

$$\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \sigma_0 + (1 + \sigma_0) \left\{ \alpha_0 \frac{u_{3,0}}{T_\infty'} + \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \right\} = 0,$$

$$(1 + \sigma_0) \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \Theta_0 = \frac{\alpha_0}{T_\infty'} u_{3,0}, \quad \operatorname{rot} [\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_0] = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{b}_0 = 0, \quad \Theta_0(1 + \sigma_0) = -\sigma_0.$$

В системе (5.1) параметр  $\alpha_0$  фиксирован; если предположить, что  $\alpha_0 \rightarrow 0$ , тогда получим вместо уравнений (5.1) новую предельную систему:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \sigma_0 &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0, \\ [\operatorname{rot} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0] &= \frac{v_0}{\gamma} (\nabla \pi_1 + \mu_0 \sigma_0 \mathbf{e}_3), \\ \operatorname{div} \mathbf{b}_0 &= 0, \quad \operatorname{rot} [\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}_0] = 0, \quad \Theta_0 = -\sigma_0 / (1 + \sigma_0). \end{aligned}$$

К форме (5.2) приведена предельная система, соответствующая приближению Буссинеска для малых чисел Россби (см. [6]). Система (5.2) может представить интерес при изучении формирования солнечных пятен, где магнитные и конвективные эффекты являются связанными.

Теория магнитогиродинамических течений тяжелой жидкости при малых числах Альфвена, намеченная выше, аналогична с концептуальной точки зрения теории течений тяжелой вращающейся жидкости при малых числах Россби. Существует также большая аналогия между приближением статического равновесия (3.6), рассмотренным в п. 3, и классическим квазигеострофическим приближением в метеорологии [6].

Поступила 20 III 1979

#### REFERENCES

1. Germain P. Introduction à l'étude de l'aéromagnétodynamique.— Cahiers de Physique, 1959, N 103.
2. Zeytounian R. Kh. Notes sur les écoulements rotationnels de fluides parfaits. Vol. 27. Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Physics).
3. Grad H. Mathematical problems in magneto — fluid dynamics and plasma physics.— In: Proceed. of the Intern. Congr. of Maths. Stockholm, 1962.
4. Zeytounian R. Kh. Invariants lagrangiens et intégrales premières en magnétodynamique des fluides.— Appl. Sci. Research, 1976, vol. 32, N 6.
5. Monin A. S. Weather forecasting as a problem in physics (translated by P. Supepak). M. I. T. Press, 1972.
6. Zeytounian R. Kh. La météorologia du point de vue du Mécanicien des Fluides.— In: Fluid Dynamics Transactions. Vol. 8. éd. Polish Acad. of Sci., Warszawa, 1976.

УДК 532.522

### СИММЕТРИЧНОЕ СОУДАРЕНИЕ ДВУХСЛОЙНЫХ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

С. А. Кинеловский, Ю. А. Тришин  
(Новосибирск)

1. Рассмотрим задачу о нахождении потенциального течения, возникающего при симметричном соударении плоских двухслойных свободных струй идеальной несжимаемой жидкости. Предполагая течение установившимся, разберем условия, которым в этом случае должны удовлетворять течения в разных слоях соударяющихся струй. В силу симметрии можем для простоты заменить плоскость симметрии на жесткую неподвижную

стенку и рассматривать стационарную задачу о падении на эту стенку двухслойной струи идеальной несжимаемой жидкости. Течение в каждом из слоев струи характеризуется своим значением постоянной интеграла Бернулли. Предполагая давление в бесконечно удаленной точке и на свободных линиях тока равным нулю, обозначим через  $h$  отношение констант интеграла Бернулли в слоях:

$$(1.1) \quad h = \frac{\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2}{\frac{1}{2} \rho_2 v_2^2},$$

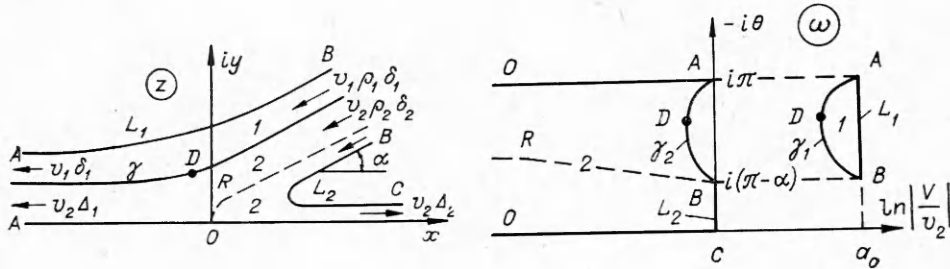
где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости жидкости в слоях в бесконечно удаленной точке, а индексы 1 и 2 присвоены соответственно внешнему (от стенки) и внутреннему слоям двухслойной струи. В общем случае плотности слоев  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и скорости  $v_1$ ,  $v_2$  различны. Кроме того, задача зависит еще от геометрических параметров, заданных в бесконечно удаленной точке, таких как толщины слоев и угол наклона струи к стенке. В зависимости от значений всех этих параметров в принципе возможны три варианта течения, возникающего при падении двухслойной струи на стенку: а) прямая струя (пест) неоднородная, обратная (кумулятивная) струя однородная; б) пест и кумулятивная струя однородные; в) пест однородный, кумулятивная струя неоднородная.

На фиг. 1 представлена конфигурация течения, соответствующая режиму «а» с однородной кумулятивной струей и неоднородным пестом, где  $\rho_1$  — плотность внешнего от стенки слоя жидкости,  $\rho_2$  — внутреннего, а их скорости в бесконечно удаленной точке  $v_1$  и  $v_2$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — толщины слоев падающей струи в бесконечно удаленной точке  $B$ ,  $\delta_1$  — толщина внешнего слоя песта в бесконечно удаленной точке  $A$ ,  $\Delta_1$  — внутреннего,  $\Delta_2$  — толщина кумулятивной струи в точке  $C$ . Угол наклона вектора скорости слоев падающей струи к стенке в точке  $B$  есть  $\theta_0 = -(\pi - \alpha)$ . Область течения внешнего слоя ограничена свободной линией тока  $L_1$ , на которой скорость жидкости  $v_1$ , и линией раздела слоев  $\gamma$ , которая также является линией тока. Область течения внутреннего слоя падающей струи ограничена линией тока  $\gamma$ , свободной линией тока  $L_2$ , на которой скорость жидкости  $v_2$ , и осью абсцисс, на которой для  $x > 0$  угол наклона вектора скорости равен нулю, а для  $x < 0$  угол наклона вектора скорости есть  $-\pi$ .

Рассмотрим области, соответствующие данному течению на различных плоскостях комплексного переменного. Области течения на физической плоскости  $z = x + iy$  изображены на фиг. 1. Области течения на плоскости комплексного потенциала  $w = \varphi + i\psi$  в данном случае очевидны: для внешнего слоя это будет полоса шириной  $q_1 = \delta_1 v_1$ , а для внутреннего слоя — полоса с разрезом такая же, как и в классической теории кумуляции, общая ширина этой полосы  $q_2 = \delta_2 v_2 = \Delta_1 v_2 + \Delta_2 v_2$ . Области течения на плоскости логарифма комплексной скорости

$$\omega = \ln \frac{dw}{v_2 dz} = \ln \left| \frac{V(z)}{v_2} \right| - i\theta(z),$$

где  $V$  и  $\theta$  — соответственно модуль вектора скорости и угол его наклона к оси  $x$ , для каждого из слоев представлены на фиг. 2. Для внутреннего слоя это будет полуполоса с выброшенным куском, ограниченным отрезком оси ординат и кривой  $\gamma_2$ , соответствующей линии раздела слоев  $\gamma$ . Область, соответствующая внешнему слою струи, ограничена вертикальной прямой, имеющей по оси абсцисс координату  $a_0 = \ln(v_1/v_2)$ , и некоторой кривой  $\gamma_1$ , соответствующей линии раздела  $\gamma$ .



Фиг. 1

Фиг. 2

Рассмотрим различные значения значения отношения постоянных интеграла Бернулли в слоях двухслойной струи. Если определяемая соотношением (1.1) величина  $h = 1$  и  $v_1 = v_2$ , то очевидно, что оба слоя состоят из одной и той же жидкости, никакого разрыва скорости течения по линии  $\gamma$  нет и имеется классическая задача о падении струи идеальной несжимаемой жидкости на неподвижную стенку (задача о симметричном соударении свободных струй). Если постоянные интеграла Бернулли в слоях равны ( $h = 1$ ), а  $v_1 \neq v_2$ , то линия тока  $\gamma$  является линией разрыва течения, но можно показать, как это делается в классической теории кумуляции, что течение может быть описано непрерывными аналитическими функциями. Математически это означает, что решения для каждой из областей 1 и 2 на плоскости комплексного потенциала могут быть аналитически продолжены через линию раздела областей из одной области в другую (см., например, [1]). Геометрически это означает, что области, соответствующие течению в каждом из слоев на плоскости  $\omega$  (см. фиг. 2), могут быть совмещены дополнительным сдвигом одной из них по оси абсцисс на величину

$$a_0 = \ln \frac{v_1}{v_2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

так, что область 1 займет место выреза в области 2, линии  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  совпадут и суммарная область будет полуполоса, как и в классическом случае. Физически это означает, что течения жидкости в каждом из слоев динамически подобны и могут быть получены одно из другого преобразованием динамического подобия. Значительно сложнее обстоит дело, если константы интеграла Бернулли в слоях не равны, т. е.  $h \neq 1$ . В этом случае решение для одной области не может быть аналитически продолжено в другую, а на плоскости  $\omega$  криволинейные участки  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  границ областей 1 и 2 не совпадут друг с другом при сдвиге области 2 параллельно оси абсцисс на величину  $a_0$  (см. фиг. 2). Течение будет описываться, как отмечено в [2], кусочно-аналитическими функциями. Для решения задачи необходимо найти решение для каждой из областей 1 и 2 на фиг. 1 и склеить эти решения по линии тока  $\gamma$ . Условие склейки решений получается из условия равенства давлений в областях 1 и 2 на линии раздела  $\gamma$  и может быть записано в виде

$$(1.2) \quad \rho_1 (v_1^2 - V_1^2(\beta)) = \rho_2 (v_2^2 - V_2^2(\beta)),$$

где  $V_1(\beta)$  и  $V_2(\beta)$  — модули скорости жидкости на линии раздела  $\gamma$  в соответствующих областях, параметрически заданные углом  $\beta$  наклона линии  $\gamma$  к оси  $x$ . В терминах функций комплексного переменного условие (1.2) означает, что комплексные потенциалы течений в областях 1 и 2 фиг. 1 на линии раздела  $\gamma$  этих областей должны удовлетворять условию

$$\rho_1 v_1^2 - \rho_1 \left| \frac{dw_1}{dz} \right|^2 = \rho_2 v_2^2 - \rho_2 \left| \frac{dw_2}{dz} \right|^2, \quad \arg \frac{dw_1}{dz} = \arg \frac{dw_2}{dz}.$$

Провести доказательство существования решения этой задачи и построить его в общем виде очень трудно, так как в данном случае обычный математический аппарат, разработанный для решения струйных задач, оказывается недостаточным. Но из физических соображений логично предположить, что раз стационарное струйное течение с разрывом скоростей по линии раздела слоев струи существует для  $h = 1$ , то существует и стационарное струйное течение, если константы интеграла Бернулли в слоях отличаются друг от друга, по крайней мере, на небольшую величину. Именно это предположение использовано в работах [2, 3] для построения решений струйных задач с разрывом течения на границе прилегающих струй применительно к задачам пневмоники. Как показали экспериментальные исследования струйных усилителей, влияние вязкости в зоне соударения струй незначительно по сравнению с влиянием градиента давления, что оправдывает идеализацию течения и замену развивающейся вниз по течению области смещения струй линией разрыва скорости [3]. Распространив часть рассуждений работ [3, 4] на наш случай, можно предположить существование единственного решения рассматриваемой задачи для значений  $h$  в малой окрестности значения  $h = 1$ .

2. Рассмотрим изображенную на фиг. 1 стационарную конфигурацию течения при падении двухслойной струи на стенку и предположим, что константы интеграла Бернулли в слоях равны, т. е.  $h = 1$ . В этом случае, как было отмечено выше, существует единственное решение данной задачи. Пусть  $V_{10}(\beta)$  и  $V_{20}(\beta)$  есть скорости жидкости в каждом из слоев на линии раздела  $\gamma$ , где  $\beta$  — угол наклона векторов скорости на  $\gamma$  к оси  $x$  — является параметром, определяющим каждую точку кривой  $\gamma$ , причем  $-\pi \leq \beta \leq -(\pi - \alpha)$ . В силу равенства постоянных интеграла Бернулли для скоростей слоев в бесконечно удаленной точке и в любой точке линии раздела  $\gamma$  имеем

$$(2.1) \quad v_2 = \lambda v_1, \quad V_{20}(\beta) = \lambda V_{10}(\beta),$$

где  $\lambda = \sqrt{\rho_1/\rho_2}$ .

Предположим, что толщина внешнего слоя много меньше толщины внутреннего слоя ( $\delta_1 \ll \delta_2$ ). Тогда из физических соображений ясно, что скорость жидкости вдоль линии раздела слоев во внешнем слое будет мало отличаться от  $v_1$ , а во внутреннем — от  $v_2$ :

$$(2.2) \quad V_{10}(\beta) = v_1(1 - v(\beta)), \quad V_{20}(\beta) = v_2(1 - v(\beta)),$$

причем легко показать с учетом (2.1), что это отличие  $v(\beta)$  для обоих слоев будет одно и то же. На концах линии раздела  $v(-\pi) = v(-\pi + \alpha) = 0$ , а максимальное значение  $v(\beta)$  достигает в некоторой точке  $D$  на  $\gamma$  (см. фиг. 1), где эта линия имеет максимальную кривизну (здесь давление для данной линии тока максимально, а скорости жидкости в слоях минимальны).

Несколько нарушим равенство констант интеграла Бернулли в слоях, а именно увеличим, например, скорость внешнего слоя в бесконечно удаленной точке на малую величину

$$(2.3) \quad v_{11} = v_1(1 + \varepsilon_0),$$

где можно считать, что  $\varepsilon_0$  имеет тот же порядок малости, что и  $\max v(\beta)$ . Изменение скорости  $v_1$  на малую величину вызовет малое изменение всего течения. На изменившейся линии раздела  $\gamma$  областей течения 1 и 2 можно записать

$$(2.4) \quad V_1(\beta) = V_{10}(\beta)(1 + \varepsilon_1(\beta)), \quad V_2(\beta) = V_{20}(\beta)(1 + \varepsilon_2(\beta)).$$

Так как константы интеграла Бернулли для областей 1 и 2 теперь не равны, то связь между скоростями жидкости вдоль границы раздела будет определяться не равенством (2.1), а соотношением (1.2), где следует учесть, что скорость в области 1 на бесконечности теперь  $v_{11}$ . Подставляя в (1.2) соотношения (2.3), (2.4), с учетом (2.1), (2.2) получаем

$$(2.5) \quad \varepsilon_1(\beta) \approx \varepsilon_2(\beta) + \varepsilon_0.$$

Из (2.4), (2.5) можно получить на криволинейных участках  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  границ областей 1 и 2 на плоскости  $\omega$  (см. фиг. 2) соотношения

$$(2.6) \quad \ln \frac{V_{z_1}(\theta)}{v_2} \approx \ln \frac{V_{z_0}(\theta)}{v_2} + \varepsilon_2(\theta), \quad \ln \frac{V_{z_1}(\theta)}{v_2} \approx \ln \frac{V_{z_0}(\theta)}{v_2} + \varepsilon_2(\theta) - \ln \lambda + \varepsilon_0.$$

Из (2.6) видно, что с точностью до малых, имеющих высший порядок по сравнению с  $\varepsilon_0$ , область 1 на фиг. 2 при сдвиге вдоль оси абсцисс на величину  $a_1 = (\ln \lambda - \varepsilon_0)$  вкладывается в вырез области 2. Подобно тому, как это делается в [1], можно показать, что в данном случае с указанной точностью решение для области 2 на плоскости комплексного потенциала может быть аналитически продолжено в область 1. К аналогичному результату придем, если изменение константы интеграла Бернулли во внешнем тонком слое организуем не за счет изменения скорости (2.3), а за счет малого изменения плотности жидкости.

Следовательно, в том случае, когда константы интеграла Бернулли в слоях жидкости отличаются на малую величину и в предположении малости толщины внешнего слоя с точностью до малых высшего порядка, решение для течения двухслойной струи может быть найдено классическими методами, разработанными для решения струйных задач.

В заключение отметим, что хотя выше и рассматривался вариант течения «а», но все вышесказанное в равной мере относится и к варианту течения «в» с однородным пестом и неоднородной кумулятивной струей.

3. Остановимся теперь более подробно на варианте течения «б», т. е. режиме течения с однородными пестом и кумулятивной струей. С этой целью выпишем сначала условия, которым должны удовлетворять параметры нашей задачи, чтобы реализовался тот или иной режим течения. Рассмотрим вариант течения «а», изображенный на фиг. 1. Из условия сохранения потоков массы и импульса получаем выражение для толщины внутреннего слоя песта

$$(3.1) \quad \Delta_1 = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \delta_2 - \frac{\lambda^2 v_1^2}{v_2^2} \frac{1 - \cos \alpha}{2} \delta_1.$$

Отсюда, положив  $\Delta_1 > 0$ , получаем условие реализации режима течения с однородной кумулятивной струей, которое запишем в виде

$$(3.2) \quad \delta_2 > \frac{\lambda^2 v_1^2}{v_2^2} \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \delta_1.$$

Аналогично можно получить условие реализации режима течения с однородным пестом и неоднородной кумулятивной струей. Это условие будет иметь вид (3.2), в котором знак неравенства изменен на обратный. Таким образом, при падении двухслойной струи на стенку условием реализации течения с однородными пестом и кумулятивной струей, т. е. условием реализации варианта течения «б», является выражение (3.2) со знаком равенства. По крайней мере, по своим условиям существования данный режим течения является промежуточным, переходным между вариантами «а» и «в». Отсюда формально следует, что, последовательно изменяя значения определяющих задачу параметров так, чтобы, например, неравенство

(3.2) постепенно уменьшалось, становилось равенством и затем обратным неравенством, мы должны получить набор течений, конфигурация которых постепенно переходит от варианта течения «а» через вариант «б» к варианту течения «в». В действительности, оставаясь в рамках принятой схемы с двумя областями течения, осуществить такой переход невозможно. При приближении неравенства (3.2) к равенству линия раздела  $\gamma$  приближается к разветвляющейся линии тока  $R$  (см. фиг. 1), на которой находится точка  $O$  полного торможения потока в области 2.

Предположим для определенности, что постоянная интеграла Бернулли во внешнем слое падающей струи больше, чем во внутреннем, т. е.  $h > 1$ , и из (1.2) выразим текущую скорость  $V_1(\beta)$  жидкости в области 1 на линии тока  $\gamma$  через скорость  $V_2(\beta)$  в области 2:

$$(3.3) \quad V_1(\beta) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{v_2^2(h-1) + V_2^2(\beta)}.$$

Отсюда следует, что скорость жидкости в области 1 на линии тока  $\gamma$  не может быть меньше вполне определенной величины, а именно везде на линии раздела

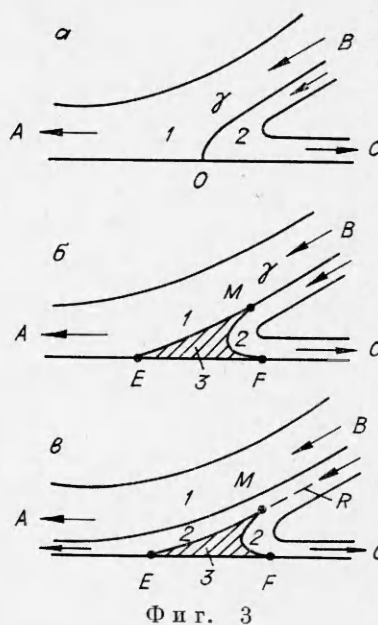
$$(3.4) \quad V_1(\beta) \geq \frac{v_2}{\lambda} \sqrt{h-1}.$$

С другой стороны, при наличии в (3.2) знака равенства линия раздела  $\gamma$  должна слиться с линией тока  $R$ , как это показано на фиг. 3, а, и жидкость в области 1 в точке  $O$  этой линии тока оказывается полностью заторможенной, что, согласно (3.4), возможно только при  $h = 1$ , или, что то же,  $\lambda^2 v_1^2 = v_2^2$ . Таким образом, осуществить режим течения, изображенный на фиг. 3, а, возможно только в единственном случае, когда постоянные интеграла Бернулли в слоях равны, т. е. когда течения в областях 1 и 2 динамически подобны друг другу. Более того, если провести рассуждения, качественно аналогичные рассуждениям М. А. Лаврентьева [1], то можно показать, что для схемы течения с ограниченными производными скорости при  $h \neq 1$  невозможна уже конфигурация течения, когда линия раздела  $\gamma$  достаточно близко подходит к разветвляющейся линии тока  $R$  (см. фиг. 1).

Рассмотрим конфигурацию течения на фиг. 1 и предположим, что  $h < 1$ . Тогда получаем, что скорость жидкости в области 2 на линии  $\gamma$  удовлетворяет неравенству

$$(3.5) \quad V_2(\beta) \geq v_2 \sqrt{1-h}.$$

С другой стороны, определенным выбором параметров задачи можно добиться, чтобы толщина внутреннего слоя песта  $\Delta_1$  была сколь угодно мала. В таком случае линия раздела  $\gamma$  очень близко подходит к разветвляющейся линии тока  $R$ , но не совпадает с ней. Но на линии тока  $R$  в окрестности



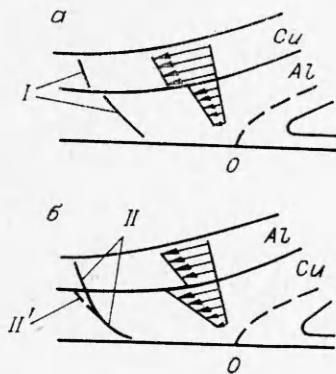
Фиг. 3

точки  $O$  скорость жидкости в области  $2$  очень мала и равна нулю в самой точке  $O$ , а на линии тока  $\gamma$  скорость жидкости ограничена снизу условием (3.5) и условие ограниченности производных скорости не выполняется.

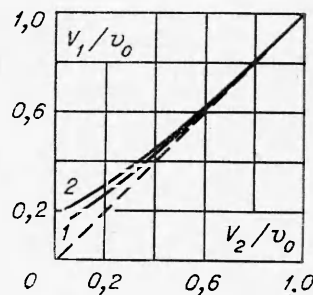
Вопрос о том, какая схема течения реализуется, когда линия раздела разнородных слоев двухслойной струи при  $h \neq 1$  достаточно близко подходит к разветвляющейся линии тока, представляет самостоятельный интерес, и ответить на него заранее нельзя. Не исключено, что в этом случае развивается неустойчивость течения и оно носит нестационарный периодический характер. Если попытаться остаться в рамках установившихся течений, то в качестве гипотезы можно предложить непротиворечивую с гидродинамической точки зрения конфигурацию течения с застойной зоной. На фиг. 3, б изображена такая конфигурация течения для случая, когда параметры задачи удовлетворяют соотношению (3.2) со знаком равенства, т. е. когда линия раздела слоев совпадает с разветвляющейся линией тока  $R$  и реализуется вариант течения с однородными пестом и кумулятивной струей. Разделяющая слои линия тока в некоторой точке  $M$  разветвляется на две линии тока  $ME$  и  $MF$ , которые вместе с участком  $EF$  стенки ограничивают область  $3$  покоящейся жидкости. На участке  $BM$  линии тока  $\gamma$  скорости в областях  $1$  и  $2$  связаны между собой соотношением (3.3), а на отрезках  $ME$  и  $MF$  разделившейся линии тока скорости постоянны и равны соответственно их значению в точке  $M$ . Данная конфигурация обеспечивает непрерывность давления во всей области течения. Классическая задача о соударении свободных струй идеальной несжимаемой жидкости с образованием застойной зоны, рассмотренная в свое время Чизотти, как известно, является недоопределенной. В зависимости от величины заданного в застойной зоне давления  $p_0$  она может простирается до бесконечности (если  $p_0 = 0$ ), иметь конечные размеры (если  $0 < p_0 < p_*$ ) и быть стянутой в точку (если  $p_0$  равно давлению полного торможения  $p_*$ ). В рассматриваемом случае размер застойной зоны не может быть меньше определенного, так как давление в ней должно быть строго меньше давления полного торможения для слоя с меньшим значением постоянной интеграла Бернулли. Тем не менее нельзя заранее сказать, будет ли данная задача достаточно определенной, чтобы иметь единственное решение. Аналогично можно предложить конфигурацию течения с застойной зоной и для случая, когда линия раздела слоев достаточно близко подходит к разветвляющейся линии тока. Для варианта течения «а», когда неравенство (3.2) близко к равенству, такая конфигурация течения изображена на фиг. 3, в. Преимуществом этой конфигурации по сравнению с изображенной на фиг. 1 заключается в том, что она всегда обеспечивает выполнение условия ограниченности производных скорости во всей области движущейся жидкости.

Резюмируя все вышеизложенное, можно сказать, что существование стационарных конфигураций во всех трех введенных в начале работы вариантах течения при симметричном соударении плоских двухслойных струй идеальной несжимаемой жидкости, когда постоянные интеграла Бернулли в слоях не равны друг другу, является непротиворечивым и имеет целый ряд факторов, говорящих в пользу этого утверждения (кроме приведенных в данной работе качественных рассуждений, сюда относятся и известные экспериментальные результаты).

4. В работе [4] экспериментально исследовалось поведение разнородных металлов на границе соединения при симметричном косом соударении биметаллических пластин. Симметричную схему соударения биметаллических пластин реализовывали посредством симметричного метания пластин рядами ВВ. Наличие и направление тангенциального разрыва



Фиг. 4



Фиг. 5

скорости на границе соединения разнородных металлов фиксировалось с помощью контрольных проволочек, запрессованных в биметаллические пластины по нормали к поверхности раздела.

В своих рассуждениях авторы [4] допустили несколько ошибочных выводов, большей частью основанных на тезисе о невозможности существования стационарной конфигурации течения при соударении неоднородных струй, и поэтому им не удалось дать достаточно простого и понятного объяснения факту возникновения разрыва контрольной проволочки. Анализ этих результатов, проведенный на основе всех вышеизложенных рассуждений, показал, что экспериментальные результаты работы [4] полностью получают объяснение в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости.

Струйная модель исследованного в [4] соударения биметаллических пластин характеризуется разными значениями плотности жидкости в слоях и одинаковыми значениями их скорости в бесконечно удаленной точке. Соотношение (3.3), определяющее связь между скоростями жидкости в слоях на разделяющей их линии тока  $\gamma$ , в данном случае принимает вид

$$(4.1) \quad V_1(\beta) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{(\lambda^2 - 1)v_0^2 + V_2^2(\beta)},$$

где  $v_0$  — общая скорость слоев в бесконечно удаленной точке. Это соотношение было выписано в [4], но авторы не уделили ему достаточного внимания. Из (4.1) следует, что более тяжелая жидкость на границе раздела всегда (кроме бесконечно удаленной точки) имеет более высокую скорость, что и дает объяснение полученным экспериментальным результатам. Напомним, что эти результаты относились к режиму течения с неоднородным пестом и однородной кумулятивной струей, который изображен на фиг. 1.

В 1-й серии экспериментов, описанных в [4], внешний слой был более тяжелый (медь), чем внутренний (алюминий). Согласно вышеизложенному, на линии раздела слоев в любой ее точке  $V_1(\beta) > V_2(\beta)$  и, следовательно, при соударении часть контрольной проволочки, находящаяся в меди, должна продвинуться дальше, чем часть проволочки, находящаяся в алюминии. Эксперименты и зарегистрировали этот факт (фиг. 3в [4]), который качественно изображен на фиг. 4, а, где цифрой 1 показано положение проволочки в слоях после соударения биметаллических пластин в 1-й серии экспериментов.

Качественно аналогичный результат должен был получиться в 3-й и 4-й сериях экспериментов работы [4], где внешний слой — дюраль, а внутренний — алюминий. Вывод авторов [4] о том, что смещения слоев относительно друг друга в данном случае не должно быть из-за практиче-



ски одинаковых плотностей слоев, неверен. Дело в том, что величина сдвига слоев есть интегральная характеристика, зависящая не только от разницы плотностей слоев, но и от ряда других факторов. На примере данной пары металлов качественно рассмотрим те причины, которые могут вызвать заметный сдвиг слоев, даже если плотности слоев близки. В [4] не указана плотность применявшегося дюралюминия, но примерно эта величина известна. Например, для сплава Al2024 табличное значение плотности есть  $\rho_1 = 2,785 \text{ г/см}^3$ , а для сплава Al921T —  $\rho_1 = 2,833 \text{ г/см}^3$ . В этих пределах находятся плотности и других алюминиевых сплавов. Для наглядности будем оперировать значениями плотности обоих указанных сплавов. Для плотности внутреннего слоя (алюминия) примем значение  $\rho_2 = 2,71 \text{ г/см}^3$ . Тогда значение параметра  $\lambda$  в нашей задаче будет  $\lambda = 1,013$ , если, к примеру, внешний слой имел плотность сплава Al2024, и  $\lambda = 1,022$  для плотности второго сплава. Как видно, плотности слоев в относительном масштабе действительно отличаются незначительно: отклонение параметра  $\lambda$  от единицы составляет примерно 1,5—2%. Связь между скоростями слоев на линии раздела в струйной модели дается соотношением (4.1); на фиг. 5 это соотношение представлено графически. Здесь скорости отнесены к их величине в бесконечно удаленной точке, кривые 1 и 2 относятся соответственно к меньшему и большему значениям  $\lambda$ , а штриховая прямая — это линия равных скоростей. Любая кривая, построенная по (4.1), представляет собой диаграмму возможных значений скоростей в каждом из слоев на линии раздела  $\gamma$ . Действительно, двигаясь вдоль линии раздела  $\gamma$  из бесконечно удаленной точки  $B$  (см. фиг. 1), на фиг. 5 будем спускаться из точки (1,1) вдоль кривой возможных состояний. Спуск будет продолжаться до тех пор, пока на  $\gamma$  не достигнем точки  $D$ , в которой эта линия тока имеет максимальную кривизну. Здесь скорости в каждом из слоев принимают свои наименьшие значения на  $\gamma$ . При дальнейшем движении по  $\gamma$  к бесконечно удаленной точке  $A$  на кривой  $V_1(V_2)$  будем подниматься от точки минимальных значений скоростей в обратном направлении. На кривой  $V_1(V_2)$  точка минимума скоростей будет находиться тем ниже, чем ближе находится соответствующая ей на  $\gamma$  точка  $D$  к точке торможения  $O$  (см. фиг. 1). С другой стороны, скачок скоростей от слоя к слою в данной точке будет максимальным на  $\gamma$ , что очевидно из фиг. 5. Следовательно, первым фактором, который может вызвать значительную разницу скоростей слоев (и заметный их сдвиг) при незначительной разнице плотностей слоев, является геометрия течения. Например, для относительной скорости во внутреннем слое, равной 0,2, скорость во внешнем слое в этой точке линии в рассматриваемом случае биметаллической пары дюраль — алюминий будет на 50% больше. Если параметры соударения таковы, что линия раздела достаточно близко подходит к точке полного торможения жидкости, то разница скоростей слоев может оказаться достаточно большой, чтобы вызвать заметный сдвиг слоев. Другим фактором является время действия разницы скоростей. Если разница скоростей в слоях везде на  $\gamma$  не очень велика, но существует достаточно долго, то окончательный сдвиг слоев может оказаться существенным. В случае идеальной жидкости разница скоростей на  $\gamma$  в нашем случае имеется везде, кроме бесконечно удаленной точки и, следовательно, существует бесконечно долго, но идеальная жидкость является только моделью реального процесса. Для металлов эта модель справедлива при достаточно высоких давлениях, когда прочностными силами можно пренебречь. Протяженность области, в которой при соударении пластин реализуются высокие давления, ограничена, и именно размер этой области определяет в нашем случае реальное время действия разницы скоростей на границе раздела слоев. Практически это время зависит от геометрических и динамических параметров соударе-

ния и от прочностных свойств материалов пластин. Таким образом, сам по себе факт малого отличия плотностей слоев биметаллической пластины еще не означает, что сдвига слоев в действительности не будет или что сдвиг будет очень малым. Эксперименты работы [4] подтвердили эти выводы. Направление сдвига контрольной проволоочки в образцах 3-й, 4-й серий экспериментов (см. фиг. 5 в [4]) аналогично 1-й серии (см. фиг. 4, а) и показывает, что более тяжелый слой имеет более высокую скорость.

Рассмотрим теперь результаты 2-й серии экспериментов работы [4]. В результатах этой серии содержится факт, который в [4] не получил никакого объяснения. Речь идет о том, что если в остальных сериях экспериментов контрольная проволоочка на границе слоев разрывалась и части проволоочки в разных слоях расходились на некоторое расстояние, то в данной серии разрыва проволоочки в образцах не было. Положение контрольной проволоочки в образце для одного из опытов данной серии в [4] было представлено на фотографии (см. фиг. 4 в [4]) и качественно изображено на фиг. 4, б, где цифрой *II* указана контрольная проволоочка. Согласно всем вышеизложенным рассуждениям, часть проволоочки, находящаяся в более тяжелом внутреннем слое, должна была обогнать проволоочку во внешнем слое и конфигурация контрольной проволоочки в образце качественно должна быть такой, как это показано цифрой *II'* на фиг. 4, б. Тем не менее существенного противоречия между нашими рассуждениями и результатом этих опытов нет. Рассмотрим некоторые факты, имеющие отношение к данному вопросу. Во-первых, от 1-й серии экспериментов данная отличается тем, что материалы внешнего и внутреннего слоев биметаллических пластин поменялись местами, а толщины слоев остались без изменения. Но такая замена существенно меняет геометрические характеристики течения. Воспользуемся данными таблицы [4], в которой приведены имевшие место значения основных параметров, определяющих соударение пластин, и по формуле (3.1) с учетом, что  $v_1 = v_2$ , рассчитаем толщину внутреннего слоя песта (см. фиг. 1) для 1-й и 2-й серий экспериментов. Оказывается, что в 1-й серии, где внутренний слой — алюминий,  $\Delta_1 = 1,23$  мм, а в серии 2, где внутренний слой — медь,  $\Delta_1 = 1,85$  мм, т. е. в первом случае линия раздела слоев была существенно (по сравнению с начальной толщиной внутреннего слоя  $\delta_2 = 2$  мм) ближе к точке полного торможения жидкости. А это означает, как было показано выше, что скачок скоростей на линии раздела слоев, приводящий к отставанию внутреннего слоя в 1-й серии, заметно больше скачка скоростей на  $\gamma$ , который должен был привести к отставанию внешнего слоя во 2-й серии. Вторым существенным фактором, учитывающим реальные свойства материалов, является влияние вязкости. Рассмотрим некоторую точку на линии раздела слоев и в направлении, нормальном к линии раздела, в окрестности этой точки построим эпюры скоростей жидкости в каждом из слоев. Если данная точка не очень близка к точке полного торможения потока и рассматриваемая окрестность не слишком велика, то приближенно можно считать, что на отрезке, перпендикулярном линии тока  $\gamma$ , все векторы скорости жидкости перпендикулярны к этому отрезку. Для случая, когда внешний слой имеет большую плотность (1-я серия экспериментов), эпюра скоростей в произвольной точке линии раздела слоев качественно изображена на фиг. 4, а, а для случая, когда внутренний слой более тяжелый (2-я серия) — на фиг. 4, б. Анализ фиг. 4 показывает, что наличие реальной вязкости материалов, выражающееся в трении между соседними элементарными слоями (линиями тока) в каждом из слоев неоднородной струи, будет оказывать на течение разное действие в двух рассматриваемых случаях. В первом случае (см. фиг. 4, а) эпюра скоростей такова, что вязкость будет способствовать сдвигу слоев относительно друг друга, и наоборот,

во втором случае (см. фиг. 4, б) реальная вязкость будет препятствовать сдвигу разнородных слоев относительно друг друга. Двух приведенных фактов достаточно, чтобы понять, почему в 1-й серии экспериментов работы [4] имел место разрыв контрольной проволоки в образцах, а во 2-й серии, где металлы поменяли местами, разрыва не было. Не вызывает сомнения, что для случая, когда внутренний слой более тяжелый, чем внешний, можно подобрать такие материалы слоев биметаллических пластин и реализовать такие параметры соударения, что внутренний слой все-таки сдвинется «вперед» относительно внешнего и конфигурация контрольной проволоки в образце качественно будет близка к обозначенной на фиг. 4, б цифрой  $II$  во внешнем слое и цифрой  $II'$  — во внутреннем.

Необходимо подчеркнуть, что эффект разрыва скоростей на границе соединения разнородных металлов определяется самой структурой течения, соответствующего рассматриваемому соударению пластин, а не прочностью и вязкостью металлов, как это утверждается в работе [4]. Учет реальных свойств материалов требуется лишь для понимания того факта, что такие характеристики материалов, как прочность или вязкость, могут усиливать или ослаблять результат действия этого эффекта, который в данном случае выражается в сдвиге слоев относительно друг друга и разрыве контрольной проволоки.

Таким образом, все экспериментальные результаты работы [4] полностью укладываются в рассмотренную в данной работе стационарную модель соударения двухслойных струй идеальной несжимаемой жидкости с различными значениями постоянной интеграла Бернулли в разных слоях струи и тем самым качественно подтверждают справедливость этой модели.

Поступила 5 VI 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1973.
2. Белоцерковский П. М. Нелинейная задача о соударении плоских струй идеальной несжимаемой жидкости с разрывом течения на границе между струями.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 5.
3. Белоцерковский П. М. Задача о столкновении двух струй, вытекающих из каналов с параллельными стенками при разных скоростях на свободных поверхностях.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 6.
4. Козин Н. С., Мали В. И., Рубцов М. В. О тангенциальном разрыве при склопывании биметаллической облицовки.— ФГВ, 1977, № 4.

УДК 532.516

### О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ

А. П. Иванский

(Новосибирск)

В работе рассматриваются волны малой, но конечной амплитуды, возникающие на поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости, стекающей по вертикальной твердой поверхности, при малых числах Рейнольдса  $Re = U_0 h_0 / \nu$  на основе полной системы уравнений Навье — Стокса и граничных условий на стенке и свободной поверхности жидкости (учтено действие поверхностного натяжения).