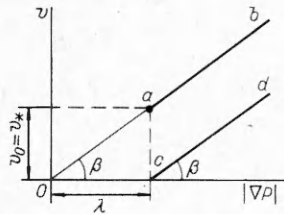
$$(2) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где \mathbf{v} — вектор скорости; ρ — плотность среды; p — импульсное давление. Из соотношения (1) следует, что $|\nabla p|$ и величина скорости $v = |\mathbf{v}|$ связаны линейной зависимостью. Эта модель применяется при решении задач об определении размеров выемки выброса грунта или зоны разрушения в горных породах (см., например, [1—7]). При этом существует несколько разновидностей этой модели [5]. Согласно жидкостной модели [1] (назовем ее моделью 1), среда рассматривается как идеальная несжимаемая жидкость во всей занимаемой ею области, причем во всей этой области имеет место линейная зависимость между v и ∇p . Из последнего следует, что при сколь угодно малых значениях $|\nabla p| > 0$ вся среда приобретает мгновенное поле скоростей. Но так как область действия взрыва ограничена, то вводится понятие критической скорости v_* , при достижении которой обеспечивается разрушение данной среды [6]. Размеры выемки выброса определяются из условия, что критическое значение скорости достигается на краю этой выемки.

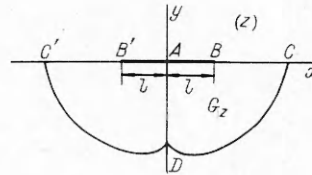
В твердо-жидкостной модели [2,4] (назовем ее моделью 2) среда описывается уравнениями (1), (2) только в области, где $v > v_*$. Вне этой области среда считается абсолютно твердым телом. Согласно этой модели, форма

выемки выброса находится как линия тока, вдоль которой $v = v_*$. В модели 2 линейная зависимость между v и $|\nabla p|$ имеет место лишь при $v > v_*$ (при $v < v_*$ сказать что-либо о связи $|\nabla p|$ и v не представляется возможным) и возникающее при взрыве мгновенное поле скоростей содержит лишь скорости $v \geq v_*$. На фиг. 1 модели 1 соответствует прямая Oab , а модели 2 — прямая ab .

Заметим, что при описании модели 2, возможно, удобнее говорить не о достижении значения v_* , а о некотором модуле градиента импульсного давления λ , при достижении которого движение начинается со ско-



Ф и г. 1



Ф и г. 2

рости v_* (см. фиг. 1). Величину λ назовем по аналогии с задачами нелинейной теории фильтрации (см., например, [8—11]) начальным градиентом. В терминах этой теории модель 2 соответствует так называемому кусочно-разрывному закону фильтрации [12].

Наряду с рассмотренными предложим модель 3 (вопрос о целесообразности применения той или иной модели при расчете действия взрыва может быть решен только на основе экспериментальных данных). Мгновенное поле скоростей, как и в модели 2, возникает при достижении $|\nabla p|$ начального градиента λ , но в отличие от модели 2 это поле содержит скорости $v \geq 0$, а не только $v \geq v_*$. Соответствующий этой модели закон движения изображен на фиг. 1 прямой cd (предполагается, что однородная несжимаемая среда, характеризующаяся начальным градиентом λ , одна и та же, т. е. $\operatorname{tg} \beta = 1/\rho$, $\rho = \text{const}$). Уравнение движения удобно представить в виде

$$(3) \quad \nabla p = -(\lambda + \rho v)(v/v), \quad \lambda \leq |\nabla p| < \infty, \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Граница выемки находится из условия равенства нулю величины скорости на этой линии. Заметим, что если при взрыве различать две зоны: зону разрушения среды и зону выброса, как это делается, например, в работах [13, 14], то, вероятно, модель 3 более соответствует задаче опеределения границы выемки разрушения среды.

Рассмотрим задачу о взрыве плоского шнурового заряда (ШЗ) на поверхности однородного грунта. По модели 2 эта задача решена в работе [4]. Построим решение этой задачи, используя модель 3. Для того, чтобы можно было сравнить размеры выемок, получаемых по различным моделям, будем считать одинаковыми плотность среды ρ , импульсное давление на заряде p_0 , начальный градиент импульсного давления λ и ширину $2l$ плоского ШЗ.

Пусть при взрыве плоского ШЗ сечением BAB' и шириной $2l$ образовалась выемка CDC' (фиг. 2). В силу симметрии рассмотрим лишь правую половину области движения, которую обозначим G_z , а ее границу — Γ_z ($z = x + iy$). Зная величины p_0 , ρ , λ , l и основываясь на модели 3, построим участок CD границы Γ_z .

Введем величину скорости v_0 соотношением $v_0 = \lambda/\rho$. Если учесть, что $\operatorname{tg} \beta = 1/\rho$, получим $v_0 = v_*$, т. е. величина v_0 будет критической ско-

ростью v_* для модели 2 (см. фиг. 1). Систему уравнений (2), (3) можно записать в виде

$$(4) \quad \partial\varphi/\partial x = (1 + v_0/v)v_x, \quad \partial\varphi/\partial y = (1 + v_0/v)v_y, \quad \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0,$$

где $\varphi = -p/\rho$; v_x, v_y — проекции скорости на координатные оси.

Соответствующая краевая задача ставится так: построить участок CD границы Γ_z области G_z и определить в этой области функции $\varphi(x, y)$, $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$, удовлетворяющие нелинейной системе уравнений (4), по граничным условиям

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi = -\varphi_0 \text{ на } AB, \quad \varphi = 0 \text{ на } BC, \\ v_x = 0 \text{ на } AD, \quad v_x = v_y = 0 \text{ на } CD, \end{aligned}$$

где $\varphi_0 = p_0/\rho$.

Введем функцию тока ψ соотношениями

$$\partial\psi/\partial x = -v \sin \theta, \quad \partial\psi/\partial y = v \cos \theta,$$

где θ — угол наклона вектора скорости к оси x . Тогда систему (4), следуя работам [15, 16], можно преобразовать к виду

$$(6) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{1}{\kappa(s)} \frac{\partial\psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\frac{1}{\kappa(s)} \frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

где

$$(7) \quad s = 2 \ln \left(\sqrt{1 + \frac{v}{v_0}} + \sqrt{\frac{v}{v_0}} \right), \quad \kappa = \left(1 + \frac{v_0}{v} \right)^{-3/2},$$

причем выбрано $s = 0$ при $v = 0$. Заметим, что на линии $s = 0$ уравнения (6) вырождаются. Переход к физической области осуществляется по формуле

$$(8) \quad dz = dx + idy = (e^{i\theta}/v)(v d\varphi/(v_0 + v) + id\psi).$$

Введем комплексную функцию $w(\chi) = \varphi(\theta, s) + i\psi(\theta, s)$, где $\chi = \theta + is$. В плоскости χ области G_z , согласно принципу аргумента (см., например, [10]), соответствует полуполоса G_χ (фиг. 3). Учитывая (5), для построения в G_χ ограниченной и непрерывной функции $w(\chi)$ имеем следующие краевые условия:

$$(9) \quad \varphi = -\varphi_0 \text{ на } AB, \quad \varphi = 0 \text{ на } BC, \quad \psi = 0 \text{ на } ADC.$$

Далее будем решать задачу в полуобратной постановке: скорость v_A в точке A будем задавать, а полуширину заряда l и соответствующую выемку — отыскивать.

Зная v_A , по первой из формул (7) найдем $s_A = s_0$. Отобразим конформно область G_χ на полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ функцией

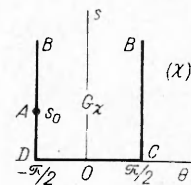
$$(10) \quad \zeta = \sin \chi.$$

При этом точка $A(\chi_A = -\pi/2 + is_0)$ перейдет в точку на оси ξ с абсциссой $\xi_A = -\text{ch } s_0$ (обозначим $\text{ch } s_0 = 1/k$). Эллиптическим интегралом первого рода

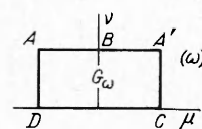
$$(11) \quad \omega = F(\arcsin \zeta, k)$$

полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ конформно отобразим на прямоугольник G_ω ($\omega = \mu + i\nu$) со сторонами $AA' = DC = 2K(k)$ и $AD = A'C = K(k')$, где K — полный эллиптический интеграл первого рода; $k' = \sqrt{1 - k^2}$ (фиг. 4). Тогда для нахождения в области G_ω функции $w(\omega)$ придем к решению уравнений

$$(12) \quad \partial\varphi/\partial\mu = (1/\tilde{\kappa})\partial\psi/\partial\nu, \quad \partial\varphi/\partial\nu = -(1/\tilde{\kappa}) \partial\psi/\partial\mu$$



Ф и г. 3



Ф и г. 4

с краевыми условиями (9), где с учетом (10), (11)

$$\tilde{\kappa}(\mu\nu) = \kappa \{ s[\xi(\mu, \nu), \eta(\mu, \nu)] \}.$$

Разрешив систему (12) относительно функции $\varphi(\mu, \nu)$, получим для ее определения уравнение

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\tilde{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\tilde{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) = 0$$

и краевые условия

$$(14) \quad \varphi = -\varphi_0 \text{ на } AB, \quad \varphi = 0 \text{ на } BC, \quad \partial\varphi/\partial\mu = 0 \text{ на } AD;$$

$$(15) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \left(\tilde{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) = 0 \text{ на } CD.$$

Решение задачи (13) — (15) находится численным методом, разработанным, например, в работе [17]. Заметим, что условие (15), как это следует из результатов работы [18], в рассматриваемой задаче можно заменить на условие $\partial\varphi/\partial\nu = 0$ на CD .

Определив функцию $\varphi(\mu, \nu)$, а следовательно (с учетом (10), (11)), и функцию $\varphi(\theta, s)$, по формуле перехода (8) найдем уравнение искомого участка CD границы Γ_z

$$(16) \quad z = \frac{1}{v_0} \int_{-\pi/2}^{\theta} e^{i\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{s=0} d\theta + iA^*, \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2),$$

где

$$A^* = -\frac{1}{v_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{s=0} \sin \theta d\theta.$$

Для определения полуширины заряда l имеем

$$(17) \quad l = \int_{s_0}^{\infty} \frac{\kappa}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=-\pi/2} ds.$$

Формулы (16), (17) дают решение задачи.

Применительно к модели 2 изложенная схема построения решения упрощается и позволяет найти достаточно просто аналитическое решение задачи в прямой постановке. Приведем это решение в форме, несколько отличной от [4], чтобы сравнить обе модели.

Введем

$$(18) \quad \tilde{\chi} = \theta + i\tilde{s} = i \ln [(1/v_0)dw/dz],$$

где $\theta = \arg \bar{v}$, $\tilde{s} = \ln(v/v_0)$. Область $G_{\tilde{\chi}}$, соответствующая физической области G_z , имеет тот же вид, что и G_{χ} (см. фиг. 3), но $\tilde{s}_A = \tilde{s}_0 = \ln(v_A/v_0)$. Из системы (6), которая примет вид

$$(19) \quad \partial\varphi/\partial\theta = \partial\varphi/\partial\tilde{s}, \quad \partial\varphi/\partial\tilde{s} = -\partial\varphi/\partial\theta,$$

следует, что функция $w(\tilde{\chi}) = \varphi(\theta, \tilde{s}) + i\psi(\theta, \tilde{s})$ аналитична в области $G_{\tilde{\chi}}$. Решив в этой области смешанную краевую задачу (9), (19), определим

$$(20) \quad w(\tilde{\chi}) = \frac{i}{\pi} \ln \frac{\alpha - 1 + 2 \sin \tilde{\chi} + 2 \sqrt{(\sin \tilde{\chi} - 1)(\sin \tilde{\chi} + \alpha)}}{\alpha + 1},$$

где $\alpha = \text{ch}\tilde{s}_0$. Используя (18), (20), после вычисления интегралов получим

$$(21) \quad z = \frac{1}{\pi v_0} \left\{ \sqrt{\sin \tilde{\chi} + \alpha} \left(\sqrt{\sin \tilde{\chi} + 1} - \sqrt{\sin \tilde{\chi} - 1} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha - 1}{2} \ln \frac{2 \sqrt{(\sin \tilde{\chi} - 1)(\sin \tilde{\chi} + \alpha)} + 2 \sin \tilde{\chi} + \alpha - 1}{2 \sqrt{(\sin \tilde{\chi} + 1)(\sin \tilde{\chi} + \alpha)} + 2 \sin \tilde{\chi} + \alpha + 1} \right\} + B^*.$$

Из соответствия точек A и B в плоскостях z и $\tilde{\chi}$ найдем постоянную $B^* = l - 1/\pi v_0$ и уравнение для определения параметра α

$$[(\alpha - 1)/2] \ln [(\alpha + 1)/(\alpha - 1)] = 1 - \pi v_0 l.$$

Зная α, B^* , полагая на участке DC границы области $G_{\tilde{\chi}}$ значение $\tilde{\chi} = \theta (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$ и выделяя в (24) $\text{Re}z = x(\theta)$ и $\text{Im}z = y(\theta)$, получим параметрические уравнения искомой границы выемки выброса грунта.

Наконец, отметим, что в случае модели 1, т. е. жидкостной,

$$w = (\varphi_0/\pi) \arcsin [(z^2 + l^2)/(z^2 - l^2)] - \varphi_0/2,$$

откуда для определения края выемки выброса x_C имеем

$$(22) \quad x_C = (l^2 + 2\varphi_0 l/\pi v_0)^{1/2}.$$

Учитывая, что при выполнении числовых расчетов и сравнении получаемых по разным моделям выемок целесообразнее пользоваться приведенными величинами, введем их следующим образом:

$$z' = zv_0/\varphi_0, \quad w' = w/\varphi_0, \quad v' = v/v_0.$$

Тогда

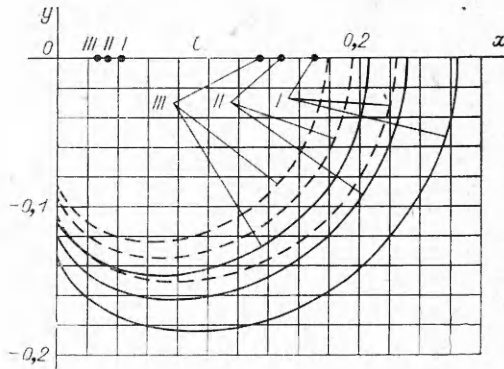
$$v'_0 = 1, \quad \varphi'_0 = 1,$$

(23)

$$l' = lv_0/\varphi_0.$$

Таким образом, при решении задачи в приведенных величинах по модели 3 заранее задаются $\varphi'_0 = 1, v'_0 = 1$ и $v'_A > 0$. В процессе решения определяется граница выемки и полуширина заряда l' в зависимости от значения v'_A . Чтобы от этого решения перейти к решению в размерной физической плоскости, следует из обычно известных заранее (в прямой постановке) значений параметров l, v_0, φ_0 задавать лишь два, так как третий будет определяться по формуле (23).

В таблице для трех вариантов задания v'_A приведены найденные по (17) значения l' и по (16), (21), (22) соответствующие им абсциссы x_C для трех рассматриваемых моделей и ординаты y_D для моделей 2 и 3. На фиг. 5 построены границы выемок и указаны размеры соответствующих им зарядов (сплошная линия соответствует модели 3, штриховая — модели 2). Край выемок, найденные по модели 1, отмечены точками.



Ф и г. 5

Из результатов расчетов таблицы и фиг. 5 следует, что по модели 3 выемка получается больше, чем по модели 2 (как по площади, так по глубине и ширине). Физически это можно объяснить следующим образом. При одном и том же начальном градиенте импульсного давления λ в мо-

Номер варианта	v'_A	v'	Модель 1	Модель 2		Модель 3	
			x'_C	x'_C	$-y'_D$	x'_C	$-y'_D$
I	10	0,0427	0,1703	0,2217	0,1018	0,2630	0,1310
II	14	0,0332	0,1491	0,1952	0,0914	0,2292	0,1164
III	18	0,0276	0,1354	0,1778	0,0842	0,2057	0,1055

дели 2 энергия взрыва учитывается лишь для $v \geq v_* > 0$, в то время как в модели 3 учитывается вся энергия, начиная с $v \geq 0$. Объяснение тому, что по модели 1 край выемки находится ближе к заряду, чем по модели 2, дано в работе [5].

Автор выражает благодарность Т. В. Борисову за проведение числовых расчетов.

Поступила 15 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов О. Е. Основы теории действия взрыва. М., изд. ВИА, 1957.
2. Лаврентьев М. А. Вариационные методы краевых задач для систем уравнений эллиптического типа. М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973.
4. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта.— ПМТФ, 1960, № 3, с. 152—156.
5. Кузнецов В. М., Поляк Э. Б. Импульсно-гидродинамические расчеты взрыва на выброс шнуровых зарядов.— ФТПРПИ, 1973, № 4, с. 32—39.
6. Покровский Г. И., Федоров Н. С., Докучаев М. М. Применение направленного взрыва в гидротехническом строительстве. М., Госстройиздат, 1963.
7. Кузнецов В. М. Гидродинамический расчет взрыва на выброс удлиненных зарядов ВВ.— ФТПРПИ, 1974, № 3, с. 44—47.
8. Роза С. А. Осадка гидротехнических сооружений на глинах с малой влажностью.— «Гидротехническое строительство», 1950, № 9, с. 25—30.
9. Флорин В. А. Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористости с учетом влияния связанной воды.— «Изв. АН СССР. ОТН», 1951, № 11, с. 1625—1649.
10. Ильинский И. Б., Шешуков Е. Г. О краевых задачах нелинейной теории фильтрации.— В кн.: Вычислительная и прикладная математика. Вып. 19. Киев, изд. Киев. ун-та, 1973, с. 22—31.
11. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М., «Наука», 1975.
12. Алишаев М. Г. О стационарной фильтрации с начальным градиентом.— В кн.: Теория и практика добычи нефти. М., «Недра», 1968.
13. Решотка Х. С., Ткачук К. И., Бондаренко М. А. Применение метода конформных отображений к решению задач взрывного разрушения горных пород.— В кн.: Исследования по ТФКП и ее применениям. Киев, изд. Ин-та матем. АН УССР, 1972.
14. Решотка Х. С., Ткачук К. И. Исследование распределения энергии взрыва скважинных зарядов методом ЭГДА.— В кн.: Математическое моделирование на интеграторах ЭГДА-9/60. Киев, изд. Ин-та матем. АН УССР, 1968.
15. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующих закону Дарси.— ПММ, 1940, т. 4, вып. 1, с. 33—52.
16. Ильинский И. Б., Фомин В. М., Шешуков Е. Г. О решении одной обратной краевой задачи нелинейной теории фильтрации.— В кн.: Труды семинара по краевым задачам. Вып. 8. Казань, изд. Казан. ун-та, 1971, с. 86—98.
17. Борисова Т. В., Данилаев П. Г., Ильинский И. Б., Шешуков Е. Г. Один численный метод решения задач нелинейной фильтрации.— В кн.: Труды семинара по краевым задачам. Вып. 11. Казань, изд. Казан. ун-та, 1974, с. 25—31.
18. Шешуков Е. Г. О поведении решений задач нелинейной фильтрации вблизи линии вырождения области годографа скорости.— «Изв. высш. учеб. заведений. Математика», 1974, № 4, с. 114—119.