

УДК 539.376

Асимптотический анализ поля напряжений у вершины трещины (учет высших приближений)*

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет им. Акад. С.П. Королева, ул. Московское шоссе, 34, Самара, 443086

E-mail: stepanovlv@samsu.ru

Степанова Л.В. Асимптотический анализ поля напряжений у вершины трещины (учет высших приближений) // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 3. — С. 345–361.

В статье приведено многопараметрическое асимптотическое описание поля напряжений у вершины центральной трещины в линейно-упругой изотропной пластине, находящейся под действием 1) нормального растягивающего напряжения, 2) поперечного сдвига, 3) в условиях смешанного деформирования в полном диапазоне смешанных форм нагружения, изменяющихся от нормального отрыва до поперечного сдвига. Построено многопараметрическое асимптотическое разложение компонент тензора напряжений, содержащее высшие приближения, в котором аналитически определены все масштабные (амплитудные) множители — коэффициенты полного асимптотического разложения М. Уильямса — как функции длины трещины и параметров нагружения. С помощью построенного разложения и полученных формул для коэффициентов разложения можно удерживать любое наперед заданное число слагаемых в асимптотических представлениях механических полей у вершины трещин в пластине. Проведен анализ числа слагаемых, которое необходимо удерживать на различных расстояниях от кончика дефекта. Вычислены углы распространения трещины в условиях смешанного нагружения с помощью многопараметрического разложения поля напряжений посредством 1) критерия максимального тангенциального напряжения, 2) критерия минимума плотности энергии упругой деформации.

DOI: 10.15372/SJNM20190307

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние у вершины трещины, многопараметрическое описание поля напряжений у вершины трещины, смешанное деформирование, коэффициент интенсивности напряжений, T -напряжения, коэффициенты высших приближений.

Stepanova L.V. Asymptotic analysis of the crack tip stress field (consideration of higher order terms) // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 3. — P. 345–361.

This paper deals with the multi-parameter asymptotic description of the stress field near the crack tip of a finite crack in an infinite isotropic elastic plane medium subject to 1) tensile stress; 2) in-plane shear; 3) mixed mode loading for a wide range of mode-mixing situations (Mode I and Mode II). The multi-parameter series expansion of the stress tensor components containing higher order terms has been constructed. All the coefficients of the multi-parameter series expansion of the stress field are given. The main focus is on the discussion of the influence of considering the higher-order terms of the Williams expansion. Analysis of the higher order terms in the stress field is made. It is shown that the larger distance from the crack tip, the more terms are necessary to be kept in the asymptotic series expansion.

Therefore, it can be concluded that several more higher-order terms of the Williams expansion must be used for the stress field description when the distance from the crack tip is not small enough. The crack propagation direction angle has been calculated. Two fracture criteria: maximum tangential stress criterion and the strain energy density criterion, are used. The multi-parameter form of two commonly used fracture criteria is introduced and tested. Thirty and more terms of the Williams expansion enable the angle to be calculated more precisely.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00631).

Keywords: *stress-strain state near the crack tip, multi-parameter asymptotic description of the stress field, mixed-mode loading, stress intensity factor, T-stress, coefficients of higher order terms.*

1. Введение. Асимптотическое представление поля напряжений у вершины трещины

Одной из актуальных задач современной механики разрушения является аккуратное описание поля напряжений у вершины трещины в материалах с различными определяющими уравнениями [1–19]. В настоящее время в связи с бурным развитием вычислительной техники и компьютерных алгоритмов стало возможным описание поля напряжений в окрестности вершины трещины с использованием многопараметрических асимптотических разложений — полных асимптотических разложений М. Уильямса поля напряжений [2]. Особенный интерес вызывает анализ высших приближений в многочленных асимптотических разложениях с целью 1) развития методов эффективного суммирования рядов для получения точных аналитических решений (эффективность применения аппроксимаций Паде или других методов суммирования в значительной мере зависит от наличия высших приближений); 2) расширения области действия асимптотических разложений [11, 12, 19]. Поэтому целью настоящей работы является построение многопараметрического асимптотического разложения поля напряжений у вершины центральной трещины в изотропной линейно-упругой бесконечной пластине, содержащего высшие приближения, и анализ их вклада в поле напряжений. В линейной механике разрушения хорошо известно полное асимптотическое разложение М. Уильямса компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины в изотропном линейно-упругом материале [2, 3]

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_{m,ij}^{(k)}(\theta) r^{k/2-1}, \quad (1)$$

где $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ — угловые распределения компонент тензора напряжений, определяемые в ходе решения краевой задачи; r — расстояние от вершины трещины; a_k^m — масштабные (амплитудные) коэффициенты, зависящие от геометрии образца с трещиной и приложенной нагрузки; постоянная m определяет тип нагружения и принимает значение 1 для нагружения, отвечающего нормальному отрыву, значение 2 — поперечному сдвигу. Угловые распределения напряжений $f_{m,ij}^{(k)}(\theta)$ хорошо известны [3, 19]:

$$\begin{aligned} f_{1,11}^{(k)}(\theta) &= k [(2 + k/2 + (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{1,22}^{(k)}(\theta) &= k [(2 - k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{1,12}^{(k)}(\theta) &= k [-(k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{2,11}^{(k)}(\theta) &= -k [(2 + k/2 - (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{2,22}^{(k)}(\theta) &= -k [(2 - k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta] / 2, \\ f_{2,12}^{(k)}(\theta) &= k [-(k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta] / 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Характеристики разрушения, такие как геометрия рассматриваемой области и интенсивность приложенной нагрузки, не влияют ни на радиальное, ни на угловое распределение напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины. Все

многообразие задач механики разрушения отражается в коэффициентах многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса a_k^m . В полном асимптотическом разложении М. Уильямса (1) в сумме отбрасываются слагаемые, отвечающие $k \leq 0$, в силу конечности энергии деформации в окрестности вершины трещины. В практических инженерных приложениях в (1), как правило, удерживается первое слагаемое ($k = 1$), и первый амплитудный коэффициент получил название коэффициента интенсивности напряжений $K_I = \sqrt{2\pi}a_1^1 f_{1,22}^{(1)}(0)$, $K_{II} = \sqrt{2\pi}a_1^2 f_{2,12}^{(1)}(0)$. Второе слагаемое в асимптотическом разложении поля напряжений (1) носит название T -напряжений [4]: $T = a_2^1 f_{1,11}^{(2)}(0)$. Тем не менее высшими приближениями в асимптотическом разложении М. Уильямса обычно пренебрегают, тогда как в целом ряде работ показано [3, 4, 6, 8, 9, 19], что высшие приближения ($k > 1$) во многих случаях могут оказывать существенное влияние при описании напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Особенно важным в этом отношении представляется правильная интерпретация экспериментальной информации, получаемой с помощью различных техник. Например, исследование [4] базируется на интерференционно-оптических методах механики деформируемого твердого тела и состоит из двух частей. В первой из них подробно рассматриваются теоретические принципы модифицированной версии метода последовательного наращивания длины трещины (ПНДТ), предложенной авторами. На этой основе разработан и верифицирован новый экспериментальный метод определения параметров механики разрушения. Предлагаемый подход основан на совместном применении метода ПНДТ и оптических интерференционных измерений локального деформационного отклика на малое приращение длины трещины. Экспериментальная информация представляет собой величины плоских компонент перемещений, которые определяются методом электронной спекл-интерферометрии в окрестности вершины трещины. В работе представлены математические соотношения, необходимые для преобразования исходных данных в искомые значения параметров механики разрушения. Показано, что величины коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) K_I и K_{II} и T -напряжений могут быть получены на основе определения первых четырех коэффициентов асимптотического разложения Уильямса (1). Анализ точности предложенного подхода проводится путем сравнения величин КИН и T -напряжений для краевой и центральной трещины в тонких пластинах с результатами численного моделирования и теоретическими данными соответственно. Таким образом, несмотря на использование одного из перспективных интерференционно-оптических методов — метода электронной спекл-интерферометрии — удастся найти лишь коэффициенты нескольких первых слагаемых асимптотического разложения М. Уильямса. Целью работы [19] является многопараметрическое описание поля напряжений у вершины трещины в изотропном линейно-упругом теле, получение аналитических выражений для коэффициентов асимптотических разложений компонент тензора напряжений на основе комплексных решений плоской задачи теории упругости для тел с трещинами и анализ высших приближений в полном асимптотическом решении М. Уильямса, поскольку с практической точки зрения важно знать 1) зависимость амплитудных множителей (коэффициентов разложения) от длины трещин и от системы приложенных нагрузок, 2) количество слагаемых в полном асимптотическом разложении М. Уильямса, которое необходимо удерживать в разложении. Статья [19] посвящена аналитическому определению коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений у вершин двух коллинеарных трещин равной длины в бесконечной пластине, находящейся в условиях смешанного нагружения (в условиях приложения нормального отрыва и поперечного сдвига). В статье построено многопараметрическое представление поля напряжений у вершин трещин, в

котором удерживаются высшие приближения. Показано, что в полном асимптотическом разложении компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины необходимо удерживать помимо главных членов асимптотического разложения и T -напряжений следующие слагаемые (высшие приближения). В настоящей работе построено полное асимптотическое разложение компонент тензора напряжений у вершины центральной трещины в бесконечной пластине, в котором можно удержать любое наперед заданное число слагаемых, и выполнен анализ высших приближений асимптотического разложения поля напряжений у вершины трещины.

2. Методы теории функции комплексного переменного

Теория функции комплексного переменного предоставляет удобный подход для решения многих краевых задач плоской теории упругости [20]. В рамках данного подхода вводится в рассмотрение функция напряжений Эри $\Phi(x_1, x_2)$, через которую компоненты тензора напряжений выражаются с помощью равенств $\sigma_{11}(x_1, x_2) = \Phi_{,22}$, $\sigma_{22}(x_1, x_2) = \Phi_{,11}$, $\sigma_{12}(x_1, x_2) = -\Phi_{,12}$. Функция напряжений Эри $\Phi(x_1, x_2)$ для линейного изотропного материала подчиняется бигармоническому уравнению $\Delta\Delta\Phi = 0$, решение которого, следуя формализму Колосова–Мусхелишвили, можно представить через две аналитические функции комплексного переменного: $z = x_1 + ix_2$ — комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили $\varphi(z)$ и $\chi(z)$: $\Phi(x_1, x_2) = \Phi(z, \bar{z}) = \text{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]$, где Re обозначает действительную часть функции и черта сверху обозначает комплексно-сопряженную функцию $\bar{z} = x_1 - ix_2$. Комбинация последних соотношений приводит к классическим представлениям поля напряжений через комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\chi(z)$:

$$\sigma_{11}(z) + \sigma_{22}(z) = 4\text{Re}[\varphi'(z)], \quad \sigma_{22}(z) - \sigma_{11}(z) + 2i\sigma_{12}(z) = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \chi'(z)]. \quad (3)$$

Компоненты тензора напряжений должны удовлетворять следующим краевым условиям в бесконечно удаленной точке (рисунок 1):

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} [\sigma_{11}(z), \sigma_{12}(z), \sigma_{22}(z)] &= [\alpha, 0, 1] \sigma_{22}^{\infty}; \\ \text{(ii)} \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} [\sigma_{11}(z), \sigma_{12}(z), \sigma_{22}(z)] &= [0, 1, 0] \sigma_{12}^{\infty} \end{aligned} \quad (4)$$

для трещины нормального отрыва (i) и трещины поперечного сдвига (ii).

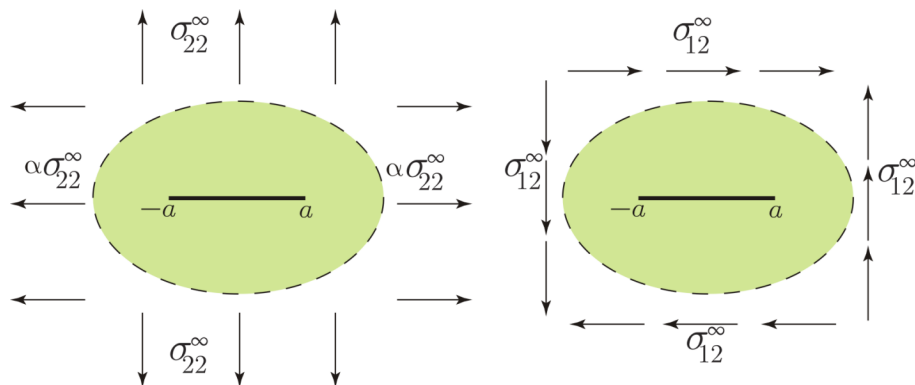


Рис. 1. Геометрия пластины с центральной трещиной: 1) типа I (слева); 2) типа II (справа)

В случае симметричного нагружения касательное напряжение $\sigma_{12}(z)$ обращается в нуль всюду на линии $x_2 = 0$, и можно свести задачу к отысканию аналитической функции $\varphi'(z) = \varphi_1'(z)$, такой что

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^1(z) &= 2\operatorname{Re}[\varphi_1'(z)] - 2x_2\operatorname{Im}[\varphi_1''(z)] + C_1, \\
\sigma_{22}^1(z) &= 2\operatorname{Re}[\varphi_1'(z)] + 2x_2\operatorname{Im}[\varphi_1''(z)] - C_1, \\
\sigma_{12}^1(z) &= -2x_2\operatorname{Re}[\varphi_1''(z)] + C_1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Следуя классическому формализму Колосова–Мусхелишвили [20], можно найти комплексный потенциал $\varphi_1'(z)$ в форме:

$$\varphi_1'(z) = (\sigma_{22}^\infty/2)z/\sqrt{(z^2 - a^2)} + (\alpha - 1)\sigma_{22}^\infty/4, \quad C_1 = (\alpha - 1)\sigma_{22}^\infty/2, \tag{6}$$

где a — полудлина трещины (рис. 1). Явные выражения для компонент тензора напряжений в растягиваемой пластине, ослабленной центральной трещиной, имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^1(x_1, x_2) &= \sigma_{22}^\infty[q_1 - (\alpha - 1) - x_2(v_2 - p_2)], \\
\sigma_{22}^1(x_1, x_2) &= \sigma_{22}^\infty[q_1 + x_2(v_2 - p_2)], \\
\sigma_{12}^1(x_1, x_2) &= -\sigma_{22}^\infty x_2(v_1 - p_1),
\end{aligned} \tag{7}$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
p_1 &= [(x_1^2 - x_2^2)w_1 + 2x_1x_2w_2]/(w_1^2 + w_2^2), \quad w_1 = X_1^3 - 3X_1X_2^2, \quad w_2 = 3X_1^2X_2 - X_2^3, \\
v_1 &= X_1/(X_1^2 + X_2^2), \quad p_2 = [2x_1x_2w_1 - (x_1^2 - x_2^2)w_2]/(w_1^2 + w_2^2), \\
v_2 &= -X_2/(X_1^2 + X_2^2), \quad q_1 = (x_1X_1 + x_2X_2)/(X_1^2 + X_2^2), \\
X_1 &= \sqrt{x_1^2 - x_2^2 - a^2 + \sqrt{(x_1^2 - x_2^2 - a^2)^2 + 4x_1^2x_2^2}}/\sqrt{2}, \\
X_2 &= x_1x_2/X_1, \quad q_2 = (x_2X_1 - x_1X_2)/(X_1^2 + X_2^2).
\end{aligned}$$

В случае поперечного сдвига решение задачи удовлетворяет условию антисимметрии $\sigma_{22} = 0$ при $x_2 = 0$. Это позволяет выразить комплексный потенциал $\chi(z)$ через $\varphi_2(z)$ и исключить комплексный потенциал $\chi(z)$ в уравнениях (3). Таким образом, напряженное состояние описывается соотношениями:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^2 &= 4\operatorname{Re}[\varphi_2'(z)] - 2x_2\operatorname{Im}[\varphi_2''(z)], \\
\sigma_{22}^2 &= 2x_2\operatorname{Im}[\varphi_2''(z)], \\
\sigma_{12}^2 &= -\operatorname{Im}[\varphi_2'(z)] - 2x_2\operatorname{Re}[\varphi_2''(z)] - C_2,
\end{aligned} \tag{8}$$

где комплексный потенциал Колосова–Мусхелишвили имеет вид [20]

$$\varphi_2'(z) = -i(\sigma_{12}^\infty/2)z/\sqrt{z^2 - a^2} + i\sigma_{12}^\infty/2, \quad C_2 = -\sigma_{12}^\infty. \tag{9}$$

Используя формулы Колосова–Мусхелишвили (3), можно получить окончательные выражения для компонент тензора напряжений в случае поперечного сдвига пластины с центральной трещиной:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^2(x_1, x_2) &= \sigma_{12}^\infty [2q_2 + x_2(v_1 - p_1)], \\
\sigma_{22}^2(x_1, x_2) &= -\sigma_{12}^\infty x_2(v_1 - p_1), \\
\sigma_{12}^2(x_1, x_2) &= \sigma_{12}^\infty [q_1 - x_2(v_2 - p_2)].
\end{aligned} \tag{10}$$

3. Асимптотическое представление компонент тензора напряжений у вершины трещины. Идентификация коэффициентов асимптотического разложения

Выше описано точное аналитическое решение задачи о плоскости, ослабленной центральной трещиной, в терминах комплексного переменного z . С другой стороны, асимптотическое представление М. Уильямса (1) описывает поле напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины в виде асимптотического ряда по степеням расстояния от кончика трещины r . Разложение точного аналитического решения задачи (6) и (9), полученного посредством теории функции комплексного переменного, в ряд по степеням r позволяет определить все коэффициенты асимптотического решения М. Уильямса (1). С целью определения масштабных множителей — коэффициентов асимптотического разложения М. Уильямса — разложим комплексный потенциал Колосова–Мухелишвили (6) в ряд в окрестности вершины $z(r, \theta) = a + re^{i\theta}$. Полагая в (6) и (9) $z = a + re^{i\theta}$ и раскладывая комплексные потенциалы $\varphi'_1(z)$ и $\varphi'_2(z)$ в ряд по степеням r , можно получить следующее асимптотическое разложение компонент тензора напряжений при $r \rightarrow 0$:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = a_2^1 f_{1,ij}^{(2)}(\theta) + \sum_{m=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}^m f_{m,ij}^{(2n+1)} r^{n-1/2}, \quad (11)$$

где коэффициенты асимптотического разложения вычисляются как

$$a_{2n+1}^1 = \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{2^{3n+1/2} (n!)^2 (2n-1)} \frac{\sigma_{22}^{\infty}}{a^{n-1/2}}, \quad n \geq 0, \\ a_2^1 = \sigma_{22}^{\infty} (\alpha - 1) / 4, \quad a_{2n}^1 = 0 \text{ в других случаях}, \quad (12)$$

и для трещины поперечного сдвига:

$$a_{2n+1}^2 = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{3n+1/2} (n!)^2 (2n-1)} \frac{\sigma_{12}^{\infty}}{a^{n-1/2}}, \quad n \geq 0, \\ a_{2n}^2 = 0 \text{ в других случаях}. \quad (13)$$

Таким образом, точное аналитическое решение задачи позволяет найти функциональную зависимость коэффициентов асимптотического разложения a_k^m от геометрических параметров задачи (от длины трещины) и от приложенной нагрузки.

Поскольку рассматривается линейно-упругое изотропное тело, суперпозиция полученных асимптотических решений позволяет построить решение задачи для смешанного нагружения тела с трещиной в полном диапазоне смешанных форм нагружения. В настоящей работе смешанная форма деформирования задается посредством параметра смешанности нагружения: $M^e = (2/\pi) \arctg |\sigma_{22}(r, \theta = 0) / \sigma_{12}(r, \theta = 0)|$. Параметр смешанности нагружения M^e изменяется от нуля до единицы, нуль отвечает чистому поперечному сдвигу, единица отвечает чистому нормальному отрыву. Для всех промежуточных форм нагружения $0 < M^e < 1$. Проанализируем поле напряжений на различных расстояниях от кончика трещины. На рис. 2–7 приведены угловые распределения компоненты тензора напряжений σ_{11} на различных расстояниях от кончика трещины. Угловые распределения построены для трещины в условиях смешанного нагружения ($M^e = 0.5$) (рис. 2–4) и для трещины нормального отрыва (рис. 5–7). Угловые распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{11} / \sigma_{22}^{\infty}$ построены с помощью усеченных асимптотических разложений,

в которых удерживалось различное количество слагаемых. На рис. 2 слева показаны кривые — распределения компоненты σ_{11} , полученные с помощью N -членных асимптотических разложений М. Уильямса поля напряжений (1) на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.05$. Сплошной жирной линией показано одночленное асимптотическое разложение компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$:

$$\sigma_{11} = C_1 a_1^1 r^{-1/2} (3 \cos \theta/2 + \cos 5\theta/2) / 4 + C_2 a_1^2 r^{-1/2} (7 \sin \theta/2 + \sin 5\theta/2) / 4, \quad (14)$$

пунктирными линиями — двучленное асимптотическое разложение компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$:

$$\sigma_{11} = C_1 \left[a_1^1 r^{-1/2} (3 \cos \theta/2 + \cos 5\theta/2) / 4 + 4a_2^1 \right] + C_2 a_1^2 r^{-1/2} (7 \sin \theta/2 + \sin 5\theta/2) / 4 \quad (15)$$

и трехчленное асимптотическое разложение компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$:

$$\sigma_{11} = C_1 \left[a_1^1 r^{-1/2} (3 \cos \theta/2 + \cos 5\theta/2) / 4 + 4a_2^1 + a_3^1 r^{1/2} (15 \cos \theta/2 - 3 \cos 3\theta/2) / 4 \right] + C_2 \left[a_1^2 r^{-1/2} (7 \sin \theta/2 + \sin 5\theta/2) / 4 - a_3^2 r^{1/2} (27 \sin \theta/2 + 3 \sin 5\theta/2) / 4 \right], \quad (16)$$

где $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ для трещины нормального отрыва, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ для трещины поперечного сдвига, для смешанного нагружения постоянные C_1 и C_2 связаны между собой равенством $C_1 = C_2 \operatorname{tg}(\pi M^e / 2)$, следующим из определения параметра смешанности нагружения. В разложениях (14)–(16) коэффициенты a_k^m вычисляются по формулам (12), (13).

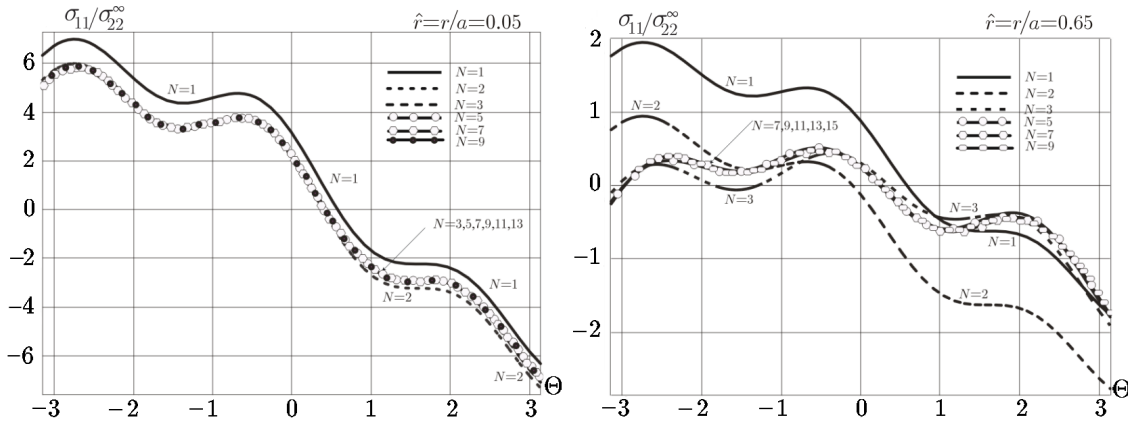


Рис. 2. Угловое распределение компоненты тензора напряжений σ_{11} на различных расстояниях от кончика трещины $\hat{r} = 0.05$ (слева), $\hat{r} = 0.65$ (справа) (асимптотическое решение)

Из рис. 2 видно, что одночленное и двучленное асимптотическое разложения отличаются друг от друга: различие между кривыми обуславливается влиянием T -напряжений. Из рис. 2 также видно, что на расстоянии $\hat{r} = 0.05$ двучленное и трехчленное разложение практически совпадают. Тогда как при увеличении расстояния от кончика трещины (рис. 2) различие между двучленным и трехчленным разложением становится более выраженным. На рис. 2 справа изображены угловые распределения σ_{11} , построенные с помощью N -членных асимптотических разложений компоненты σ_{11} , где $N = 1, 2, 3, 5, 7, 9$, на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.65$. Из рис. 2 следует, что при увеличении расстояния от кончика трещины необходимо удерживать высшие приближения до слагаемых порядка $O(r^{7/2})$.

При дальнейшем увеличении расстояния от кончика трещины (рис. 2, справа) семи-членное асимптотическое разложение ($N = 7$), девятичленное асимптотическое разложение ($N = 9$) и одиннадцатичленное асимптотическое разложение ($N = 11$) практически не являются различимыми, а асимптотические разложения, содержащие меньшее число слагаемых, существенно отличаются друг от друга.

На рис. 3 приведены угловые распределения для $\hat{r} = r/a = 1.25$. Из рис. 3 видно, что на указанном расстоянии от вершины трещины значительную роль начинают играть высшие приближения: их вкладом в общее представление компоненты тензора напряжений пренебрегать нельзя. Кривая перестает меняться только после добавления 25-го слагаемого: 25-членное разложение и 49-членное асимптотические разложения неразличимы. Тогда как при $\hat{r} = r/a = 1.5$ (рис. 4) 25-членное, 35-членное и 49-членные асимптотические разложения отличаются друг от друга (в программном комплексе Maple написана программа, в которой реализована возможность построения асимптотических разложений с любым наперед заданным числом удерживаемых слагаемых). После усеченного на 49-м слагаемом кривая не претерпевает изменений. Таким образом, можно заключить, что чем больше расстояние от кончика трещины, тем больше слагаемых необходимо удерживать в асимптотическом разложении. Высшие приближения, удерживаемые в асимптотическом разложении, позволяют значительно расширить область доминирования асимптотики М. Уильямса.

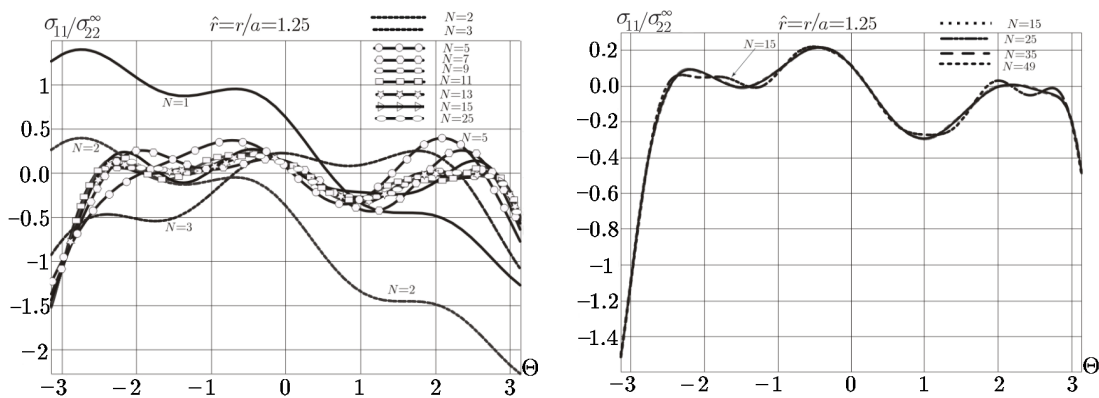


Рис. 3. Угловые распределения компоненты тензора напряжений σ_{11} , построенные посредством N -членных разложений ($\hat{r} = 1.25$) (асимптотическое решение)

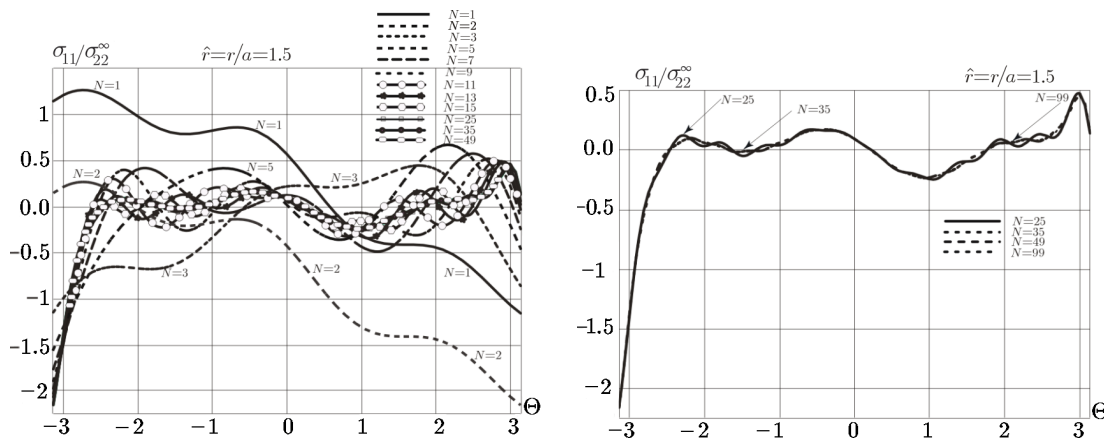


Рис. 4. Угловые распределения компоненты тензора напряжений σ_{11} , построенные с помощью N -членных асимптотических разложений М. Уильямса ($\hat{r} = 1.5$) (асимптотическое решение)

На рис. 5–7 показаны угловые распределения компоненты σ_{11} в окрестности вершины трещины нормального отрыва на различных расстояниях от кончика трещины, построенные с помощью различных усеченных асимптотических разложений. На рис. 5 показаны угловые распределения, полученные при $\hat{r} = r/a = 0.75$. Видно, что семичленное асимптотическое разложение еще отличается от асимптотических разложений, в которых удерживается 9, 11, 13, 15, 50, 75 и 100 слагаемых. Однако после удержания 11 слагаемых в асимптотическом разложении вклад следующих слагаемых пренебрежимо мал и кривая, определяемая 11-членным асимптотическим разложением, полностью совпадает с точным аналитическим решением, показанным точками. Таким образом, из рис. 5 следует, что на расстояниях $\hat{r} = 0.75$ от кончика трещины одночленное и двухчленное разложение (двухкомпонентное описание поля напряжений) дает значительную погрешность при определении поля напряжений. При $\hat{r} = r/a = 1.25$ описание поля напряжений стабилизируется только после удержания 20 слагаемых (рис. 6).

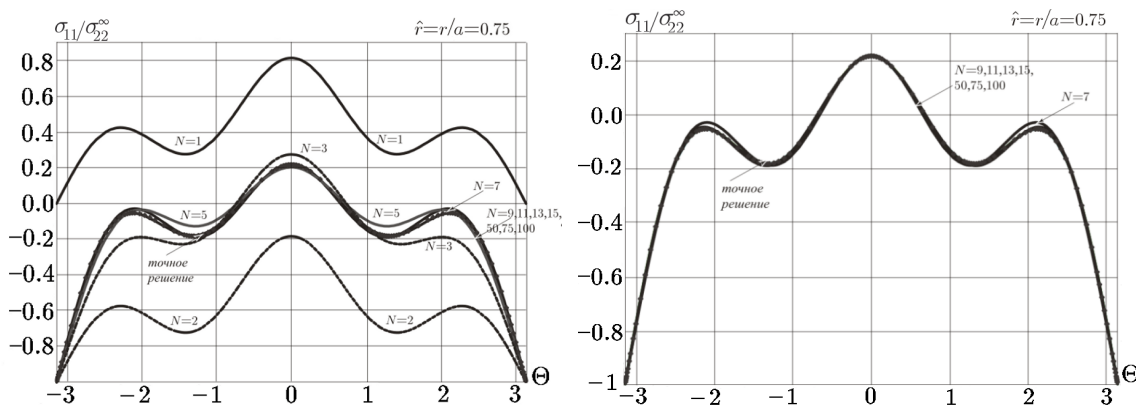


Рис. 5. Угловые распределения компоненты тензора напряжений σ_{11} при $\hat{r} = 0.75$, построенные с помощью асимптотических разложений, в которых удерживалось различное число слагаемых (N — число удерживаемых слагаемых). Точками изображена кривая, полученная с помощью точного аналитического решения задачи

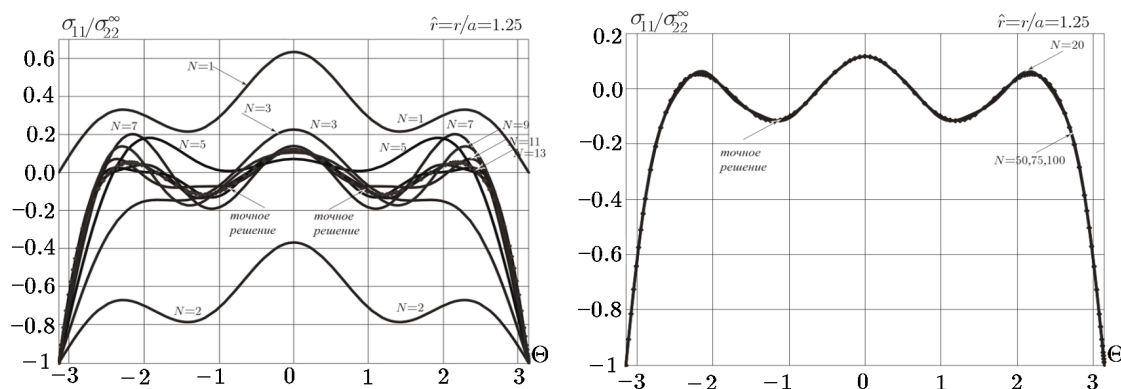


Рис. 6. Угловые распределения компоненты тензора напряжений σ_{11} при $\hat{r} = 1.25$ (N — число удерживаемых слагаемых). Точками изображена кривая, полученная с помощью точного аналитического решения задачи

На рис. 7 показаны угловые распределения нормального напряжения σ_{11} при $\hat{r} = r/a = 1.75$. Слева показаны кривые, построенные с помощью N -членных асимптотических разложений, где $N = 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 20, 50, 75, 100$. На рисунке также приведено точное решение задачи, полученное с помощью теории функции комплексного перемен-

ного. На рисунке справа приведены только кривые для $N = 50, 75, 100$ и точное решение задачи. Из рисунка видно, что даже 50-членное асимптотическое разложение существенным образом отличается от предельного точного решения (показанного точками). Поэтому на расстояниях порядка $\hat{r} = r/a = 1.75$ асимптотическое решение М. Уильямса оказывается справедливым, но в асимптотическом разложении необходимо удерживать высшие приближения — слагаемые более высоких порядков, вплоть до $N = 75$. Кривая, определяемая асимптотическим разложением, в котором удерживаются $N = 100$ слагаемых, полностью совпадает с точным решением.

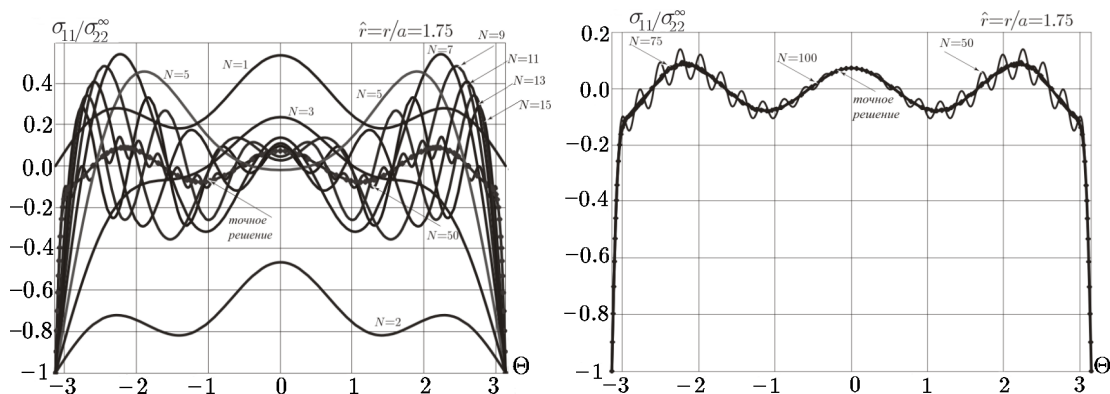


Рис. 7. Угловые распределения компоненты тензора напряжений σ_{11} при $\hat{r} = 1.75$

На рис. 8 показаны линии равных значений компоненты σ_{22} ($\sigma_{22}/\sigma_{22}^\infty = 4, \sigma_{22}/\sigma_{22}^\infty = 3.15, \sigma_{22}/\sigma_{22}^\infty = 2.945$), построенные с помощью многопараметрических асимптотических разложений, в которых удерживалось различное число слагаемых. Из рис. 8 видно, что на расстояниях порядка $\hat{r} = 0.1 - 0.3$ асимптотические разложения, содержащие 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 слагаемых, и точное решение, изображенное точками, совпадают. На рис. 8 (в центре) кривые, определяемые трехчленным, пятичленным, семичленным разложениями, отличаются от точного решения. На третьем изображении рис. 8 показаны линии равных значений компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}/\sigma_{22}^\infty = 2.945$ на расстояниях порядка $\hat{r} = 0.1 - 1.0$. Видно, что становятся существенными высшие приближения и одиннадцатичленное, тринадцатичленное асимптотические разложения отличаются от точного решения. Поэтому на рассматриваемых расстояниях следует удерживать вплоть до 17 членов асимптотического разложения, поскольку это разложение совпадает с точным решением. Следовательно, для расширения области действия асимптотического разложения следует удерживать слагаемые высоких порядков малости.

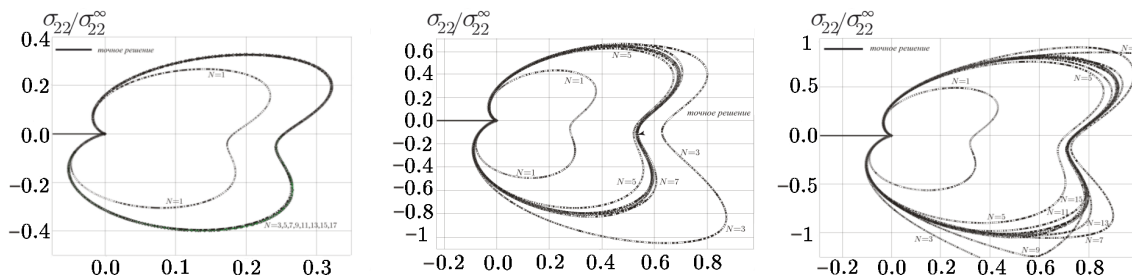


Рис. 8. Линии равных значений компоненты тензора напряжений σ_{22} , отнесенной к σ_{22}^∞ , построенные с помощью точного решения и асимптотического решения, в котором удерживается различное число слагаемых ($M^e = 0.75$)

4. Направление распространения трещины в условиях смешанного нагружения

Наиболее известным критерием для оценки направления распространения трещины является критерий максимального тангенциального напряжения, предложенный в [7] и активно используемый в настоящее время [8, 9]. Критерий, который строго зависит только от напряженного состояния, не отражает вид напряженного состояния: реализацию плоского напряженного или плоского деформированного состояния. Согласно этому критерию трещина распространяется в направлении действия максимального тангенциального напряжения. Математически критерий записывается следующим образом:

$$\partial\sigma_{\theta\theta}/\partial\theta = 0, \quad \partial^2\sigma_{\theta\theta}/\partial\theta^2 < 0. \quad (17)$$

С другой стороны, в настоящей работе показано, что высшие приближения могут оказывать значительное влияние на описание напряженного состояния в окрестности вершины трещины. Поэтому следует ожидать, что высшие приближения в полном асимптотическом разложении М. Уильямса будут существенными при определении направления распространения трещины. В таблице 1 приведены значения углов направления распространения трещины, вычисленные с помощью многопараметрического представления поля напряжений и критерия максимального тангенциального напряжения (17). В таблице 1 представлены результаты расчетов для восьми расстояний от кончика трещины $\hat{r} = r/a = 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1.25, 1.5, 1.75$.

Таблица 1. Углы направлений распространения трещины, вычисленные с помощью критерия максимального тангенциального напряжения

| M^e | Углы направления роста трещины | | | | | | | | |
|-------|--------------------------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|------------------|-----------------|------------------|
| | $N = 1$ | $\hat{r} = 0.05$ | $\hat{r} = 0.1$ | $\hat{r} = 0.25$ | $\hat{r} = 0.5$ | $\hat{r} = 0.75$ | $\hat{r} = 1.25$ | $\hat{r} = 1.5$ | $\hat{r} = 1.75$ |
| 0 | -70.53 | -66.21 | -62.49 | -55.08 | -49.65 | -47.39 | -45.72 | -45.40 | -45.29 |
| 0.1 | -67.53 | -62.20 | -58.34 | -51.34 | -46.55 | -44.63 | -43.25 | -42.99 | -42.70 |
| 0.2 | -64.47 | -58.01 | -54.10 | -47.60 | -43.44 | -41.83 | -40.72 | -40.52 | -40.67 |
| 0.25 | -62.86 | -55.83 | -51.91 | -45.69 | -41.84 | -40.38 | -39.30 | -39.20 | -39.06 |
| 0.3 | -61.18 | -53.53 | -49.64 | -43.72 | -40.18 | -38.87 | -38.01 | -37.87 | -37.56 |
| 0.4 | -57.48 | -48.60 | -44.83 | -39.58 | -36.65 | -35.63 | -35.01 | -34.93 | -34.14 |
| 0.5 | -53.13 | -43.03 | -39.50 | -35.00 | -32.69 | -31.95 | -31.56 | -31.52 | -31.37 |
| 0.6 | -47.72 | -36.61 | -33.46 | -29.80 | -28.11 | -27.63 | -27.44 | -27.45 | -27.35 |
| 0.7 | -40.61 | -29.12 | -26.52 | -23.77 | -22.66 | -22.42 | -22.40 | -22.44 | -22.61 |
| 0.75 | -36.12 | -24.93 | -22.68 | -20.40 | -19.54 | -19.39 | -19.44 | -19.49 | -19.47 |
| 0.8 | -30.81 | -20.42 | -18.55 | -16.75 | -16.13 | -16.05 | -16.14 | -16.20 | -16.26 |
| 0.9 | -17.19 | -10.57 | -9.59 | -8.71 | -8.46 | -8.46 | -8.55 | -8.59 | -8.53 |

Во всех таблицах 1–4 в первом столбце приведены значения углов, вычисленные с помощью однопараметрического разложения М. Уильямса. Таким образом, на значения углов, приведенные в первом столбце, не влияет расстояние от кончика трещины. Для определения угла распространения трещины на расстояниях $\hat{r} = 0.05 - 0.5$ использовалось многопараметрическое асимптотическое разложение, в котором удерживалось 40 слагаемых, поскольку при меньшем числе удерживаемых слагаемых угол меняется. При $\hat{r} = 0.75 - 1.75$ использовалось 120-членное асимптотическое разложение. Из табл. 1 видно, что угол направления распространения трещины зависит от расстояния, для которого применяется критерий (17). Угол, определяемый одночленным разложением, отличается от углов, определяемых многопараметрическим асимптотическим разложением поля напряжений, для всех значений параметра смешанности нагружения.

Однако для расстояний $\hat{r} = 0.75 - 1.75$ значения углов меняются слабо. В [5] предложен критерий минимума плотности упругой энергии деформации S , широко используемый в настоящее время [6, 8, 9]. Критерий отражает вид напряженного состояния, в котором находится образец (плоское деформированное или плоское напряженное состояние). Согласно критерию трещина растет в направлении минимума плотности упругой энергии деформации. Математически критерий записывается следующим образом:

$$\partial S / \partial \theta = 0, \quad \partial^2 S / \partial \theta^2 > 0, \quad \text{где } S = (1/(2\mu))[(\nu)(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})^2/8 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta}^2]. \quad (18)$$

В критерии минимума плотности энергии упругой деформации (18) использовались многопараметрические разложения компонент тензора напряжений. Результаты вычислений представлены в табл. 2–4. В пакете символьной математики Maple Release 17 написан код, позволяющий вычислить угол направления распространения трещины на основе многопараметрического представления поля напряжений, удерживая любое наперед заданное число слагаемых. В табл. 2, 3 приведены значения углов направления роста трещины, вычисленные по критерию минимума энергии упругой деформации (18) для плоского деформированного состояния для $\nu = 0.3$ и $\nu = 0.5$ соответственно.

Таблица 2. Углы направлений распространения трещины, вычисленные с помощью критерия минимума упругой энергии деформации, $\nu = 0.3$, плоское деформированное состояние

| M^e | Углы направления роста трещины | | | | | | | | |
|-------|--------------------------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|------------------|-----------------|------------------|
| | $N = 1$ | $\hat{r} = 0.05$ | $\hat{r} = 0.1$ | $\hat{r} = 0.25$ | $\hat{r} = 0.5$ | $\hat{r} = 0.75$ | $\hat{r} = 1.25$ | $\hat{r} = 1.5$ | $\hat{r} = 1.75$ |
| 0 | -82.34 | -82.36 | -82.33 | -81.74 | -79.05 | -75.27 | -68.55 | -66.02 | -63.70 |
| 0.1 | -76.19 | -75.98 | -75.84 | -74.94 | -72.04 | -68.56 | -62.68 | -60.68 | -57.95 |
| 0.2 | -70.14 | -69.52 | -69.20 | -67.94 | -64.95 | -61.81 | -56.72 | -54.81 | -52.18 |
| 0.25 | -67.14 | -66.24 | -65.81 | -64.35 | -61.37 | -58.40 | -53.69 | -51.93 | -51.36 |
| 0.3 | -64.13 | -62.90 | -62.34 | -60.72 | -57.76 | -54.97 | -50.63 | -49.00 | -46.38 |
| 0.4 | -58.10 | -55.99 | -55.17 | -53.26 | -50.45 | -48.03 | -44.38 | -43.01 | -40.55 |
| 0.5 | -51.91 | -48.65 | -47.59 | -45.52 | -42.97 | -40.93 | -37.92 | -36.81 | -34.64 |
| 0.6 | -45.35 | -40.71 | -39.47 | -37.43 | -35.24 | -33.58 | -31.20 | -30.33 | -28.63 |
| 0.7 | -38.01 | -31.95 | -30.69 | -28.88 | -27.15 | -25.90 | -24.13 | -23.48 | -22.46 |
| 0.75 | -33.82 | -27.21 | -26.01 | -24.40 | -22.93 | -21.89 | -20.42 | -19.88 | -20.53 |
| 0.8 | -29.04 | -22.20 | -21.14 | -19.77 | -18.58 | -17.74 | -16.58 | -16.15 | -15.99 |
| 0.9 | -16.75 | -11.44 | -10.82 | -10.08 | -9.48 | -9.06 | -8.49 | -8.28 | -8.56 |

Таблица 3. Углы направлений распространения трещины, вычисленные с помощью критерия минимума упругой энергии деформации, $\nu = 0.5$, плоское деформированное состояние

| M^e | Углы направления роста трещины | | | | | | | | |
|-------|--------------------------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|------------------|-----------------|------------------|
| | $N = 1$ | $\hat{r} = 0.05$ | $\hat{r} = 0.1$ | $\hat{r} = 0.25$ | $\hat{r} = 0.5$ | $\hat{r} = 0.75$ | $\hat{r} = 1.25$ | $\hat{r} = 1.5$ | $\hat{r} = 1.75$ |
| 0 | -90.00 | -89.28 | -88.54 | -86.07 | -81.11 | -76.21 | -68.81 | -66.17 | -63.74 |
| 0.1 | -83.99 | -82.82 | -81.85 | -78.90 | -73.92 | -69.49 | -63.00 | -60.69 | -58.01 |
| 0.2 | -77.91 | -76.14 | -74.88 | -71.50 | -66.65 | -62.70 | -57.07 | -55.05 | -52.26 |
| 0.25 | -74.82 | -72.68 | -71.26 | -67.02 | -62.97 | -59.27 | -54.03 | -52.17 | -51.41 |
| 0.3 | -71.68 | -69.12 | -67.55 | -63.86 | -59.28 | -55.88 | -50.97 | -49.24 | -46.47 |
| 0.4 | 65.19 | -61.66 | -59.80 | -55.98 | -51.78 | -48.78 | -44.68 | -43.22 | -40.65 |
| 0.5 | -58.28 | -53.60 | -51.55 | -47.80 | -44.10 | -41.57 | -38.17 | -36.97 | -34.73 |
| 0.6 | -50.68 | -44.80 | -42.70 | -39.28 | -36.16 | -34.10 | -31.38 | -30.42 | -28.69 |
| 0.7 | -41.90 | -35.06 | -33.13 | -30.28 | -27.84 | -26.27 | -24.22 | -23.50 | -22.47 |
| 0.75 | -36.84 | -29.80 | -28.05 | -25.57 | -23.50 | -22.18 | -20.47 | -19.87 | -20.27 |
| 0.8 | -31.13 | -24.27 | -22.77 | -20.70 | -19.03 | -17.97 | -16.60 | -16.11 | -15.95 |
| 0.9 | -17.21 | -12.46 | -11.63 | -10.54 | -9.70 | -9.16 | -8.47 | -8.23 | -8.38 |

В табл. 4 приведены значения углов направления роста трещины, вычисленные по критериям минимума энергии упругой деформации (18) для плоского напряженного состояния для $\nu = 0.3$.

Таблица 4. Углы направлений распространения трещины, вычисленные с помощью критерия минимума упругой энергии деформации, $\nu = 0.3$, плоское напряженное состояние

| M^e | Углы направления роста трещины | | | | | | | | |
|-------|--------------------------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|------------------|-----------------|------------------|
| | $N = 1$ | $\hat{r} = 0.05$ | $\hat{r} = 0.1$ | $\hat{r} = 0.25$ | $\hat{r} = 0.5$ | $\hat{r} = 0.75$ | $\hat{r} = 1.25$ | $\hat{r} = 1.5$ | $\hat{r} = 1.75$ |
| 0 | -79.66 | -80.01 | -80.26 | -80.33 | -78.36 | -74.95 | -68.48 | -65.96 | -63.70 |
| 0.1 | -73.35 | -73.59 | -73.78 | -73.60 | -71.39 | -68.24 | -62.58 | -60.40 | -57.94 |
| 0.2 | -67.19 | -67.14 | -67.20 | -66.69 | -64.35 | -61.50 | -56.60 | -54.73 | -52.16 |
| 0.25 | -64.16 | -63.88 | -63.85 | -63.16 | -60.79 | -59.09 | -53.57 | -51.84 | -51.34 |
| 0.3 | -61.14 | -60.58 | -60.44 | -59.58 | -57.21 | -54.67 | -50.51 | -48.92 | -46.36 |
| 0.4 | -55.14 | -53.80 | -53.41 | -52.25 | -49.96 | -47.76 | -44.26 | -42.94 | -40.52 |
| 0.5 | -49.09 | -46.66 | -46.03 | -44.64 | -42.54 | -40.69 | -37.83 | -36.75 | -34.62 |
| 0.6 | -42.83 | -39.00 | -38.16 | -36.70 | -34.89 | -33.39 | -31.14 | -30.30 | -28.61 |
| 0.7 | -36.00 | -30.60 | -29.67 | -28.32 | -26.88 | -25.76 | -24.10 | -23.48 | -22.45 |
| 0.75 | -32.17 | -26.06 | -25.15 | -23.93 | -22.70 | -21.77 | -20.40 | -19.89 | -20.62 |
| 0.8 | -27.82 | -21.27 | -20.44 | -19.39 | -18.40 | -17.66 | -16.57 | -16.17 | -16.02 |
| 0.9 | -16.44 | -10.97 | -10.47 | -9.89 | -9.39 | -9.02 | -8.49 | -8.30 | -8.63 |

Результаты проведенных вычислений показали, что

- угол направления роста трещины, вычисленный по однопараметрическому критерию разрушения, существенно отличается от углов, определяемых многопараметрическими разложениями,
- чем больше расстояние от вершины трещины, тем сильнее различаются углы направления роста трещины, полученные с меньшим числом удерживаемых слагаемых в разложении,
- зависимость угла направления роста трещины от расстояния от вершины трещины сильнее при малых r . По мере увеличения расстояния от кончика трещины значение угла стабилизируется.

На рис. 9 показан разрушенный образец с наклонной трещиной, угол наклона трещины составлял 45° ($M^e = 0.5$) с направлением растяжения образца.

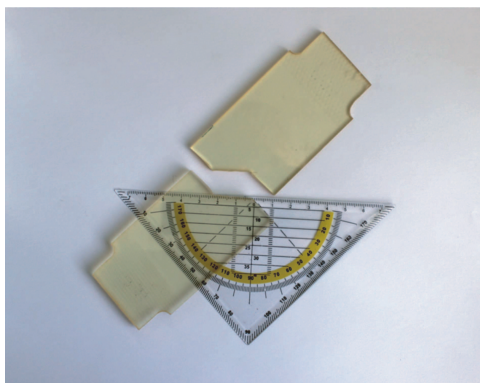


Рис. 9. Разрушенный образец с наклонной трещиной, угол трещины с горизонтальной осью образца составляет 45° , что соответствует $M^e = 0.5$

Из рис. 9 видно, что угол направления распространения трещины находится в хорошем соответствии с результатами вычислений, проведенных с помощью многопараметрического представления поля напряжений. Особенно хорошим является совпадение с результатами, полученными по критерию минимума плотности энергии упругой деформации с использованием многопараметрического представления поля напряжений (табл. 4).

5. Выводы и обсуждение результатов

В работе получено многопараметрическое асимптотическое разложение поля напряжений в окрестности вершины трещины и дан анализ вклада высших приближений в поле напряжений на различных расстояниях от кончика трещины. Показано, что для увеличения области действия асимптотического разложения М. Уильямса следует удерживать слагаемые высших порядков. Чем больше расстояние от кончика трещины, тем больше слагаемых следует удерживать в асимптотическом разложении. Полученное асимптотическое разложение, амплитудные коэффициенты разложения и проведенный анализ могут быть полезны для цифровой обработки данных оптоэлектронных измерений методами фотоупругости, голографической интерферометрии, спекл-интерферометрии и цифровой корреляции изображений, которые в настоящее время приобрели большое значение [10, 15, 16]. При обработке экспериментальных данных, например полученных с помощью метода фотоупругости, возникают сложности вычислительного характера, связанные с решением системы нелинейных алгебраических уравнений, следующих из основного закона фотоупругости, закона Вертгейма, который применяют для экспериментального определения коэффициентов полного асимптотического разложения М. Уильямса. Для получения надежных результатов оказывается необходимым иметь аналитические оценки для амплитудных (масштабных) множителей — коэффициентов асимптотического разложения. Поэтому полученное решение позволяет экспериментатору для правильной обработки всей совокупности экспериментальной информации 1) обоснованно выбрать количество удерживаемых слагаемых в разложении М. Уильямса, 2) сопоставить экспериментально определенные множители с найденными теоретически.

Литература

1. **Akbardoost J., Rastin A.** Comprehensive data for calculating the higher order terms of crack tip stress field in disk-type specimens under mixed mode loading // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. — 2015. — Vol. 76. — P. 75–90.
2. **Williams M.L.** On the stress distribution at the base of a stationary crack // *Trans. ASME. J. of Applied Mechanics*. — 1957. — Vol. 24. — P. 109–114.
3. **Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M.** Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // *Int. J. of Solids and Structures*. — 2012. — Vol. 49. — P. 556–566.
4. **Елеонский С.И., Одинцев И.Н., Писарев В.С., Чернов А.В.** Исследование процесса распространения трещины по данным измерений локального деформационного отклика. I. Поле действующих напряжений // *Ученые записки ЦАГИ*. — 2015. — Т. 46, № 7. — С. 55–80.
5. **Sih G.C.** Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems // *Int. J. Fract.* — 1974. — Vol. 10, № 3. — P. 305–321.

6. **Vesely V., Sobek J., Seitzl S.** Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip // *Int J. Fatigue.* — 2016. — Vol. 89. — P. 20–35.
7. **Erdogan F., Sih G.C.** On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // *Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engineering.* — 1963. — Vol. 85, № 4. — P. 519–527.
8. **Malikova L., Vesely V., Seitzl S.** Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria // *Int. J. Fatigue.* — 2016. — Vol. 89. — P. 99–107.
9. **Malikova L.** Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry // *Engineering Fracture Mechanics.* — 2015. — № 143. — P. 32–46.
10. **Mokhtarishirazabad M., Lopez-Crespo P., Moreno B., Lopez-Moreno A., Zanganeh M.** Evaluation of crack-tip fields from DIC data: A parameter study // *Int. J. Fatigue.* — 2016. — Vol. 89. — P. 11–19.
11. **Степанова Л.В., Адылина Е.М.** Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения // *Прикладная механика и техническая физика.* — 2014. — Т. 55, № 5. — С. 181–194. Перевод: Stepanova L., Adylina E. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics.* — 2014. — Vol. 55, iss. 5. — P. 885–895.
12. **Степанова Л.В.** Асимптотика напряжений и скоростей деформаций вблизи вершины трещины поперечного сдвига в материале, поведение которого описывается дробно-линейным законом // *Прикладная механика и техническая физика.* — 2009. — Т. 50, № 1. — С. 165–176. Перевод: Stepanova L. Asymptotics of stresses and strain rates near the tip of a transverse shear crack in a material whose behavior is described by a fractional-linear law // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics.* — 2009. — Vol. 50, iss. 1. — P. 137–146.
13. **Lychak O., Holyns'kiy I.** Improving the accuracy of derivation of the Williams' series parameters under mixed (I+II) mode loading by compensation of measurement bias in the stress field components data // *Measurement Science and Technology.* — 2016. — Vol. 27, № 12.
14. **Stepanova L.V., Yakovleva E.M.** Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material // *J. of Mechanics of Materials and Structures.* — 2015. — Vol. 10, № 3. — P. 367–393.
15. **Ayatollahi M.R., Moazzami M.** Digital image correlation method for calculating coefficients of Williams expansion in compact tension // *Optic and Lasers in Engineering.* — 2017. — Vol. 90. — P. 26–33.
16. **Chernyatin A.S., Matvienko Yu.G., Lopez-Crespo P.** Mathematical and numerical correction of the DIC displacements for determination of stress field along crack front // *Proc. Structural Integrity.* — 2016. — Vol. 2. — P. 2650–2658.
17. **Malikova L., Vesely V.** Estimation of the crack propagation direction in a mixed-mode geometry via multi-parameter fracture criteria // *Frattura ed Integrita Strutturale.* — 2015. — Vol. 33. — P. 25–32.
18. **Weiβgraeber P., Leguillon D., Becker W.** A review of Finite Fracture Mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers // *Arch. Appl. Mech.* — 2016. — Vol. 86, № 1-2. — P. 375–401.
19. **Stepanova L.V., Roslyakov P.S.** Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // *Int. J. of Solids and Structures.* — 2016. — № 100-101. — P. 11–28.

20. **Мусхелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 10 августа 2017 г.

После доработки 3 июля 2018 г.

Принята к публикации 7 мая 2019 г.

Литература в транслитерации

1. **Akbardoost J., Rastin A.** Comprehensive data for calculating the higher order terms of crack tip stress field in disk-type specimens under mixed mode loading // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. — 2015. — Vol. 76. — P. 75–90.
2. **Williams M.L.** On the stress distribution at the base of a stationary crack // Trans. ASME. J. of Applied Mechanics. — 1957. — Vol. 24. — P. 109–114.
3. **Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.-M.** Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // Int. J. of Solids and Structures. — 2012. — Vol. 49. — P. 556–566.
4. **Eleonskii S.I., Odincev I.N., Pisarev V.S., Chernov A.V.** Issledovanie processa rasprostraneniya treschiny po dannym izmerenii lokal'nogo deformacionnogo otklika. I. Pole dejstvuyuschih napryazhenii // Uchenye zapiski CAGI. — 2015. — Т. 46, № 7. — S. 55–80.
5. **Sih G.C.** Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems // Int. J. Fract. — 1974. — Vol. 10, № 3. — P. 305–321.
6. **Vesely V., Sobek J., Seitzl S.** Multi-parameter approximation of the stress field in a cracked body in the more distant surrounding of the crack tip // Int J. Fatigue. — 2016. — Vol. 89. — P. 20–35.
7. **Erdogan F., Sih G.C.** On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // Trans. ASME. Ser. D. J. Basic Engineering. — 1963. — Vol. 85, № 4. — P. 519–527.
8. **Malikova L., Vesely V., Seitzl S.** Crack propagation direction in a mixed mode geometry estimated via multi-parameter fracture criteria // Int. J. Fatigue. — 2016. — Vol. 89. — P. 99–107.
9. **Malikova L.** Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry // Engineering Fracture Mechanics. — 2015. — № 143. — P. 32–46.
10. **Mokhtarishirazabad M., Lopez-Crespo P., Moreno B., Lopez-Moreno A., Zanganeh M.** Evaluation of crack-tip fields from DIC data: A parameter study // Int. J. Fatigue. — 2016. — Vol. 89. — P. 11–19.
11. **Stepanova L.V., Adylina E.M.** Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie v okrestnosti vershiny treschiny v usloviyah smeshannogo nagruzheniya // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. — 2014. — Т. 55, № 5. — S. 181–194. Pervod: Stepanova L., Adylina E. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed loading // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2014. — Vol. 55, iss. 5. — P. 885–895.
12. **Stepanova L.V.** Asimptotika napryazhenii i skorostej deformacii vblizi vershiny treschiny poperechnogo sdviga v materiale, povedenie kotorogo opisyaetsya drobno-linejnym zakonom // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. — 2009. — Т. 50, № 1. — S. 165–176. Pervod: Stepanova L. Asymptotics of stresses and strain rates near the tip of a transverse shear crack in a material whose behavior is described by a fractional-linear law // J. of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2009. — Vol. 50, iss. 1. — P. 137–146.

13. **Lychak O., Holyns'kiy I.** Improving the accuracy of derivation of the Williams' series parameters under mixed (I+II) mode loading by compensation of measurement bias in the stress field components data // *Measurement Science and Technology*.—2016.— Vol. 27, № 12.
14. **Stepanova L.V., Yakovleva E.M.** Asymptotic stress field in the vicinity of a mixed-mode crack under plane stress conditions for a power-law hardening material // *J. of Mechanics of Materials and Structures*.—2015.— Vol. 10, № 3.— P. 367–393.
15. **Ayatollahi M.R., Moazzami M.** Digital image correlation method for calculating coefficients of Williams expansion in compact tension // *Optic and Lasers in Engineering*.—2017.— Vol. 90.— P. 26–33.
16. **Chernyatin A.S., Matvienko Yu.G., Lopez-Crespo P.** Mathematical and numerical correction of the DIC displacements for determination of stress field along crack front // *Proc. Structural Integrity*.—2016.— Vol. 2.— P. 2650–2658.
17. **Malikova L., Vesely V.** Estimation of the crack propagation direction in a mixed-mode geometry via multi-parameter fracture criteria // *Frattura ed Integrita Strutturale*.—2015.— Vol. 33.— P. 25–32.
18. **Weiβgraeber P., Leguillon D., Becker W.** A review of Finite Fracture Mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers // *Arch. Appl. Mech.*—2016.— Vol. 86, № 1-2.— P. 375–401.
19. **Stepanova L.V., Roslyakov P.S.** Multi-parameter description of the crack-tip stress field: Analytic determination of coefficients of crack-tip stress expansions in the vicinity of the crack tips of two finite cracks in an infinite plane medium // *Int. J. of Solids and Structures*.—2016.— № 100-101.— P. 11–28.
20. **Muskhelishvili N.I.** *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti*.—M.: Nauka, 1966.

