

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ
ПРИ БОЛЬШИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В. В. Гогосов, В. А. Полянский, И. П. Семенова,
А. Е. Якубенко

(Москва)

Исследуется движение среды, состоящей из нейтральных частиц и заряженных частиц одного знака, в предположении, что электрическое число Рейнольдса ($\bar{R}_e = u / bE$) велико. Выписываются интеграл вмерзженности, интегралы Бернулли и Коши — Лагранжа, исследуется движение жидкости в трубке тока, дается постановка задачи о пограничном слое.

1. Основные уравнения и интеграл вмерзженности. Уравнения электрогидродинамики, приведенные в работе [1] в случае больших значений электрического числа Рейнольдса (малые значения подвижности b) существенно упрощаются. Уравнение движения заряженной компоненты (закон Ома) имеет в случае $b = 0$ простой вид

$$\mathbf{j} = q\mathbf{u}$$

Из уравнений

$$\partial q / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0$$

следует, что

$$q = \beta \rho \tag{1.1}$$

В формуле (1.1) величина β постоянна в частице ($d\beta/dt = 0$). Другими словами, имеет место вмерзженность заряженных частиц в нейтральную среду; в стационарном случае β не меняется вдоль линии тока.

Нетрудно видеть, что поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность, состоящую из жидких частиц, не меняется. Действительно, имеем

$$\frac{d}{dt} \int_S E_n dS = 4\pi \int_V \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} q\mathbf{u} \right) dV = 0$$

Вводя потенциал электрического поля, уравнения электрогидродинамики можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p - \beta \rho \nabla \phi + \operatorname{div} \boldsymbol{\pi} \tag{1.2}$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \Phi + \operatorname{div} (\lambda \nabla T) \tag{1.3}$$

$$p = \rho RT, \quad \Delta \phi = -4\pi \beta \rho, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi \tag{1.4}$$

Здесь $\boldsymbol{\pi}$ — тензор вязких напряжений, Φ — диссипативная функция [2].

Система уравнений (1.2) — (1.4) замкнута. Заряд q и электрическое поле \mathbf{E} находятся после решения системы из (1.1) и последнего уравнения (1.4). Уравнения (1.2) — (1.4) аналогичны уравнениям, описывающим движение среды в самосогласованном поле тяжести [3].

2. Интегралы Бернулли и Коши — Лагранжа. Рассмотрим движение невязкой и нетеплопроводной среды. В этом случае система уравнений (1.2) — (1.4) допускает интегралы Бернулли и Коши — Лагранжа. Записывая уравнения движения в форме Громеки — Лемба, имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 + \frac{1}{\rho} \nabla p + \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u} + \beta \nabla \varphi = 0 \quad (2.1)$$

Пусть течение стационарно. Проектируя уравнение (2.1) на произвольную линию L и вводя вдоль нее направление отсчета ее длины l , получим

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{u^2}{2} + \mathcal{P} + \beta \varphi \right) + (\text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u})_l - \varphi \frac{\partial \beta}{\partial l} = 0, \quad \mathcal{P} = \int \frac{dp}{\rho(p, L)} \quad (2.2)$$

Если L совпадает с линией тока, то имеет место интеграл Бернулли

$$u^2/2 + \mathcal{P} + \beta(L) \varphi = C(L) \quad (2.3)$$

При этом $C(L)$, вообще говоря, зависит от линии тока. Из (2.2) видно, что если $\varphi \nabla \beta = \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u}$, то постоянная C в интеграле Бернулли одинакова во всем потоке. В случае, когда β не зависит от линии тока, условия постоянства C во всем потоке совпадают с условиями в обычной гидродинамике.

Предположим, что движение потенциально $\mathbf{u} = \nabla \psi$ и имеет место баротропия $p = p(\rho)$. В этом случае уравнения Громеки — Лемба записываются в виде

$$\nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \mathcal{P} \right) = -\beta \nabla \varphi \quad (2.4)$$

Массовая сила $-\beta \nabla \varphi$ обладает потенциалом U ($\nabla U = -\beta \nabla \varphi$), когда $\text{rot } (\beta \nabla \varphi) = \nabla \beta \times \nabla \varphi = 0$. При этом имеет место интеграл Коши — Лагранжа

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \mathcal{P} - U = C(t) \quad (2.5)$$

В случае, когда величина β постоянна во всем потоке, $U = -\beta \varphi$.

Рассмотрим движение несжимаемой жидкости ($\rho = \rho_0 = \text{const}$) при $\beta = \text{const}$ ($q = \beta \rho_0 = q_0 = \text{const}$). В этом случае задачи об определении движения среды и электрического потенциала отделяются друг от друга. Уравнения (1.2) — (1.4) для стационарного потенциального течения записываются в виде

$$\Delta \psi = 0, \quad \Delta \varphi = -4\pi q_0, \quad 0.5 u^2 + p/\rho_0 + \beta \varphi = C \quad (2.6)$$

Рассмотрим задачу об обтекании тела. Решение задачи сводится к решению независимо друг от друга первых двух уравнений (2.6) с соответствующими граничными условиями. Для вычисления сил, действующих на поверхность тела, надо воспользоваться третьим уравнением (2.6). Вычислим, например, силу, действующую на тело при движении его в заданном постоянном электрическом поле E_0 (электрическое поле можно считать заданным при малых значениях параметра $Q = 4\pi q_0 L / E_0$). Выбором системы координат всегда можно добиться, чтобы электрическое поле имело только одну составляющую вдоль оси z . Из последнего уравнения (1.4) при постоянном E_0 имеем $\varphi = -E_0 z$. Заметим, что при малых Q второе уравнение (2.6) принимает вид $\Delta \varphi = 0$. Из третьего уравнения (2.6) видно, что этот случай эквивалентен случаю движения тела в жидкости в постоянном поле тяжести.

При помощи третьего уравнения (2.6) легко показать, что на тело будет действовать дополнительная сила, равная $q_0 V E_0$. Здесь V — объем тела. Величина $q_0 V$ есть полный заряд среды в объеме, занятом телом. Таким образом, на тело действует дополнительная сила, равная произведению электрического поля на величину полного заряда среды в объеме, занятом телом. Направление этой силы противоположно направлению вектора напряженности электрического поля. Этот вывод справедлив для $q_0 > 0$. Если $q_0 < 0$, направление действия силы совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля.

Нетрудно видеть, что вывод формулы для силы Архимеда не изменится и при конечных значениях электрических чисел Рейнольдса.

3. Движение в трубке тока. Рассмотрим движение идеального, нетеплопроводного, совершенного газа в тонкой трубке переменного сечения. Будем предполагать, что течение в такой трубке одномерно, т. е. скорости жидкости в различных точках сечения σ приблизительно одинаковы и при установившемся течении отличаются только при переходе от одного сечения к другому. Ось x направим вдоль оси трубки. Для адиабатических течений система уравнений (1.2) — (1.4) имеет следующие интегралы:

$$\rho u \sigma = m, \quad q u \sigma = I, \quad p = C \rho^\gamma, \quad m (c_p T + 0.5 u^2) + I \varphi = m i_0 \quad (3.1)$$

Здесь $\sigma = \sigma(x)$ — площадь сечения трубки в точке x , m и I — расход массы и расход заряда (полный ток) через сечение трубки, i_0 — полная энтальпия единицы массы. Третье уравнение (3.1) является интегралом адиабатичности, а четвертое — интегралом энергии. В дальнейшем будем предполагать, что сечение трубки тока как функция x известно и что в начальном сечении известны все гидродинамические и электрические величины q_0, φ_0 . Соотношения (3.1) и первое уравнение (1.4) позволяют связать значения всех параметров в начальном и конечном сечениях трубки, если считать, что значение электрического потенциала φ в конечном сечении известно и определяется из закона Ома во внешней цепи. Для определения изменения гидродинамических и электрических величин вдоль оси x необходимо, кроме уравнений (3.1) и первого уравнения (1.4), воспользоваться дифференциальным уравнением

$$\frac{m}{\sigma(x)} u' + p' = - \frac{I \rho}{m} \varphi' \quad (3.2)$$

Удобно ставить граничные условия для потенциала φ в виде

$$\varphi = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \varphi = \varphi_1 \quad \text{при } x = L \quad (3.3)$$

Здесь и далее буквой L обозначена длина трубки. Величина φ_1 в уравнении (3.3) определяется из закона Ома для внешней цепи.

Рассмотрим течение жидкости в канале постоянного сечения. Уравнение (3.2) допускает в этом случае интеграл

$$m u / \sigma + p - (\varphi')^2 / 8\pi = \Pi = \text{const} \quad (3.4)$$

Приведем уравнения (3.1), (3.4) к безразмерному виду

$$\begin{aligned} \rho^* u^* &= 1, \quad q^* u^* = 1, \quad p^* = \rho^{*\gamma} \\ \frac{T^*}{(\gamma - 1) M_0^2} + \frac{u^{*2}}{2} + S \varphi^* &= \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma - 1) M_0^2} \\ u^* + \frac{p^*}{\gamma M_0^2} &= \frac{S}{2Q} [(\varphi^{*'})^2 - (\varphi_0^{*'})^2] + 1 + \frac{1}{\gamma M_0^2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Иногда удобно также использовать уравнение $\varphi^{*''} = -Q/u^*$.
Граничные условия (3.3) перейдут при этом в

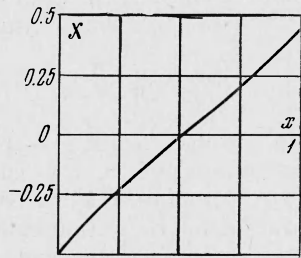
$$\varphi^* = 0 \quad \text{при } x^* = 0, \quad \varphi^* = 1 \quad \text{при } x^* = 1 \quad (3.6)$$

Здесь

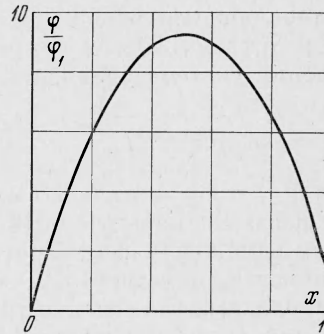
$$x^* = x/L, \quad u^* = u/u_0, \quad p^* = p/p_0, \quad T^* = T/T_0, \quad q^* = q/q_0$$

$$M_0^2 = \frac{u_0^2}{\gamma RT_0}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi}{\varphi_1}, \quad Q = \frac{4\pi q_0 L^2}{\varphi_1}, \quad S = \frac{q_0 \varphi_1}{\rho_0 u_0^2}, \quad E^* = \frac{EL}{\varphi_1}$$

Входящая в уравнения (3.5) величина электрического поля в начальном сечении канала $-(\partial\varphi^*/\partial x^*)_0$ неизвестна и должна быть определена из решения задачи. Все остальные величины, помеченные индексом нуль, считаются известными значениями параметров в начальном сечении.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для примера приведем результаты численного решения системы уравнений (3.5) с граничными условиями (3.6). При расчетах принимались следующие числовые значения параметров: $S = 0.1$, $Q = 100$, $M_0 = 0.5$, $\gamma = 1.4$. Расчет проводился для случая, когда $\varphi_1 > 0$. На фиг. 1, 2 приведены зависимости χ ($\chi = E^* / 80$) и потенциала φ^* от x^* . Электрическое поле при выбранных значениях параметров обращается в нуль в некотором сечении, близком к середине канала, и далее становится положительным. В этом сечении генераторный режим течения переходит в ускорительный.

4. Одномерное течение в канале постоянного сечения с малым параметром взаимодействия. В случае малого параметра взаимодействия $S \ll 1$ электрические силы не влияют на гидродинамическое течение. Системе уравнений (3.5) в этом случае удовлетворяет решение с постоянными значениями гидродинамических параметров u^* , p^* , ρ^* , T^* . Дифференциальное уравнение для электрического потенциала принимает вид

$$\varphi^{*''} = -Q \quad (4.1)$$

Решение уравнения (4.1) есть

$$\varphi^* = -E_0^* x^* - 0.5Qx^{*2} \quad (4.2)$$

Из граничного условия (3.6) при $x^* = 1$ имеем

$$E_0^* = -(1 + 0.5Q)$$

Выражение для электрического поля имеет вид

$$E^* = Qx^* - (1 + 0.5Q) \quad (4.3)$$

Исследуем решение (4.2). Значение x^* , при котором потенциал φ^* достигает максимального значения, определяется из условия $\varphi^{*'} = 0$. Имеем

$$x_m^* = (1 + 0.5Q) / Q \quad (4.4)$$

В сечении $x^* = x_m^*$ электрическое поле E^* обращается в нуль и происходит смена режимов течения. В зависимости от числового значения параметра Q сечение $x^* = x_m^*$ может быть расположено на различных расстояниях от начала канала. Из (4.4) следует, что при $Q = 2$ величина x_m^* равна единице, т. е. это сечение совпадает с концом канала. При $Q < 2$ электрическое поле E^* не меняет знак внутри канала. При больших значениях параметра Q приблизительно имеем $x_m^* = 0.5$. Расчеты, представленные в п. 3 для произвольных значений параметра взаимодействия, показывают, что уже при $S = 0.1$ и $Q = 100$ этот вывод подтверждается. Приняв во внимание, что $Q = 4\pi q_0 L^2 / \varphi_1$, получим условие постоянства знака E^* , воспользовавшись законом Ома для внешней цепи

$$\varphi_1 = h j_0 r = R q_0 u_0$$

Здесь h — высота канала, j_0 — плотность электрического тока, r — сопротивление внешней цепи, а $R = hr$.

Условие $Q < 2$ дает

$$u_0 > 2\pi L^2 / R$$

Для определения той части энергии газа, которая преобразуется в электрическую, представим интеграл энергии (3.4) в виде

$$i_0 - i_1 = \varphi_1 j_0 / m = \varphi_1^2 / mR$$

Здесь $i_0 - i_1$ — разность энтальпий в начальном и конечном сечениях канала. Очевидно, что максимальное значение φ_1 , которое можно получить на выходе из канала, ограничено условием

$$\varphi_1 \leq \sqrt{i_0 R m}$$

Заданную мощность φ_1^2 / mR в канале заданной длины с заданными i_0 и j_0 можно получить двумя способами: при больших скоростях потока и низких температурах газа ($i_0 = c_p T + u^2 / 2$ — задано) и при малых скоростях потока, но высоких температурах газа в начальном сечении.

Одномерные течения в каналах переменного сечения в приближенной постановке рассматривались в работе [4]. В качестве граничного условия в этой работе принималось $E = 0$ при $x = L$. Этим условием отбирается частное решение, в котором потенциал достигает максимального значения в конце канала.

5. **Постановка задачи о пограничном слое.** Система уравнений (1.2) — (1.4) описывает течение вязкой сжимаемой электропроводной жидкости в электрическом поле. При больших значениях числа Рейнольдса вязкость и теплопроводность среды нужно учитывать не во всей области течения, а только в узких слоях, где происходит резкое изменение скорости и температуры, в так называемых пограничных слоях. В электрогидродинамике помимо вязкого и теплового пограничных слоев может существовать, вообще говоря, слой резкого изменения плотности заряженных частиц, толщина которого может отличаться от толщины вязкого и теплового пограничных слоев. Однако, как будет показано ниже, в широком диапазоне изменения определяющих параметров толщина изменения плотности электрического заряда совпадает с толщиной обычного пограничного слоя.

Проведем оценки пограничного слоя для системы уравнений (1.2) — (1.4). Для простоты рассмотрим плоский случай, когда все величины

зависят только от координат x и y . Введем в рассмотрение толщину слоя δ , на которой происходит резкое изменение гидродинамических величин. Приравнявая порядки величин вязкого члена и электрического в уравнении движения (1.2) в проекции на ось x , получаем следующую оценку:

$$\delta / L \sim (RS)^{-0.5}$$

При этом в выражении для тензора вязких напряжений был оставлен, как и в обычной гидродинамике, член $\partial/\partial y$ ($\eta \partial u/\partial y$). Из уравнения неразрывности (1.2) следует, что $\rho^* v^* \sim \delta / L$. Выпишем уравнение движения в проекции на ось x , учитывая сделанные оценки

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + q E_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (5.1)$$

Для оценки члена $q E_x$ в уравнении (5.1) воспользуемся интегралом замороженности $q = \beta \rho$ и уравнением

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \quad (\text{rot } \mathbf{E} = 0) \quad (5.2)$$

Из уравнения (5.2) следует, что ΔE_x (изменение E_x поперек пограничного слоя) имеет порядок

$$\Delta E_x \sim \frac{\partial E_y}{\partial x} \delta \quad (5.3)$$

Будем считать, что $|\partial E_y / \partial x| \lesssim E_0 / L$. Тогда $\Delta E_x \sim \delta$ и изменением E_x поперек вязкого пограничного слоя можно пренебречь, считая

$$E_x = E_x^\infty(x) \quad (5.4)$$

В дальнейшем значком бесконечность будут обозначены значения величин на внешней границе пограничного слоя. Покажем, что давление p не меняется поперек пограничного слоя. Для этого воспользуемся уравнением движения в проекции на ось y , оставив в нем только главные члены

$$\partial p / \partial y = q E_y \quad (5.5)$$

и вторым и третьим уравнениями (1.4), которые с учетом (5.4) можно записать в виде

$$\partial E_y / \partial y = 4\pi (q - q_\infty) \quad (5.6)$$

При выводе уравнения (5.6) предполагалось, что $E_y^\infty = 0$. Из уравнений (5.5) и (5.6) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(p - \frac{E_y^2}{8\pi} \right) = q_\infty E_y \quad (5.7)$$

Интегрируя уравнение (5.7) поперек вязкого пограничного слоя, получим

$$p - E_y^2 / 8\pi \sim p_\infty \quad (5.8)$$

Предположим, что $E_y \lesssim E_0$ — величины максимально возможного электрического поля, определяемого величиной пробойного напряжения. При этом из уравнения (5.8) имеем для не слишком малых давлений во внешнем потоке

$$\frac{p}{p_\infty} - 1 \sim \frac{E_y^2}{8\pi p_\infty} \ll \frac{E_0^2}{8\pi p_\infty} \ll 1$$

Таким образом, изменением давления поперек пограничного слоя можно пренебречь, считая $p = p_\infty(x)$.

При $\beta = \text{const}$ толщина изменения q совпадает с толщиной изменения ρ . Из уравнения притока тепла (1.3), которое в точности совпадает с соответствующим уравнением в обычной гидродинамике, и уравнения состояния следует, что толщина слоя изменения плотности заряда q совпадает с толщиной теплового слоя.

Выпишем окончательную систему уравнений пограничного слоя в случае $b = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \quad p = \rho RT \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -p' + \beta \rho E_x^\infty + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= u \rho' + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Граничные условия для системы (5.9) совпадают с граничными условиями, принятыми в обычной гидродинамике. Входящие в уравнения (5.9) величины p и E_x^∞ определяются из решения одномерных уравнений во внешнем потоке, исследование которых для течения в каналах проведено в п. 3 и 4. Исследование одномерных течений при $b \neq 0$ дано в работе [5].

Таким образом, для случая больших электрических чисел Рейнольдса (малые значения подвижности заряженных частиц) система уравнений пограничного слоя отличается от системы уравнений пограничного слоя в обычной гидродинамике наличием дополнительного члена в уравнении импульсов $\beta \rho E_x$, в котором E_x определяется из решения задачи во внешнем потоке¹.

В случае $\rho = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ (отметим, что при этом $q = \text{const}$) можно ввести функцию p^* соотношением

$$p^* = p + q\varphi_\infty(x) \quad (5.10)$$

Здесь $\varphi_\infty(x)$ функция, определяемая из решения задачи в ядре потока. При этом система уравнений (5.9) принимает вид по форме, совпадающей с соответствующей системой уравнений пограничного слоя в обычной гидродинамике несжимаемой жидкости, в которых вместо p стоит p^* . Уравнения для внешнего потока в одномерной постановке также совпадают с соответствующими уравнениями гидродинамики несжимаемой жидкости с заменой p на p^* . Для решения задач о пограничном слое в электрогидродинамике с $b = 0$, $\beta = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$ можно воспользоваться результатами, полученными в обычной гидродинамике. При этом нетрудно видеть, что влияние электрического поля сказывается только на распределении давления p в жидкости. Известное в обычной гидродинамике условие отрыва пограничного слоя от стенки [6] может быть записано в виде

$$\frac{p^* \delta^2(x)}{\eta u_\infty} = \frac{(p + q\varphi_\infty)' \delta^2(x)}{\eta u_\infty} = 2 \quad (5.11)$$

Аналогичное условие для точки отрыва может быть получено и для случая течения сжимаемого газа у теплоизолированной стенки $((\partial T / \partial y)_w =$

¹ Вопрос об управлении электрогидродинамическим пограничным слоем рассматривался в работах В. А. Касьянова и Г. Н. Боярского. См. Касьянов В. А. канд. дисс., Киев, Институт гидромеханики, 1965, Боярский Г. Н. канд. дисс., Киев, Институт гидромеханики, 1968.

$= 0$). Значком w будем в дальнейшем обозначать значения всех параметров на стенке. Для вывода условия отрыва пограничного слоя воспользуемся способом, изложенным в работах [6,7]. Профиль скорости в точке отрыва представляется в виде ряда Тейлора, в котором значения производных $\partial^2 u / \partial y^2, \partial^3 u / \partial y^3, \dots$ определяются путем последовательного дифференцирования уравнений исходной системы и использования соотношений в точке отрыва ($u = 0, v = 0, \partial u / \partial y = 0$). Используя систему (5.9), легко показать, что в точке отрыва все члены ряда Тейлора равны нулю, кроме члена, содержащего вторую производную. Используя соотношение

$$\eta_w (\partial^2 u / \partial y^2)_w = p' - \beta \rho_w E_x^\infty$$

для профиля скорости в сечении отрыва при $\beta = \text{const}$, имеем

$$u(y) = \frac{y^2}{2\eta_w} (p' - q_w E_x^\infty), \quad q_w = \beta \rho_w \quad (5.12)$$

Полагая в (5.12) $y = \delta$, получим условие отрыва пограничного слоя

$$\frac{\delta^2(x)(p' - q_w E_x^\infty)}{u_\infty \eta_w} = 2 \quad (5.13)$$

Формула (5.13) позволяет определить сечение, в котором произойдет отрыв пограничного слоя, без решения системы (5.9), если значение толщины пограничного слоя $\delta(x)$ и значение температуры на стенке T_w определены, например, при помощи полуэмпирических теорий.

Поступила 8 VII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Stuetzer O. M. Magnetohydrodynamics and electrohydrodynamics. J. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 5.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
3. Седов Л. И. Методы теории размерности и подобия. М., «Наука», 1966.
4. Marks A., Varretto E., Cucc. Charged aerosol converter. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 1.
5. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Одномерные течения в электрогидродинамике. ПММ, 1968, № 6.
6. Бам-Зеликович Г. М. Расчет отрыва пограничного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
7. Ватажин А. Б. Об отрыве магнитогидродинамического пограничного слоя. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.