

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ
ЖИДКОСТИ В ПОЛОСЕ И КОЛЬЦЕ

В. М. Кузнецов, Е. Н. Шер

(Новосибирск)

В прикладных задачах нередко возникает вопрос об устойчивости течения среды по отношению к бесконечно малым начальным возмущениям области течения. При этом, во многих случаях свойства среды могут быть описаны в схеме идеальной несжимаемой жидкости. Такое положение, например, имеет место при деформации металлов под действием больших импульсных нагрузок типа взрыва.

С физической точки зрения наибольший интерес представляют два вида течения: течение, происходящее по инерции из заданного начального состояния, в котором известно поле скоростей, и течение, возникающее из состояния покоя под действием заданных внешних сил. Из первого вида течения ниже рассматриваются такие случаи, когда в начальный момент времени все элементы жидкости растягиваются равномерно по всей области, а из второго — течения при постоянном давлении. Проведенное исследование показывает:

1. Течение полосы идеальной несжимаемой жидкости с начальным линейным полем скоростей устойчиво по отношению к симметричным и неустойчиво по отношению к антисимметричным гармоническим возмущениям границ. Возмущение произвольного вида можно разложить в ряд Фурье, так что найдется, вообще говоря, бесконечно много гармоник того и другого типа. Таким образом, в общем случае течение полосы при заданном начальном поле скоростей неустойчиво. Однако неустойчивость эта довольно слабая, так как введение в рассмотрение поверхностного натяжения стабилизирует течение. Аналогичное утверждение справедливо и в случае тонкого кольца, расширяющегося по инерции.

2. Равномерно ускоренное движение полосы идеальной несжимаемой жидкости неустойчиво, причем, чем меньше длина волны, тем сильнее неустойчивость. Введение поверхностного натяжения, а также учет упругих сил, позволяет в этом случае выделить устойчивые и неустойчивые гармоники, причем среди последних можно найти гармонику, обладающую максимальной неустойчивостью.

1. Постановка задачи. Требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad (1.1)$$

(нижние индексы обозначают дифференцирование) в области, ограниченной кривой $y = \eta(x, t)$ при начальном условии

$$\Phi(x, y, 0) = \Phi(x, y) \quad (1.2)$$

и граничных условиях при $y = \eta(x, t)$

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + \frac{P}{D} = f(t) \quad (1.3)$$

$$\Phi_x \eta_x - \Phi_y + \eta_t = 0 \quad (1.4)$$

(D — плотность жидкости)

Назовем основным решением $\Phi^\circ(x, y, t)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (1.2) и первому условию (1.3) для области, ограниченной кривой $y = \eta^\circ(x, t)$. Будем рассматривать такие решения, при которых кривые $y = \eta(x, t)$ мало отличаются от кривых $y = \eta^\circ(x, t)$, а потенциал течения $\Phi(x, y, t)$ мало отличается от $\Phi^\circ(x, y, t)$; положим

$$\eta(x, t) = \eta^\circ(x, t) + \varepsilon \eta^*(x, t) \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (1.5)$$

$$\Phi(x, y, t) = \Phi^\circ(x, y, t) + \varepsilon \Phi^*(x, y, t) \quad (1.6)$$

Подставим эти выражения в (1.1) — (1.3). С точностью до членов первого порядка малости относительно ε получаем

$$\varphi_{xx}^* + \varphi_{yy}^* = 0 \quad (1.7)$$

$$\varphi^*(x, y, 0) = 0 \quad (1.8)$$

$$\varphi_t + \varphi_x^* \varphi_x^\circ + \varphi_y^* \varphi_y^\circ = F[x\eta^*(x, t), t] \quad (1.9)$$

$$\varphi_x^* \eta_x^\circ + \varphi_x^\circ \eta_x^* - \varphi_y^* + \eta_t^* = F_1[x, \eta^*(x, t), t] \quad (1.10)$$

где $F[x, \eta^*(x, t), t]$ и $F_1[x, \eta^*(x, t), t]$ — некоторые функции, появляющиеся в результате переноса условий (1.3), (1.4) для $\varphi^\circ(x, y, t)$ на новую границу (1.5).

Будем считать, что условия (1.9) и (1.10) выполняются на старой границе, т. е. при $y = \eta^\circ(x, t)$. Полученные таким образом линеаризованные отношения (1.7) — (1.10) рассматриваются ниже в случае, когда область представляет собой полосу и тонкое кольцо.

2. Полоса с линейным полем скоростей. Пусть

$$\Phi(x, y) = 1/2 \alpha (x^2 - y^2) \quad (2.1)$$

где α — некоторая постоянная с размерностью сек^{-1} . Давление на поверхности полосы примем равным нулю. За основное решение примем решение для прямолинейной полосы

$$- \eta^\circ(t) \leq y \leq \eta^\circ(t) \quad (2.2)$$

Нетрудно убедиться, что оно имеет вид (для $f(t) = 0$)

$$\varphi^\circ(x, y, t) = \frac{\alpha}{2} \frac{x^2 - y^2}{\alpha t + 1} - \frac{\alpha h_0^3}{3} [1 - (\alpha t + 1)^{-3}], \quad \eta^\circ(t) = \frac{h_0}{\alpha t + 1} \quad (2.3)$$

где $2h_0$ — начальная ширина полосы.

Будем рассматривать два вида возмущений границы:

$$y = \pm [\eta^\circ(t) + \varepsilon \eta^*(x, t)] \text{ — симметричное} \quad (2.4)$$

$$y = \pm \eta^\circ(t) + \varepsilon \eta^*(x, t) \text{ — антисимметричное} \quad (2.5)$$

В данном случае удобнее искать $\eta^*(x, t)$ в виде

$$\eta^*(x, t) = \eta^\circ(t) \theta(x, t) \quad (2.6)$$

Введем безразмерные величины

$$x^\circ = \frac{x}{h_0}, \quad y^\circ = \frac{y}{h_0}, \quad t^\circ = \alpha t + 1, \quad \varphi^\circ = \frac{\varphi}{\alpha h_0^2}, \quad \theta^\circ = \frac{\theta}{h_0} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.3) — (2.7) в (1.9), получаем (индексы у безразмерных величин для простоты опускаются):

в случае симметричных возмущений

$$\varphi_t^* + \frac{x}{t} \varphi_x^* - \frac{y}{t} \varphi_y^* = - \frac{2\theta}{t^4} \quad \text{при } y = \pm \frac{1}{t} \quad (2.8)$$

в случае антисимметричных возмущений

$$\varphi_t^* + \frac{x}{t} \varphi_x^* - \frac{y}{t} \varphi_y^* = \mp \frac{2\theta}{t^4} \quad \text{при } y = \pm \frac{1}{t} \quad (2.9)$$

Кинематическое условие (1.10) в обоих случаях одно и то же

$$\frac{x}{t^2} \theta_x + \frac{1}{t} \theta_t - \varphi_y^* = 0 \quad (2.10)$$

Сделаем замену переменных

$$x' = \frac{x}{t}, \quad y' = yt, \quad t' = t, \quad \varphi'(x', y', t) = \varphi^*(x, y, t), \quad \theta'(x', t) = \theta(x, t) \quad (2.11)$$

В этих переменных уравнение (1.7) имеет вид

$$\varphi'_{x'x'} + t^4 \varphi'_{y'y'} = 0 \quad (2.12)$$

Условия (2.8), (2.9) соответственно примут вид

$$\varphi_t' = -\frac{2\theta'}{t^4}, \quad \varphi_t' = \mp \frac{2\theta'}{t^4}, \quad \varphi_{y'} = \frac{\theta_t'}{t^2} \quad \text{при } y = \pm 1 \quad (2.13)$$

Решение задачи Дирихле для полосы $-h < y < h$ выражается формулой Палатини [1]

$$W(z) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_+(s) + u_-(s)}{\operatorname{ch} [1/2 \pi (s-z)/h]} ds - \frac{i}{4h} \operatorname{sh} \frac{\pi z}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_+(s) - u_-(s)}{\operatorname{ch} [1/2 \pi z/h] \operatorname{ch} [1/2 \pi (s-z)/h]} ds + ic, \quad W(z) = \varphi + i\psi, \quad z = x + iy \quad (2.14)$$

Здесь $u_+(s)$ и $u_-(s)$ — значения φ соответственно на верхней и нижней границе полосы. Эта формула соответствующей заменой переменных легко обобщается на случай уравнения (2.12). Граничные значения $u_{\pm}(s)$ определяются из уравнений (2.13)

$$u_+(s) = u_-(s) = -2 \int_1^t \frac{\theta'(s, \tau) d\tau}{\tau^4}, \quad u_+(s) = -u_-(s) = -2 \int_1^t \frac{\theta'(s, \tau) d\tau}{\tau^4}$$

Таким образом, в случае симметричных возмущений из формулы (2.14) выпадает второе слагаемое, а в случае антисимметричных — первое. Выделяя в (2.14) вещественную часть, получаем, с учетом (2.15) для первого случая

$$\varphi'(x', y', t) = -\frac{t^2}{2} \cos \frac{\pi y'}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^t \frac{\theta'(s, \tau)}{\tau^4} \frac{\operatorname{ch} [1/2 \pi t^2 (s-x')]}{\operatorname{sh}^2 [1/2 \pi t^2 (s-x')] + \cos^2 [1/2 \pi y']} ds d\tau \quad (2.16)$$

В случае антисимметричных возмущений получается аналогичное выражение, которое здесь не приводится. Формула (2.16) определяет решение задачи при известной функции $\theta'(x', t)$. Для нахождения последней (2.16) следует подставить в (2.10). Прежде чем это делать, заметим, что

$$\cos \frac{\pi y'}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} [1/2 \pi t^2 (s-x')]}{\operatorname{sh}^2 [1/2 \pi t^2 (s-x')] + \cos^2 [1/2 \pi y']} ds = \frac{2}{t^2} \quad (2.17)$$

перепишем (2.16) в виде

$$\varphi'(x', y', t) = -\frac{t^2}{2} \cos \frac{\pi y'}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^t \frac{[\theta'(s, \tau) - \theta'(x', \tau)] \operatorname{ch} [1/2 \pi t^2 (s-x')]}{\operatorname{sh}^2 [1/2 \pi t^2 (s-x')] + \cos^2 [1/2 \pi y']} \frac{d\tau ds}{\tau^4} - \theta'(x, \tau) \quad (2.18)$$

Теперь это выражение может быть продифференцировано по y' . Подставляя (2.18) в (2.10), для функции $\theta'(x', t)$ получаем уравнение

$$\theta_t' = \pi t^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_1^t \frac{[\theta'(s, \tau) - \theta'(x', \tau)] \operatorname{ch} [1/2 \pi t^2 (s-x')]}{\operatorname{sh}^2 [1/2 \pi t^2 (s-x')]} \frac{d\tau ds}{\tau^4} \quad (2.19)$$

Рассмотрим частный случай гармонических возмущений. Положим

$$\theta'(x', t) = \xi(t) \sin kx' \quad (2.20)$$

Подставляя (2.20) в (2.18), для $\xi(t)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{4k}{t^3} \frac{1}{\operatorname{sh}(2k/t^2)} \frac{d\xi}{dt} + \frac{2k}{t^4} \operatorname{th} \frac{k}{t^2} \xi = 0 \quad (2.21)$$

Аналогично в случае антисимметричных возмущений получим

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{4k}{t^3} \frac{1}{\text{sh}(2k/t^2)} \frac{d\xi}{dt} + \frac{2k}{t^4} \text{cth} \frac{k}{t^2} \xi = 0 \quad (2.22)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение этих уравнений при $t \rightarrow \infty$. Полагая $k/t^2 \ll 1$ и ограничиваясь в разложениях коэффициентов членами первого порядка малости, получаем из (2.11)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{d\xi}{dt} + \frac{2k^2}{t^6} \xi = 0 \quad (2.23)$$

а из (2.22)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{2}{t} \frac{d\xi}{dt} + \frac{2}{t^2} \xi = 0 \quad (2.24)$$

Решение уравнения (2.24) элементарно

$$\xi = C_1 t^2 + C_2 t \quad (C_1, C_2 = \text{const}) \quad (2.25)$$

Принимая во внимание (2.3), (2.6) и (2.20), приходим к выводу, что амплитуда возмущения в этом случае линейно увеличивается с ростом времени. Таким образом, рассматриваемое движение неустойчиво по отношению к антисимметричным гармоническим возмущениям границы.

Рассмотрим уравнение (2.23). Заменой $v = \xi t$ приведем его к нормальному виду

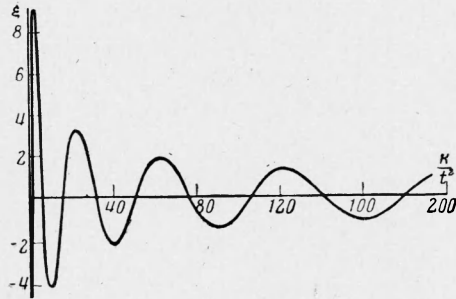
$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{2k^2}{t^6} v = 0 \quad (2.26)$$

При $t \rightarrow \infty$ решение этого уравнения

$$v \rightarrow C_1 t + C_2 \quad (2.27)$$

Отсюда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi = C_1 \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$



Вследствие (2.3), (2.6) и (2.18) амплитуда возмущения при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю вместе с шириной полосы

$$\eta^*(x, t) = \frac{C_1}{t} \sin \frac{hx}{t} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \quad (2.28)$$

Постоянная C_1 в этом выражении зависит от волнового числа k . На фиг. 1 показан результат численного решения¹ уравнения (2.21) для $k = 200$ при начальных условиях $\xi = 1$, $d\xi/dt = 0$ при $t = 1$. В этом случае константа $C_1 = -4$.

3. Полоса с постоянным поперечным градиентом давления. Пусть теперь $\Phi(x, y) = 0$, давление на одной стороне полосы равно нулю, а на другой постоянно и равно p_0 . За основное решение примем решение для полосы, имеющей при $t = 0$ границы $y = 0$ и $y = h_0$. Оно имеет вид

$$\varphi^0(x, y, t) = ayt, \quad a = \frac{p_0}{Dh_0} \quad (j(t) = a^2 t^2) \quad (3.1)$$

Границы полосы движутся по законам:

$$\eta_1^0 = 1/2 at^2 \quad (\text{нижняя}) \quad (3.2)$$

$$\eta_2^0 = h_0 + 1/2 at^2 \quad (\text{верхняя}) \quad (3.3)$$

Уравнения (1.8) и (1.9) имеют в данном случае вид

$$\varphi_t^* + at\varphi_y^* + a\eta_i^* = 0 \quad (3.4)$$

$$\varphi_y^* - (\eta_i^*)_t = 0 \quad \text{при } y = \eta_i \quad (i = 1, 2) \quad (3.5)$$

¹ В расчетах принимали участие А. Бовт, С. И. Похожаев и А. Г. Черников.

Введем вместо y новую переменную

$$q = y - 1/2 at^2 \quad (3.6)$$

Тогда вместо (3.4) получим

$$\varphi_i' + a\eta_i^* = 0 \quad (\varphi'(x, q, t) = \varphi^*(x, y, t)) \quad (3.7)$$

Отсюда

$$\varphi'(x, q, t) = -a \int_0^t \eta_i^* dt \quad (3.8)$$

Рассмотрим случай гармонического возмущения границ

$$\eta_i^* = \xi_i(t) \sin kx \quad (3.9)$$

Подставляя это выражение в (3.8), найдем

$$\begin{aligned} \varphi' &= \chi_1 \sin kx & \text{при } q = 0 \\ \varphi' &= \chi_2 \sin kx & \text{при } q = 1 \end{aligned} \quad \left(\chi_i = -a \int_0^t \xi_i(t) dt, \quad i = 1, 2 \right) \quad (3.10)$$

Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\varphi'(x, q, t) = \frac{\chi_1 \operatorname{sh} k(h_0 - q) + \chi_2 \operatorname{sh} kq}{\operatorname{sh} kh_0} \sin kx \quad (3.11)$$

Подставляя это выражение в (3.5), для $\xi_i(t)$ получим систему уравнений

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = \frac{ak}{\operatorname{sh} kh_0} (\xi_1 \operatorname{ch} kh_0 - \xi_2), \quad \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} = \frac{ak}{\operatorname{sh} kh_0} (\xi_1 - \xi_2 \operatorname{ch} kh_0) \quad (3.12)$$

Решение ее будет

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{C_1 b}{\beta - ak} e^{\kappa t} + \frac{C_2 b}{\beta + ak} e^{i\kappa t} + \frac{C_3 b}{\beta - ak} e^{-\kappa t} + \frac{C_4 b}{\beta + ak} e^{-i\kappa t} \\ \xi_2 &= C_1 e^{\kappa t} + C_2 e^{i\kappa t} + C_3 e^{-\kappa t} + C_4 e^{-i\kappa t} \\ \left(\beta &= ak \operatorname{cth} kh_0, \quad b = \frac{ak}{\operatorname{sh} kh_0}, \quad \kappa = \sqrt{ak} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Коэффициенты C_1, C_2, C_3 и C_4 определяются из начальных условий

$$\xi_i = \xi_{i0}, \quad \frac{d\xi_i}{dt} = 0 \quad \text{при } t = 0$$

Нетрудно убедиться в том, что при этом $C_1 \neq 0$.

Присутствие члена с множителем $e^{\kappa t}$ в этом решении показывает, что в данном случае движение неустойчиво, причем, чем меньше длина волны возмущения, тем оно более неустойчиво.

4. Инерционное течение тонкого кольца. В этом случае введем полярные координаты r, γ , как обычно полагая $x = r \cos \gamma, y = r \sin \gamma$, и в качестве основного решения возьмем потенциал кольца, образованного двумя концентрическими окружностями радиуса ρ_1 и ρ_2

$$\varphi^\circ(r, t) = \rho \frac{d\rho}{dt} \ln r, \quad \rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \quad (\rho_2 > \rho_1) \quad (4.1)$$

Из закона сохранения массы следует, что

$$\rho_2^2 - \rho_1^2 = m \quad (m = \text{const})$$

Для тонкого кольца $(\rho_2 - \rho_1) / \rho \ll 1$, и приближенно имеем

$$\rho_1 = \rho - \frac{m}{4\rho}, \quad \rho_2 = \rho + \frac{m}{4\rho} \quad (4.2)$$

Из граничного условия (1.3), имеющего в данном случае вид

$$\varphi_t + 1/2 \varphi r^2 = f(t) \quad (p = 0) \quad (4.3)$$

получаем ρ как функцию времени

$$\rho = \rho_0 + Vt \quad (4.4)$$

Здесь ρ_0 — начальный средний радиус кольца, V — начальная скорость расширения. В соответствии с (1.5) и (1.6) полагаем

$$\varphi = \varphi^\circ + \varepsilon\varphi^*, \quad R_i = \rho_i + \varepsilon\rho_i^* \quad (i = 1, 2)$$

где R_i — радиус возмущенных границ. Граничные условия для функции φ^* (r, γ, t) имеют в этом случае вид

$$\varphi_{t^*}^* + \varphi_r^\circ \varphi_r^* + \rho_i^* [\varphi_{t^*}^\circ + 1/2 (\varphi_2^\circ)^2]_r = 0 \quad (4.5)$$

$$(\rho_i^*)_t - \varphi_r^* - \varphi_{rr}^\circ \rho_i^* = 0 \quad \text{при } r = \rho_i \quad (4.6)$$

Используя основное решение (4.1) и учитывая (4.2) и (4.4), получаем

$$\left[\varphi_{t^*}^\circ + \frac{1}{2} (\varphi_r^\circ)^2 = \begin{cases} -1/2 mV^2 / \rho^3 & \text{при } r = \rho_1 \\ +1/2 mV^2 / \rho^3 & \text{при } r = \rho_2 \end{cases} \right. \quad (4.7)$$

$$\varphi_{rr}^\circ = \begin{cases} -(1 + 1/2 m / \rho^2) V / \rho & \text{при } r = \rho_1 \\ -(1 - 1/2 m / \rho^2) V / \rho & \text{при } r = \rho_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

Подставляя (4.7) и (4.8) в (4.5) и (4.6), получим

$$\varphi_{t^*}^* + \varphi_r^\circ \varphi_r^* = \begin{cases} 1/2 mV^2 \rho_1^* / \rho^3 & \text{при } r = \rho_1 \\ -1/2 mV^2 \rho_2^* / \rho^3 & \text{при } r = \rho_2 \end{cases} \quad (4.9)$$

$$(\rho_1^*)_t - \varphi_r^* + (1 + 1/2 m / \rho^2) V \rho_1^* / \rho = 0 \quad \text{при } r = \rho_1$$

$$(\rho_2^*)_t - \varphi_r^* + (1 - 1/2 m / \rho^2) V \rho_2^* / \rho = 0 \quad \text{при } r = \rho_2 \quad (4.10)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\varphi_{rr}^* + r^{-1} \varphi_r^* + r^{-2} \varphi_{\gamma\gamma}^* = 0 \quad (4.11)$$

при граничных условиях (4.9) и (4.10) и начальных условиях

$$\varphi^*(r, \gamma, 0) = 0, \quad \rho_i^*(\gamma, 0) = \rho_{i0}^* \quad (4.12)$$

Положим

$$\rho_i^* = \xi_i(t) \sin k\gamma \quad (4.13)$$

из (4.9) получаем

$$\varphi^* = \chi_1(t) \sin k\gamma \quad \text{при } r = \rho_1, \quad \varphi^* = \chi_2(t) \sin k\gamma \quad \text{при } r = \rho_2 \quad (4.14)$$

$$\chi_1(t) = \frac{mV^2}{2} \int_0^t \frac{\xi_1(t) dt}{\rho^3}, \quad \chi_2(t) = -\frac{mV^2}{2} \int_0^t \frac{\xi_2(t) dt}{\rho^3}$$

Решение уравнения (4.11) при граничных условиях (4.14) имеет вид

$$\varphi = \chi_1(t) \frac{\rho_2^{-k} r^k - \rho_2^k r^{-k}}{\rho_1^k \rho_2^{-k} - \rho_1^{-k} \rho_2^k} + \chi_2(t) \frac{\rho_1^k r^{-k} - \rho_1^{-k} r^k}{\rho_1^k \rho_2^{-k} - \rho_1^{-k} \rho_2^k} \quad (4.15)$$

Подставляя (4.15) в (4.10) и пренебрегая членами, содержащими m^α , $\alpha > 1$ после дифференцирования, получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + \frac{mV}{\rho^3} \frac{d\xi_1}{dt} - \xi_1 \left(1 + \frac{5}{4} \frac{m}{\rho^2} \right) \frac{V^2}{\rho^2} + \xi_2 \frac{V^2}{\rho^2} &= 0 \\ \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} - \frac{mV}{\rho^3} \frac{d\xi_2}{dt} - \xi_2 \left(1 - \frac{5}{4} \frac{m}{\rho^2} \right) \frac{V^2}{\rho^2} + \xi_1 \frac{V^2}{\rho^2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Полагая $m / \rho^2 \ll 1$, получаем, что решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям (4.12), имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1/2 (\xi_{10} - \xi_{20}) \rho_0 \rho^{-1} + (1 - 1/2 \rho_0^{-1} \rho) (\xi_{10} + \xi_{20}) + Q \\ \xi_2 &= -1/2 (\xi_{10} - \xi_{20}) \rho_0 \rho^{-1} + (1 - 1/2 \rho_0^{-1} \rho) (\xi_{10} + \xi_{20}) + Q \\ Q &= (\xi_{10} + \xi_{20}) [O(m\rho^{-1} \rho_0^{-1} \ln \rho) + O(m\rho^{-2})] + (\xi_{10} - \xi_{20}) O(m\rho_0 \rho^{-3}) \end{aligned}$$

Так как $\xi_{10} + \xi_{20} = 0$ в случае симметричных, а $\xi_{10} - \xi_{20} = 0$ в случае антисимметричных возмущений, то ввиду (4.4) отсюда следует, что движение устойчиво в первом и неустойчиво во втором случае.

5. Влияние сил прочности. Во всех рассмотренных выше примерах, за исключением полосы и кольца с симметричными возмущениями (см. п. 2 и 4), течение идеальной несжимаемой жидкости неустойчиво. Рассмотрим, какое влияние оказывает на устойчивость движения учет прочностных сил. Так как тонкое кольцо имеет такую же неустойчивость, как и растягивающаяся полоса с антисимметричными возмущениями, ограничимся случаем, когда область течения представляется полосой.

Введем поверхностное натяжение σ .

В выражение (1.3) нужно добавить давление поверхностного натяжения

$$p_\sigma = -\sigma \eta_{xx} \quad (5.1)$$

Выполняя все преобразования п. 2, получаем уравнения для симметричных возмущений

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{4k}{t^3} \operatorname{csch} \frac{2k}{t^2} \frac{d\xi}{dt} + \frac{2k}{t^4} \operatorname{th} \frac{k}{t^2} \left(1 + \frac{\delta k^2 t^2}{2}\right) \xi = 0 \quad (5.2)$$

для антисимметричных, где $\delta = \sigma / Dah_0^3$ — безразмерная величина

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{4k}{t^3} \operatorname{csch} \frac{2k}{t^2} \frac{d\xi}{dt} + \frac{2k}{t^4} \operatorname{cth} \frac{k}{t^2} \left(1 + \frac{\delta k^2 t^2}{2}\right) \xi = 0 \quad (5.3)$$

При $t \rightarrow \infty$ уравнения (5.2) и (5.3) можно записать соответственно в виде

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\delta k^4}{t^4} \xi = 0, \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{2}{t} \frac{d\xi}{dt} + \delta k^2 \xi = 0 \quad (5.4)$$

Решения этих уравнений соответственно будут

$$\xi = C_1 \sin \frac{k_1}{t} + C_2 \cos \frac{k_1}{t}, \quad \xi = t (C_1 \sin k_1 t + C_2 \cos k_1 t) \quad (k_1 = k^2 \delta^{1/2}) \quad (5.5)$$

Из (2.3), (2.6) и (2.20) следует, что амплитуда возмущения определяется величиной ξ / t . Таким образом, введение поверхностного натяжения, в некотором смысле, стабилизирует течение, бывшее ранее неустойчивым по отношению к антисимметричным возмущениям.

Рассмотрим теперь влияние поверхностного натяжения в случае равномерно ускоряющейся полосы (п. 3).

Введем (5.1) в уравнения (3.1) — (3.11). Тогда система (3.12) примет вид

$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = A_1 \xi_1 + B_1 \xi_2, \quad \frac{d^2\xi_2}{dt^2} = A_2 \xi_1 + B_2 \xi_2 \quad (5.6)$$

Здесь

$$A_1 = k \left(a - \frac{\sigma k^2}{D} \right) \operatorname{cth} kh_0, \quad B_1 = -\frac{k}{\operatorname{sh} kh_0} \left(a + \frac{\sigma k^2}{D} \right) \\ A_2 = \frac{k}{\operatorname{sh} kh_0} \left(a - \frac{\sigma k^2}{D} \right), \quad B_2 = -k \left(a + \frac{\sigma k^2}{D} \right) \operatorname{cth} kh_0$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$s^4 + \frac{2\sigma k^3}{D} \operatorname{cth} kh_0 s^2 + k^2 \left(\frac{\sigma^2 k^4}{D^2} - a^2 \right) = 0 \quad (5.7)$$

а решение

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^4 C_i e^{s_i t}, \quad \xi_2 = \sum_{i=1}^4 C_i' e^{s_i t} \quad (5.8)$$

где s_i — корни характеристического уравнения.

При $k < (aD/\sigma)^{1/2}$ уравнение (5.7) имеет положительный вещественный корень, и, следовательно, движение неустойчиво. При $k > (aD/\sigma)^{1/2}$ все корни мнимые, и движение устойчиво. Интересно найти максимальное положительное значение корня этого уравнения. Имеем

$$s^2 = \left(\frac{\sigma^2 k^6}{D^2 \operatorname{sh}^2 kh_0} + a^2 k^2 \right)^{1/2} - \frac{\sigma k^3}{D} \operatorname{cth} kh_0 \quad (5.9)$$

Предположим, что $h_0 \gg 3\sigma/p$ и $kh_0 \gg 1$. Тогда из (5.9) получим приближенно

$$s^2 = ak - \sigma k^3 / D \quad (5.10)$$

это выражение имеет максимум при $k_{\max} = 1/3 (aD/\sigma)^{1/2}$. Таким образом, получаем, что в этом случае наиболее неустойчивы гармоники с

$$k_{\max} = \left(\frac{aD}{3\sigma} \right)^{1/2} \equiv \left(\frac{p_0}{3\sigma h_0} \right)^{1/2} \quad (5.11)$$

Аналогичным способом может быть исследовано влияние, которое оказывают упругие силы на движение полосы с постоянным градиентом давления. Предположим, что тензоры деформаций статической и динамической задач, обеспечивающих одни и те же смещения границ, мало отличаются друг от друга. Тогда уравнения движения несжимаемого упругого тела сводятся к уравнениям движения идеальной несжимаемой жидкости, а влияние упругости проявляется лишь в граничных условиях, где от внешнего давления следует отнять давление, которое удерживало бы тело в состоянии деформации. В случае упругой балки последнее равно

$$p_E = EI \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \quad (5.12)$$

Вводя это выражение в (3.1) — (3.11), так же, как и в случае поверхностного натяжения, получим

$$d^2 \xi_1 / dt^2 = A_1' \xi_1 + B_1' \xi_2, \quad d^2 \xi_2 / dt^2 = A_2' \xi_1 + B_2' \xi_2 \quad (5.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_1' &= k(a - \mu k^4) \operatorname{cth} kh_0, & B_1' &= -\frac{k}{\operatorname{sh} kh_0} (a + \mu k^4) \\ A_2' &= \frac{k}{\operatorname{sh} kh_0} (a - \mu k^4), & B_2' &= k(a + \mu k^4) \operatorname{cth} kh_0 \end{aligned} \quad \left(\mu = \frac{EI}{D} \right)$$

В дальнейшем все аналогично случаю с поверхностным натяжением с той только разницей, что вместо $\sigma k^2 / D$ в данном случае следует писать EIk^4 / D . В частности, неустойчивы гармоники с $k < (a/\mu)^{1/4}$. Если предположить, что $p_0 / E \ll 1$, то для наиболее неустойчивой гармоники в данном случае получаем $k_{\max} = (ah_0 / 8\mu)^{1/4}$ или, учитывая, что в данном случае $I = h_0^3 / 12$.

$$k_{\max} = \frac{1}{h_0} \left(\frac{3p_0}{2E} \right)^{1/4} \quad (5.14)$$

Поступила 15 X 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.